Experimental analysis of the use of GeoGebra in the teaching of linear programming to students of an urban public institution

Abstract- This study evaluated the effect of GeoGebra on the learning of linear programming among fifth-year secondary students from a public educational institution in Metropolitan Lima. An applied quantitative study with a quasi-experimental pretest–posttest design was conducted. The sample comprised 45 students divided into an experimental group (n = 22) and a control group (n = 23). The intervention included ten validated learning worksheets designed to progressively develop conceptual, procedural, and attitudinal learning through basic GeoGebra commands. The instruments showed adequate reliability, with KR-20 values of up to 0.80 and Cronbach's alpha values of up to 0.91. Pretest results confirmed initial group homogeneity (p = 0.803). In the posttest, the experimental group achieved significantly higher overall performance than the control group (M = 16.00 vs. M = 11.56; Z = 4.65; p < 0.001). Significant differences were also found in conceptual, procedural, and attitudinal learning. It is concluded that GeoGebra, when integrated through sequenced activities, improves understanding, problem-solving performance, and students' attitudes toward learning linear programming.

Keywords: GeoGebra, linear programming, mathematics learning, educational technology, quasi-experimental design.

Análisis Experimental del Uso de GeoGebra en la Enseñanza de Programación Lineal en Estudiantes de una Institución Pública Urbana

Bello-Durand, Judith Beatriz[1]; Málaga-Arenas, Ernesto[2]; Bello-Durand, Irene Verónica[3]
[1]Universidad Autónoma del Perú, Perú, *jbellod@autonoma.edu.pe*
[2]Universidad Nacional Agraria La Molina, Perú, *20061352@lamolina.edu.pe*
[3]Universidad Internacional Iberoamericana, México, *servbiolsac@gmail.com*

Resumen–. El estudio evaluó el efecto del uso de GeoGebra en el aprendizaje de programación lineal en estudiantes de quinto grado de secundaria de una institución educativa pública de Lima Metropolitana. Se desarrolló una investigación aplicada, de enfoque cuantitativo y diseño cuasiexperimental con pretest y postest. Participaron 45 estudiantes, distribuidos en un grupo experimental (n = 22) y un grupo control (n = 23). La intervención comprendió diez fichas de aprendizaje validadas, orientadas al desarrollo progresivo de conceptos, procedimientos y actitudes mediante el uso de comandos básicos de GeoGebra. Los instrumentos presentaron niveles adecuados de confiabilidad, con valores de KR-20 de hasta 0,80 y alfa de Cronbach de hasta 0,91. Los resultados del pretest confirmaron la homogeneidad inicial de los grupos (p = 0,803). En el postest, el grupo experimental alcanzó un rendimiento significativamente superior al grupo control (M = 16,00 frente a M = 11,56; Z = 4,65; p < 0,001). También se identificaron diferencias significativas en el aprendizaje conceptual, procedimental y actitudinal. Se concluye que GeoGebra, integrado mediante actividades secuenciadas, mejora la comprensión, la resolución de problemas y la disposición hacia el aprendizaje de la programación lineal.

Palabras claves: GeoGebra, programación lineal, aprendizaje matemático, tecnología educativa, diseño cuasiexperimental.

I. Introducción

El artículo aporta evidencia científica, reflexiva e innovadora orientada al fortalecimiento de los procesos de aprendizaje, generando un conocimiento original y riguroso que enriquece el campo educativo peruano.

A nivel internacional, diversos estudios indican que si los docentes emplean las Tecnologías de información y la Comunicación (TIC) en las sesiones de clases, los estudiantes pueden desarrollar competencias y analizar conceptos matemáticos de forma más activa. Sin embargo, muchos de ellos prefieren no usarlos porque no le dan el debido valor tecnológico o académico [1].

La aplicación de las TIC en la educación permite un aprendizaje colaborativo [2] el surgimiento de nuevos ambientes de aprendizaje al manipular los conceptos [3], además relaciona e interactúa recursos tecnológicos, contenido curricular y experiencias de aprendizaje significativo.

Este enfoque es apropiado para la enseñanza de la Programación Lineal (PL), porque el uso de herramientas tecnológicas mejora el aprendizaje significativo e interactivo, así como la comprensión visual, la experimentación, la toma de decisiones, y el interés de los estudiantes [4].

Antiguamente, la enseñanza de PL se desarrollaba con lápiz y papel, posteriormente, a nivel internacional se fueron incorporaron paulatinamente tecnologías como calculadoras gráficas, hojas de cálculo [5] y softwares de computadora [6]. Entre ellos la GeoGebra que al usarse como recurso metodológico en matemáticas mejora el aprendizaje [7] y el pensamiento abstracto. Por ejemplo, se lograron mejoras en la comprensión del concepto de áreas bajo la curva [8][9], además de estimular el razonamiento de tipo lógico y la capacidad de resolver situaciones problemáticas integrando teoría, práctica, experimentación y reflexión.

A nivel nacional, la enseñanza de PL empezó con la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) una propuesta de secuencia de actividades convencionales [10], incluso en la enseñanza superior se desarrollaron actividades didácticas sin incorporar herramientas tecnológicas [11]. A partir del 2013, con la incorporación de la GeoGebra, como estrategia didáctica, se ha estimulado el aprendizaje activo y comprensión de conceptos matemáticos, impulsando la calidad educativa que se vincula con el Objetivo de Desarrollo Sostenible 4 (educación de calidad).

Este artículo se basa en el uso del software GeoGebra en la enseñanza de PL mostrando sus beneficios al mejorar los aprendizajes a nivel conceptual, procedimental y actitudinal [12]. Se comparte resultados sobre el aprendizaje conceptual al desarrollar capacidades de identificar, organizar y relacionar ideas [13]. A nivel procedimental de habilidades prácticas al desarrollar capacidades de aplicar conocimientos en situaciones concretas y resolver problemas [14]. Finalmente, en el aprendizaje actitudinal al desarrollar actitudes positivas hacia el curso en forma colaborativa lo que favorece el crecimiento personal y académico de los estudiantes [15].

Diversos estudios sobre la aplicación de GeoGebra señalan que favorece el aprendizaje autónomo y los conocimientos básicos de comandos [16], beneficia pensamientos contextualizados de orden superior [17], [18]. Además, favorece el desarrollo de entornos interactivos y colaborativos de aprendizaje [19]. Asimismo, su aplicación mejora la comprensión significativa de problemas geométricos [20], promoviendo la participación de los estudiantes [21]. Finalmente, mejora la valoración, disposición y percepción de

los estudiantes hacia el desarrollo del curso de matemáticas [22]. En general el uso de GeoGebra puede mejorar el aprendizaje de PL en una institución pública urbana.

II. Metodología

La presente investigación corresponde a un estudio de tipo aplicado, con un enfoque cuantitativo y de nivel explicativo [23], el objetivo central fue determinar los efectos del uso de GeoGebra en las diferentes dimensiones del aprendizaje en estudiantes del nivel secundario aplicado en la enseñanza de PL.

El diseño metodológico de la investigación fue cuasi experimental con dos grupos no aleatorizados denominados: experimental y control. Para ambos grupos se elaboró un pretest y un postest [24], previo a ello se hizo un ensayo de prueba en otra institución de la zona que presentaba las mismas características de la realidad analizada en la investigación, luego se aplicó en el colegio de la investigación, los resultados salieron casi parecidos. El esquema del diseño de la investigación fue el siguiente:

GE: O1 X O2
GC: O3 O4
En donde:
GE: Grupo experimental
GC: Grupo control
O1: Pretest de entrada al grupo experimental
O2: Postest de salida al grupo experimental
O3: Pretest de entrada del grupo control
O4: Postest de salida del grupo control
X: Aplicación del programa de software GeoGebra y las diez actividades diseñadas.

Las variables independientes fueron el software GeoGebra y las diez actividades diseñadas, mientras que la variable dependiente fue el rendimiento escolar en PL, operacionalizados en los tipos de rendimiento escolar de aprendizaje en las dimensiones conceptual, procedimental y actitudinal siguiendo los indicadores de la Tabla I.

Se aplicó GeoGebra en estudiantes nativos digitales quienes pueden manipular, conjeturar, esbozar y plantear soluciones en PL al usar este software mientras construyen el aprendizaje autónomo y conocimientos básicos de comandos, así como pensamientos contextualizados de orden superior. Además, crean un entorno interactivo y colaborativo de aprendizaje mejorando la comprensión significativa de problemas geométricos, promoviendo una participación más activa de los estudiantes y mejorando la percepción y aprendizaje de los estudiantes hacia las matemáticas [16]. [17]. [18]. [19]. [20], [21] y [22].

La población y la muestra fueron estudiantes del quinto grado de educación secundaria de la Institución educativa John F. Kennedy de Salamanca Monterrico, pertenecientes a la UGEL 06, del distrito de Ate-Vitarte en Lima-Perú. Los estudiantes fueron de las secciones A y B, cuyas edades estaban comprendidas entre los 16 y 18 años. El grupo experimental estuvo conformado por veintidós estudiantes y el grupo control por veintitrés.

TABLA I
OPERACIONALIZACIÓN DE LA VARIABLE DEPENDIENTE

Tipo de Aprendizaje	Indicador
Conceptual	• Identifica la función objetivo. • Determina el tipo de optimización.
Procedimental	• Determina las variables de decisión • Usa una plantilla de solución. • Determina la función objetivo. • Determina y grafica las restricciones. • Gráfica las restricciones usando lápiz y papel y GeoGebra. • Determina la región factible. • Determina los vértices. • Optimiza los vértices en la función objetivo. • Determina la respuesta a optimizar.
Actitudinal	• Fácilmente resuelve problemas. • Fácilmente diferencia ecuaciones de inecuaciones lineales. • Fácilmente grafica ecuaciones e inecuaciones lineales. • Fácilmente gráfica sistema de ecuaciones e inecuaciones lineales. • Fácilmente halla la función objetivo. • Fácilmente halla la región factible • Fácilmente halla la optimización

Como criterio de inclusión, se trabajó con los dos grupos completos de estudiantes tanto para el grupo experimental como para el grupo de control. Como criterio de Exclusión no se consideró los resultados de un estudiante del grupo de control debido a su inasistencia durante las dos evaluaciones efectuadas. Por lo tanto, la muestra final estuvo constituida por cuarenta y cuatro estudiantes.

Se aplicaron una prueba de entrada o pretest y una prueba de salida o postest. Para el pretest y el postest se elaboraron 30 preguntas, de las cuales diez preguntas fueron sobre contenidos de aprendizaje procedimental, diez preguntas de aprendizaje conceptuales con respuestas múltiples calificadas de manera dicotómica y diez preguntas sobre contenidos de aprendizaje actitudinal [25] con respuestas tipo Likert. Adicionalmente, se aplicó una ficha de observación de clase y una entrevista no estructurada con las tutoras de los estudiantes y con la profesora de matemática.

Respecto a la validez y confiabilidad del contenido del instrumento, para las pruebas de pretest y postest se contó con la participación de seis jueces o expertos que fueron seleccionados considerando criterios de formación académica, experiencia profesional, trayectoria investigativa y conocimiento relacionado con la variable objeto de estudio y con la construcción y evaluación de instrumentos de medición. El número de expertos resultó compatible con la aplicación del coeficiente V de Aiken y sus votos fueron unánimes. De este modo, la validez de contenido se estableció mediante la integración de evidencia cuantitativa, representada por la V de Aiken y evidencia cualitativa derivada de las recomendaciones de los expertos [26].

La confiabilidad del pretest y el postest se midió a través de la prueba Kuder Richardson (KR 20). El pretest y el postest presentaron respuestas dicotómicas es decir que hubo respuestas correctas o incorrectas o bien respuestas buenas o malas asignándoles el valor de uno o cero. Los resultados de la prueba KR 20 se aplicaron solo para las veinte respuestas que indicaban el aprendizaje conceptual y procedimental y la prueba Alfa de Cronbach se empleó para las diez respuestas de aprendizajes de actitudinales de tipo Likert. El análisis de las pruebas fue realizado utilizando el programa SPSS v.22.0.

Se diseñaron, validaron y aplicaron diez fichas de actividades que entrelazan conceptos elementales de PL con el conocimiento y uso paulatino de comandos de GeoGebra. Estas fichas fueron aplicadas desde el mes de octubre a noviembre del 2017, con una duración promedio de 2 horas pedagógicas en cada ficha en cada sección de quinto de secundaria siendo una hora pedagógica igual a 45 minutos.

En el grupo Control, los procedimientos y el análisis de datos se empleó solo plumón, pizarra acrílica, lápiz y papel, mientras que en el grupo Experimental la intervención se desarrolló mediante el uso del software GeoGebra y las diez fichas propuestas. Una vez concluido el estudio se tomó a ambos grupos el postest el 15 de diciembre del 2017.

Los resultados del pretest y postest fueron calificados con escala vigesimal de manera que los estudiantes conocieran el nivel de logro obtenido mientras que para el análisis estadístico se empleó una escala binaria, excepto en los contenidos actitudinales que fueron evaluados con la escala Likert. En el análisis de los resultados del pretest se empleó la prueba Kolmogorov–Smirnov, con la finalidad de determinar si los grupos control y experimental eran homogéneos.

III. Resultados

La confiabilidad de las pruebas de pretest y postest fue calificada como Muy buena a Excelente en base al criterio de contenido por el juicio de expertos para todos los rendimientos de aprendizaje en PL.

La confiabilidad de los instrumentos elaborados se midió con la prueba alfa de Cronbach para las respuestas tipo Likert. Estos resultados fueron: Alfa de Cronbach = 0.88 Muy bueno, aplicado en el colegio piloto el 21 de abril del 2017. En el colegio de la investigación el grupo experimental en el pretest tuvo un Alfa de Cronbach= 0.82, Muy Bueno, el 28 de junio 2017. Finalmente, en este colegio el valor del Alfa de Cronbach= 0.91 fue Excelente en el postest del 15 de diciembre 2017.

La confiabilidad de los instrumentos fue medida a través de la prueba Kuder Richardson (KR20) para las diez preguntas conceptuales y las diez preguntas procedimentales, los resultados fueron los siguientes: KR 20 = 0.71 Muy Bueno, aplicado en el colegio piloto el 21 de abril 2017; el pretest aplicado en el colegio de la investigación el grupo experimental obtuvo un KR20 = 0.8 Muy Bueno, el 28 de junio 2017; finalmente se obtuvo un KR20 = 0.8 Muy Bueno, en el grupo experimental del colegio de la investigación el 15 de diciembre 2017.

Los resultados de la prueba Z Kolmogórov-Smirnov mostraron valores que no son significativos, ver Tabla II. La distribución de datos del pretest se aproximó a una distribución normal concluyendo que ambos grupos eran homogéneos, por lo cual se eligió al azar al grupo experimental y al grupo de control.

TABLA II
PRUEBA Z DEL PRETEST, COMPARACIÓN DE MEDIAS (M) Y DESVIACIÓN ESTÁNDAR (DE) DE LOS APRENDIZAJES CONCEPTUAL, PROCEDIMENTAL Y ACTITUDINAL.

Variables	Grupos				Z	Sig.
	Experimental N= 22		Control N= 23			
	M	DE	M	DE		
Ap. C.	6,00	2,04	5,26	2,33	1,13	0,267
Ap. P.	5,04	2,59	5,47	2,10	0,62	0,541
Ap. A	29,10	5,70	31,30	6,92	1,13	0,266
Total	11,04	4,33	10,73	3,82	0,25	0,803

Nota. *p <0,05 **p<,01 *** p <0,001, N= 45

La prueba Z mostró diferencias significativas entre el grupo experimental y el control con un puntaje de 4,65 con p <0,001, ver Tabla III. El grupo Experimental obtuvo una media de 16,0 sobre el grupo de control con una media de 11,56.

En el postest para los tipos de aprendizaje se observa diferencias significativas en los grupos Experimental y Control con un puntaje zeta; Z = 2,53 y un nivel de significancia de p < 0,05, ver Tabla IV.

TABLA III
PRUEBA Z DEL POSTEST CON EL GRUPO EXPERIMENTAL Y CONTROL, MEDIAS (M) Y DESVIACIÓN ESTÁNDAR (DE)

Aprendizajes	Grupos				Z	Sig.
	Experimental N= 22		Control N= 23			
	M	DE	M	DE		
Total	16,0	2,58	11,56	3,69	4,65	0,000*

Nota. *p <0,05 N= 45

TABLA IV
PRUEBA Z DE COMPARACIÓN DE MEDIAS DE LOS PUNTAJES DEL CONTENIDO CONCEPTUAL, PROCEDIMENTAL Y ACTITUDINAL POR GRUPO DE ESTUDIO EN EL POSTEST. M=MEDIA, DE=DESVIACIÓN ESTÁNDAR

Variable	Grupos				Z	Sig.
	Experimental N= 22		Control N= 23			
	M	DE	M	DE		
Ap. C.	7,45	1,47	6,04	2,18	2,53	0,015*
Ap. P.	8,54	1,56	5,52	2,06	5,52	0,000***
Ap. A.	33,80	8,58	27,30	6,67	2,79	0,008**

Nota *p <0,05 **p<0,01 *** p < 0,001. N= 45

En el aprendizaje conceptual el grupo Experimental presenta una media M = 7,45 mucho mayor que el grupo de Control con media M= 6,04 y un nivel de significancia de p <0,05.

Respecto al aprendizaje procedimental el grupo Experimental obtuvo una media de M= 8,54 frente al grupo de Control que tuvo una media M= 5,52 con una diferencia estadísticamente significativa de Z = 5,52 y con un nivel de significancia de p < 0,001.

Finalmente, respecto al aprendizaje actitudinal el grupo experimental obtuvo una media M= 33,8 frente al grupo de control cuya media fue de M= 27,30 con una diferencia estadísticamente significativas de Z = 2,79 y con un nivel de significancia de p < 0,01.

IV. Discusión

Los resultados obtenidos evidencian que la aplicación de GeoGebra, acompañada de una secuencia de diez fichas de aprendizaje, produjo mejoras significativas en el aprendizaje de la PL. En el postest, el grupo experimental alcanzó una media global de 16,00, mientras que el grupo control obtuvo 11,56, con una diferencia estadísticamente significativa (Z = 4,65; p < 0,001).

Este resultado adquiere mayor consistencia al considerar que, antes de la intervención, ambos grupos presentaban condiciones iniciales semejantes, pues no se encontraron diferencias significativas en el pretest (p = 0,803). Por tanto, la mejora observada puede asociarse razonablemente con la estrategia didáctica implementada y no únicamente con diferencias previas entre los estudiantes.

En el aprendizaje conceptual, el grupo experimental obtuvo una media de 7,45, superior a la del grupo control, que alcanzó 6,04 (Z = 2,53; p = 0,015). Este hallazgo sugiere que GeoGebra facilitó la comprensión de conceptos como función objetivo, restricciones, región factible y solución óptima. La posibilidad de representar y modificar gráficamente estos elementos permitió que los estudiantes establecieran relaciones entre expresiones algebraicas y representaciones visuales, en lugar de limitarse a ejecutar procedimientos mecánicos.

Este resultado coincide con lo señalado en la referencia [4], respecto a que la incorporación de GeoGebra favorece la comprensión de contenidos matemáticos mediante ambientes visuales e interactivos. Asimismo, [7] señala que este software permite modelar problemas y observar dinámicamente los cambios producidos en sus representaciones. Aunque en la Ref. [8] estudiaron la comprensión de la integral definida, sus resultados también muestran que la manipulación gráfica contribuye a construir conceptos abstractos. En el presente estudio, este principio se trasladó al campo de la PL, especialmente en la identificación de regiones factibles, vértices y valores óptimos.

Desde una perspectiva teórica, estos resultados pueden interpretarse mediante el aprendizaje significativo, pues el estudiante relaciona conocimientos previos, como ecuaciones, inecuaciones y plano cartesiano, con nuevos contenidos de optimización. GeoGebra funciona como un mediador entre la expresión simbólica y su representación gráfica, lo que facilita que los nuevos conocimientos se incorporen de manera comprensible y no solamente memorística. Esta interpretación también es coherente con [9], quien señala que el uso de GeoGebra favorece la construcción mental de conceptos abstractos y una mayor implicación del estudiante en las actividades matemáticas.

La diferencia más notable se observó en el aprendizaje procedimental. El grupo experimental alcanzó una media de 8,54 frente a 5,52 del grupo control, con una diferencia altamente significativa (Z = 5,52; p < 0,001). Este resultado indica que la intervención no solo mejoró la comprensión de los conceptos, sino también la capacidad para formular variables de decisión, establecer la función objetivo, representar restricciones, determinar la región factible, identificar vértices y evaluar la solución óptima.

La magnitud de esta mejora puede explicarse por la organización progresiva de las diez fichas de aprendizaje. Las actividades no se limitaron a presentar los comandos del software, sino que articularon cada herramienta tecnológica con una etapa concreta de la resolución de problemas. De este modo, los estudiantes pudieron comprobar sus procedimientos, corregir errores de representación y visualizar inmediatamente las consecuencias de sus decisiones. Este hallazgo coincide con lo indicado por la Ref. [19], quienes destacan que la integración de modelación, visualización y programación en GeoGebra favorece la enseñanza de contenidos STEM.

Los resultados también se relacionan con [17]. quienes encontraron que GeoGebra, integrado con estrategias de razonamiento inductivo, favorece el desarrollo de habilidades de pensamiento de orden superior. En la PL, los estudiantes no solo deben realizar cálculos, sino interpretar condiciones, comparar alternativas y justificar una decisión óptima. Por ello, la mejora procedimental observada puede entenderse como resultado de una participación más activa en el análisis y la resolución de situaciones problemáticas.

La propuesta guarda, además, relación con la Teoría de Situaciones Didácticas [10] empleada para abordar sistemas de inecuaciones y problemas de PL, donde las actividades se organizaron a partir de situaciones problemáticas y conflictos cognitivos mediante recursos tradicionales. En esta investigación se conserva el valor de la secuenciación didáctica, pero se incorpora GeoGebra como medio para experimentar, contrastar resultados y validar gráficamente las soluciones. Así, el aporte del estudio no reside únicamente en utilizar un software, sino en integrarlo dentro de una propuesta organizada que conduce progresivamente al estudiante desde conocimientos elementales hasta procesos de optimización.

En la dimensión actitudinal, el grupo experimental obtuvo una media de 33,80, mientras que el grupo control alcanzó 27,30, con diferencias significativas (Z = 2,79; p = 0,008). Este resultado muestra que el uso de GeoGebra también se relacionó con una mejor disposición hacia el aprendizaje de la PL. La interacción con representaciones gráficas, la posibilidad de verificar respuestas y el trabajo mediante actividades secuenciadas pudieron reducir la percepción de dificultad que suelen generar los contenidos de optimización.

Estos hallazgos concuerdan con [21]. quienes reportaron mejoras en el rendimiento, la participación y la motivación de estudiantes de educación secundaria al utilizar GeoGebra. Del mismo modo, con [22] quienes sostienen que este recurso mejora la valoración y percepción de los estudiantes hacia las matemáticas. En consecuencia, los resultados actitudinales obtenidos no deben interpretarse como un efecto aislado, sino como parte de una experiencia en la cual el estudiante observa sus avances, participa activamente y recibe una respuesta inmediata de las representaciones construidas.

La interpretación de estos resultados también puede sustentarse en el enfoque sociocultural de la referencia [27]. Desde esta perspectiva, el aprendizaje se desarrolla mediante la interacción entre los estudiantes, el docente y los recursos culturales disponibles. En este estudio, GeoGebra actuó como una herramienta de mediación, mientras que las fichas orientaron el proceso de resolución y la interacción entre compañeros. El software, por sí solo, no explica la mejora; su efecto se encuentra vinculado con la orientación docente, la secuencia de las actividades y la participación de los estudiantes durante la intervención.

Esta idea resulta relevante porque evita atribuir todos los cambios exclusivamente a la tecnología. En la Ref. [18] señalan que GeoGebra puede favorecer el aprendizaje autónomo cuando se integra dentro de una organización pedagógica definida. En el presente estudio, los estudiantes avanzaron progresivamente desde el reconocimiento de comandos básicos hasta la resolución de problemas de PL. Por ello, la autonomía observada no significó ausencia del docente, sino una reducción gradual del apoyo conforme los estudiantes adquirían mayor dominio del procedimiento.

Los resultados también presentan correspondencia con [5] y [6], quienes propusieron incorporar recursos gráficos y tecnológicos para superar las limitaciones de una enseñanza basada exclusivamente en lápiz y papel. No obstante, los hallazgos de este estudio permiten precisar que la representación gráfica es más efectiva cuando se integra con actividades orientadas por objetivos de aprendizaje. El grupo control también trabajó contenidos de PL, pero el grupo experimental contó con la posibilidad de representar, explorar y comprobar dinámicamente los problemas planteados.

Por otra parte, la investigación [28] centrada en realidad aumentada y geometría espacial, coincide en que los recursos visuales e interactivos favorecen la comprensión, la motivación y el aprendizaje activo. Sin embargo, la relación entre ambos estudios debe establecerse con cautela, debido a que utilizan tecnologías y contenidos matemáticos diferentes. La coincidencia se encuentra principalmente en el papel de las representaciones digitales como apoyo para transformar objetos abstractos en experiencias visuales manipulables.

En conjunto, la triangulación entre los resultados cuantitativos, los antecedentes revisados y los fundamentos teóricos permite sostener que el efecto de GeoGebra estuvo asociado con tres mecanismos principales. Primero, la visualización dinámica facilitó la comprensión conceptual; segundo, la secuencia de actividades favoreció la ejecución y verificación de procedimientos; y tercero, la interacción con el software, los compañeros y el docente contribuyó a mejorar la disposición hacia el aprendizaje. Por tanto, el principal aporte del estudio radica en demostrar que la integración pedagógica de GeoGebra puede fortalecer de manera simultánea las dimensiones conceptual, procedimental y actitudinal del aprendizaje de la PL.

A pesar de los resultados favorables, estos deben interpretarse considerando algunas limitaciones. La investigación se realizó solamente con 44 estudiantes pertenecientes a una sola institución educativa pública y con grupos previamente conformados. En consecuencia, los hallazgos no pueden generalizarse automáticamente a todos los contextos escolares. Asimismo, sería pertinente que futuras investigaciones incluyeran muestras más amplias, periodos de intervención más prolongados y evaluadores de seguimiento para determinar si los aprendizajes se mantienen en el tiempo.

V. Conclusiones

La aplicación de GeoGebra, integrada mediante diez fichas de aprendizaje secuenciadas y validadas, produjo una mejora significativa en el aprendizaje de la PL en estudiantes de quinto grado de educación secundaria. El grupo experimental alcanzó en el postest una media global de 16,00, superior a la obtenida por el grupo control, que registró una media de 11,56, con una diferencia estadísticamente significativa ($Z = 4,65$; $p < 0,001$).

En la dimensión conceptual, los estudiantes que trabajaron con GeoGebra mostrando una mayor comprensión de la función objetivo, las restricciones, la región factible y la solución óptima. Esta mejora se reflejó en la diferencia encontrada entre el grupo experimental y el grupo control ($Z = 2,53$; $p = 0,015$).

El mayor efecto de la intervención se presentó en el aprendizaje procedimental. El uso progresivo de las fichas permitió que los estudiantes desarrollaran con mayor precisión las etapas de formulación, representación gráfica y resolución de problemas de programación lineal, alcanzando una diferencia altamente significativa frente al grupo control ($Z = 5,52$; $p < 0,001$).

Asimismo, GeoGebra propició la dimensión actitudinal del aprendizaje, pues los estudiantes del grupo experimental mostraron una mejor disposición hacia la asignatura, mayor seguridad para resolver problemas y una participación más activa durante las actividades propuestas ($Z = 2,79$; $p = 0,008$).

En conjunto, los resultados permiten concluir que el efecto positivo no se explica únicamente por el uso del software, sino por su integración dentro de una estrategia didáctica organizada, progresiva y orientada a objetivos concretos de aprendizaje. La visualización dinámica, la retroalimentación inmediata y la interacción entre estudiantes, docente y recurso tecnológico contribuyeron al desarrollo articulado de los aprendizajes conceptual, procedimental y actitudinal.

Por tanto, GeoGebra constituye un recurso didáctico pertinente para la enseñanza de la PL en educación secundaria, especialmente cuando se emplea mediante actividades estructuradas que relacionan la representación algebraica, la

interpretación gráfica y la resolución de situaciones de optimización. No obstante, debido a que el estudio se realizó con una muestra de 44 estudiantes pertenecientes a una sola institución educativa, sus resultados deben interpretarse dentro de este contexto y ser contrastados en futuras investigaciones con muestras más amplias y periodos de intervención prolongados.

VI. RECOMENDACIONES

Se recomienda que los maestros del área de matemática de las instituciones educativas púbicas sean capacitados y actualizados en el uso del software GeoGebra a través de las aulas de innovación por sus pares más capacitados de las redes educativas, por el Ministerio de Educación a través de sus órganos internos y por instituciones públicas o privadas cuyos fines sean mejorar el aprendizaje de los estudiantes.

Replicar esta experiencia en otros centros educativos a fin de mejorar los resultados de aprendizaje de los estudiantes y con ello sus capacidades en el curso de matemática usando el software GeoGebra.

Aplicar las fichas elaboradas y validadas de actividades propuestas de PL a estudiantes universitarios que nunca llevaron este curso en la educación secundaria ya que al presentar de una manera fácil y didáctica este tema contribuimos sustancialmente para que puedan hacer suyos este conocimiento matemático.

Realizar pasantías entre docentes que hayan logrado resultados exitosos en la región para fortalecer notablemente los resultados de aprendizaje.

REFERENCIAS

[1] F E. Bravo Guerrero and T. G. Quezada Matute, "Uso de Tecnologías de la Información y Comunicación en el Bachillerato" RECUS Revista Electrónica Cooperación Universidad Sociedad, vol. 6, no. 1, pp. 19–27, 2021, doi:10.33936/recus. v6i1.2404

[2] N. G. Salguero Barba and C. P. García Salguero, "Aprendizaje colaborativo y uso de las TIC en la educación superior," Revista Latinoamericana de Ciencias Sociales y Humanidades, vol. 4, no. 6, p. 1584, 2023, https://doi.org/10.56712/latam.v4i6.1550.

[3] R. Ferreiro and A. J. DeNapoli, "Un concepto clave para aplicar exitosamente las tecnologías de la educación: los nuevos ambientes de aprendizaje.," Revista Panamericana de Pedagogía, vol. 8, no. 1, pp. 121–154, 2006.

[4] A. M. Nouhou, Integration of GeoGebra in Teaching and Learning of Mathematics in the Niger Republic Classrooms. 2022. doi: 10.1007/978-3-031-13927-7_13.

[5] S. M. de A. Paiva, "A programação linear no ensino Secundário," Universidade Portucalense Infante D. Henrique, 2008.

[6] M. S. de Lyra, "Uma proposta do ensino de programação linear no ensino médio," Universidade Federal de Goias, 2014.

[7] M. Hohenwarter, "GeoGebra-Didaktische materialien und Anwendungen fur den Mathematikunterricht," Universitat Salzburg, 2006.

[8] K. Dem and N. Dem, "Effectiveness of GeoGebra in Developing the Conceptual Understanding of Definite Integral at Gongzim Ugyen Dorji Central School, in Haa Bhutan," Asian Journal of Education and Social Studies, vol. 10, no. 4, pp. 60–65, 2020, https://doi.org/10.9734/ajess/2020/v10i430276

[9] O. M. Pantoja Chulde, "GeoGebra Software as A Guideline for Meaningful Learning of Mathematical Content for Ninth-Grade Students in Ecuador – A Secondary Publication," Scientific and Social Research, vol. 6, no. 2, pp. 153–161, 2024, doi:10.26689/ssr.v6i2.6250.

[10] C. R. Reaño Paredes, "Sistemas de inecuaciones lineales con dos incógnitas y problemas de programación lineal: una mirada desde la teoría de situaciones didácticas.," PUCP, Lima, 2011. Accessed: Jun 19, 2025. [Online]. Available: http://hdl.handle.ne.t/20500.12404/5877

[11] O. B. Moreno Sánchez, "Un estudio didáctico de los sistemas de inecuaciones lineales con dos variables y sus aplicaciones a la programación lineal en el Instituto Superior Tecnológico Público 'Simón Bolívar,'" PUCP, Lima, 2011. Accessed: Jun. 19, 2025. [Online]. Available: http://hdl.handle.net/20.500.12404/21405

[12] M. Prensky, "Enseñar a nativos digitales", 1ra Edicion. México: SM Ediciones, 2013

[13] L. Galván Pérez and J. Gutiérrez Pérez, "Los mapas conceptuales como instrumento de evaluación: Una experiencia de educación ambiental centrada en el estudio de ecosistemas acuáticos," Actualidades Investigativas en Educación, vol. 18, no. 1, 2018, doi: 10.15517/aie.v18i1.31840

[14] J. Domenech-Casal, J. Gasco, P. Royo, and S. Vilches, "Proyecto CRASH: enseñando cinemática y dinámica en el contexto del análisis pericial de accidentes," Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las ciencias, vol. 15, no. 2, p. 2103, 2018, doi: 10.25267/Rev

[15] J. C. Luna Santos, "El aprendizaje colaborativo en la enseñanza de la Matemática a nivel de pregrado," Delectus, vol. 4, no. 1, pp. 129–138, 2021, doi: 10.36996/delectus.v4i1.71.

[16] L. Solvang and J. Haglund, "How can GeoGebra support physics education in upper-secondary school - A review," Phys Educ, vol. 56, no. 5, pp. 0–13, 2021, doi: 10.1088/1361-6552/ac03fb.

[17] N. S. Misrom, M. S. Abdurrahman, A. H. Abdullah, S. Osman, M. H. Hamzah, and A. Fauzan, "Enhancing students' higher-order thinking skills (HOTS) through an inductive reasoning strategy using geogebra," International Journal of Emerging Technologies in Learning, vol. 15, no. 3, pp. 156–179, 2020, doi: 10.3991/ijet.v15i03.9839.

[18] R. Weinhandl, Z. Lavicza, M. Hohenwarter, and S. Schallert, "Enhancing Flipped Mathematics Education by Utilising GeoGebra To cite this article: Enhancing Flipped Mathematics Education by Utilising GeoGebra," International Journal of Education in Mathematics, Science and Technology, vol. 8, no. 1, pp. 1–15, 2020, https://doi.org/10.46328/ijemst.v8i1.832.

[19] R. Ziatdinov and J. R. Valles, "Synthesis of Modeling, Visualization, and Programming in GeoGebra as an Effective Approach for Teaching and Learning STEM Topics," 2022. doi: 10.3390/math10030398.

[20] N. Ngoc-Giang, H. Thi-Ngoc, and B. Thi-Khanh-Linh, "Discovery Teaching about Plane Geometric Extreme Problems with the Help of GeoGebra Software at Secondary School in Vietnam," Universal Journal of Educational Research, vol. 9, no. 6, pp. 1340–1352, 2021, doi: 10.13189/ujer.2021.090624.

[21] F. R. Pacheco Cedeño and U. C. Duran Pico, "GeoGebra como factor dinámico en los resultados de aprendizaje de matemática en décimo año de la Unidad Educativa Sebastián Muñoz.," MQRInvestigar, vol. 7, no. 2, pp. 397–420, 2023, https://doi.org/10.56048/MQR20225.7.2.2023.397-420.

[22] K. I. Ordoñez García, M. I. Molina Ortiz, and J. E. Ordoñez Garcia, "GeoGebra: una herramienta tecnológica para aprender matemáticas," Reciamuc, vol. 6, no. 1, pp. 182–192, 2022, https://doi.org/10.26820/reciamuc/6.(1).enero.2022.182-192.

[23] R. Hernández Sampieri, C. Fernández Collado, and M. del P. Batista Lucio, Metodología de la investigación, Sexta. México: Mac Graw Hill Interamericana Editores, 2014.

[24] R. Hernández Sampieri, C. Fernández Collado, and P. Baptista Lucio, Metodología de la Investigación, 6ta edicio. México: McGraw-Hill, 2014.

[25] M. Diaz Porcar, "Mejora de una unidad didáctica sobre programación lineal," Universitat Jaume, 2015.

[26] L. Escurra, "Cuantificación de la validez de contenidos por criterio de jueces," Revista de Psicología de la PUCP, vol. 6, no. 1–2, pp. 103–111, 1988, https://doi.org/10.18800/psico.198801-02.008.

[27] L. S. Vygotsky, Pensamiento y Lenguaje. Buenos aires, 1995.

[28] J. A. López Chica, J. P. Egas García, D. I. Villacis Montoya, and F. O. Vizuete Vizueta, "Aplicación de la realidad aumentada y aprendizaje de la geometría en el espacio para tercero de bachillerato de la unidad educativa el Empalme," Ciencia Latina, vol. 7, no. 1, pp. 9446–9462, 2023, doi: https://doi.org/10.37811/cl_rcm.v7i1.5140.