

Analysis of Forced Vibrations in Timoshenko Beams Using the Coupled Displacement Field Concept

Jamil Azaña-Margarito, BE Civil Engineering¹, Josue Zarate-Perez, BE Civil Engineering¹, And Eliseo Zarate-Perez, MSc in Civil Engineering¹

¹Universidad Privada del Norte (UPN), Peru, N00171595@upn.pe, N00169159@upn.pe, eliseo.zarate@upn.edu.pe

Abstract— *Modular construction is an excellent technique for achieving the rapid and safe development of facilities in light of the COVID-19 pandemic. Beams are fundamental to modular construction. However, owing to various environmental conditions, novel methods are required to collect the characteristics for conducting structural analysis of beams according to the required needs. In this study, the performance of the coupled displacement field method in beam analysis was evaluated. The expressions for the transverse displacement were derived using an allowable function of total rotation. The function was obtained using the finite-element approximation method based on undetermined coefficients. Thus, the equation of motion was derived using the principle of conservation of energy. The Newmark method and mode superposition technique were then used to solve the obtained equations in MATLAB. The results showed that the method used was suitable in applications that require the analysis of high-slenderness beams in modular constructions. In this method, strong vibrations were induced in the beam owing to its greater flexibility. The recommended method is less complex than other energy methods because the computational effort is halved. Therefore, this formulation can be applied to conduct the free vibration analysis of flexible structural members under various shears using Timoshenko beam models under various boundary conditions. Thus, the coupled displacement field method can be used to derive appropriate solutions to other complex problems, such as modular construction.*

Keywords— *Displacement-coupled field method, Timoshenko beams, nonlinear forced vibration, Newmark method, mode superposition method.*

Digital Object Identifier (DOI):
<http://dx.doi.org/10.18687/LEIRD2022.1.1.212>
ISBN: 978-628-95207-3-6 ISSN: 2414-6390

Análisis de Vibraciones Forzadas en Vigas Timoshenko Utilizando el Concepto de Campo de Desplazamiento Acoplado

Jamil Azaña-Margarito, BE Civil Engineering¹, Josue Zarate-Perez, BE Civil Engineering¹, And Eliseo Zarate-Perez, MSc in Civil Engineering¹

¹Universidad Privada del Norte (UPN), Peru, N00171595@upn.pe, N00169159@upn.pe, eliseo.zarate@upn.edu.pe

Resumen— A causa de la pandemia COVID-19, la construcción modular demostró ser una gran solución para desarrollar instalaciones de forma rápida y segura. En tal sentido, las vigas son elementos fundamentales para realizar esos tipos de construcción. Sin embargo, con distintas condiciones de entornos en construcciones modulares, se requieren de métodos novedosos que reúnan características para un análisis estructural de acuerdo con las necesidades requeridas. El tal sentido se evalúa el desempeño del método de campo de desplazamiento acoplado para el análisis de vigas. Las expresiones para el desplazamiento transversal se deducen a partir de una función admisible de rotación total que se propone mediante métodos de aproximación de funciones en elementos finitos, sobre la base de un coeficiente indeterminado. De esa forma, la ecuación de movimiento se deriva utilizando el principio de conservación de la energía y luego se emplea el método de Newmark y la técnica de superposición de modos en las ecuaciones obtenidas, utilizando MATLAB. Los resultados muestran que el método empleado es adecuado en contextos que se requiere análisis de las vigas de alta esbeltez, aplicados en construcciones modulares. De tal forma, que se inducen fuertes vibraciones en la viga debido a su mayor flexibilización. Por lo tanto, el método recomendado tiene menos complejidad en comparación con otros métodos de energía, debido a que los esfuerzos computacionales se reducen a la mitad. En tal sentido, esta formulación puede utilizarse para el estudio del análisis de vibraciones libres de miembros estructurales flexibles a cortantes distintos en vigas Timoshenko con distintas condiciones de contorno. De esa forma, el método de campo de desplazamiento acoplado se puede utilizar adecuadamente a otros problemas complejos, caso de la construcción modular.

Palabras clave— Método de campo de desplazamiento acoplado, vigas Timoshenko, vibración forzada no lineal, Método Newmark, método de superposición de modos.

I. INTRODUCCIÓN

La recuperación de la industria manufacturera dentro y posterior a la pandemia del COVID-19 es primordial teniendo en cuenta su impacto desde la perspectiva de la cadena de suministro [1]. Por ejemplo, la industria de la construcción se ha visto significativamente afectada por la pandemia de COVID-19, enfrentándose al desafío de las variaciones en sus procesos constructivos como un importante motor de crecimiento de la economía [2]. Por ejemplo, la construcción modular es un método innovador y sostenible y una tendencia notable en arquitectura, ingeniería y construcción [3].

Debido a la nueva constructibilidad y sostenibilidad, se han centrado importantes esfuerzos de investigación en los aspectos

de ingeniería de la construcción modular. Desde el brote mundial de la pandemia de COVID-19, la utilización del espacio ha cambiado radicalmente y se ha vuelto esencial repensar el diseño de edificios modulares [3]. Uno de los elementos estructurales básicos ampliamente utilizados para la construcción modular son las vigas. Sin embargo, la literatura actual carece de una comprensión integral de los requisitos desarrollados recientemente por los ocupantes y los cambios relevantes asociados con los desarrollos de ingeniería. Por ejemplo, las fuerzas externas que actúan sobre una viga pueden causar múltiples vibraciones. Y en algunos casos, las vibraciones pueden tener una gran amplitud debido a la no linealidad.

La evaluación de la vibración de alta amplitud de las vigas es importante para que ellas sean rentables, más livianas y aumenten la su rigidez; como requisitos básicos en las construcciones modulares. El estudio de la vibración forzada de elementos estructurales, especialmente en la región no lineal, siempre ha sido un área de interés para muchos investigadores. La no linealidad geométrica surge de las grandes amplitudes, que producen efectos de estiramiento, impartiendo así un efecto de rigidez a la viga.

Teniendo en cuenta el efecto de estiramiento, la respuesta dinámica surge como una función no lineal de la amplitud de excitación. Por ejemplo, a partir de los trabajos de Krieger [4], se reconocieron las formulaciones para vibraciones de gran amplitud de manera correcta, estas consideraron el tipo von Karman de no linealidad involucrada en la relación de desplazamiento de la deformación, evaluando la tensión axial, que se desarrolla debido a las grandes deformaciones con extremos axialmente inamovibles. De la misma forma, Mei & Umphai [5] utilizaron el método Galerkin multimodo para estudiar la respuesta de vibración forzada no lineal de una viga sujeta bajo fuerzas armónicas concentradas.

Por otro lado, Bennett & Eisley [6] estudiaron vibraciones no lineales de vigas bajo fuerzas armónicas concentradas utilizando formulaciones de elementos finitos. De la misma forma, el enfoque se alinea a lo propuesto por Azrar et al. [7] para el análisis de vibraciones forzadas de vigas con apoyos límite viscoelásticos. Por otro lado, Wang & Chou [8] realizaron el análisis dinámico no lineal de la viga de Timoshenko usando la teoría de la gran deflexión, considerando el efecto de acoplamiento de la fuerza de movimiento externa con el peso propio de la viga.

Fan et al. [9] desarrolló un método para responder a problemas de dinámica no lineal basado en el principio de Hamilton, el análisis espectral, el principio de Lagrange y el método de equilibrio armónico. Este enfoque reduce el problema dinámico a un conjunto de ecuaciones algebraicas no lineales que dependen de la matriz de masa y la rigidez clásica. Orhan [10] propuso un nuevo enfoque para describir las vibraciones libres y forzadas de vigas Timoshenko mediante una sola ecuación de diferencia. Venkateswara Rao et al. [11] habían empleado el método de campo de desplazamiento acoplado para acondicionar los campos de desplazamiento lateral y rotación total utilizando una ecuación que incluye las vibraciones libres de gran amplitud de vigas flexibles al cizallamiento. Además, Korabathina y Saheb Koppanati [12] emplearon el método de campo de desplazamiento acoplado para llevar a cabo el estudio de las vibraciones libres lineales de la viga de sección cónica de Timoshenko.

Posteriormente, el comportamiento vibracional libre de vigas uniformes de Timoshenko con cimentación Pasternak se estudió en Korabathina y Saheb Koppanati [12] utilizando el método de campo de desplazamiento acoplado. Con este método, la respuesta vibratoria libre de gran amplitud de placas rectangulares moderadamente gruesas simplemente soportadas se ha estudiado en Krishna Bhaskar y Meera Saheb [13]. Kwak [14] utilizó la teoría de la deformación por cizallamiento de primer orden y la no linealidad geométrica de von Karman para formular las ecuaciones de gobierno que describen la deformación acoplada como un sistema de ecuaciones diferenciales parciales no lineales.

Un sistema dinámico diferencial ordinario no lineal acoplado se obtiene del modelo continuo formulado utilizando el método de Galerkin. La ecuación de Lagrange se utiliza en Kim et al. [15] para crear la ecuación de movimiento en cada elemento y utilizando el método de equilibrio armónico incremental (IHB) se resuelve la ecuación de movimiento de vibración forzada no lineal. Aquí, a diferencia del método convencional de Rayleigh-Ritz, el método de campo de desplazamiento acoplado reduce el número '2n' de coeficientes indeterminados a un número 'n' de coeficientes indeterminados para la función admisible de n términos supuestos.

Por lo tanto, el objetivo de este trabajo es ampliar el novedoso método de campo de desplazamiento acoplado para estudiar la respuesta de vibración forzada de vigas Timoshenko con la participación masa concentrada en un punto x de la viga. El tiempo computacional involucrado en la determinación de la respuesta de vibración forzada utilizando el método de campo de desplazamiento acoplado es muy reducido en comparación con los otros métodos existentes. La metodología detalla los diferentes métodos y formulaciones empleados en la presente investigación.

II. METODOLOGÍA

Para el análisis de resultados se consideró el método de vibraciones forzadas de gran amplitud en vigas *funcionalmente graduadas* con participación de una masa concentrada en un

punto x . La Fig. 1 resume la metodología empleada mediante un diagrama de flujo para obtener el análisis de resultados. En tal forma, inicialmente se consideran las relaciones cinemáticas de la viga funcionalmente graduada basada en la teoría de Timoshenko; y la obtención de la ecuación de acoplamiento aplicando el principio de minimización de la energía potencial. Seguidamente, se asume una función admisible para la distribución de la rotación de la viga y la distribución de desplazamiento transversal. Estas se derivan para cada modo utilizando el método de desplazamiento acoplado para las condiciones de contorno de las vigas.

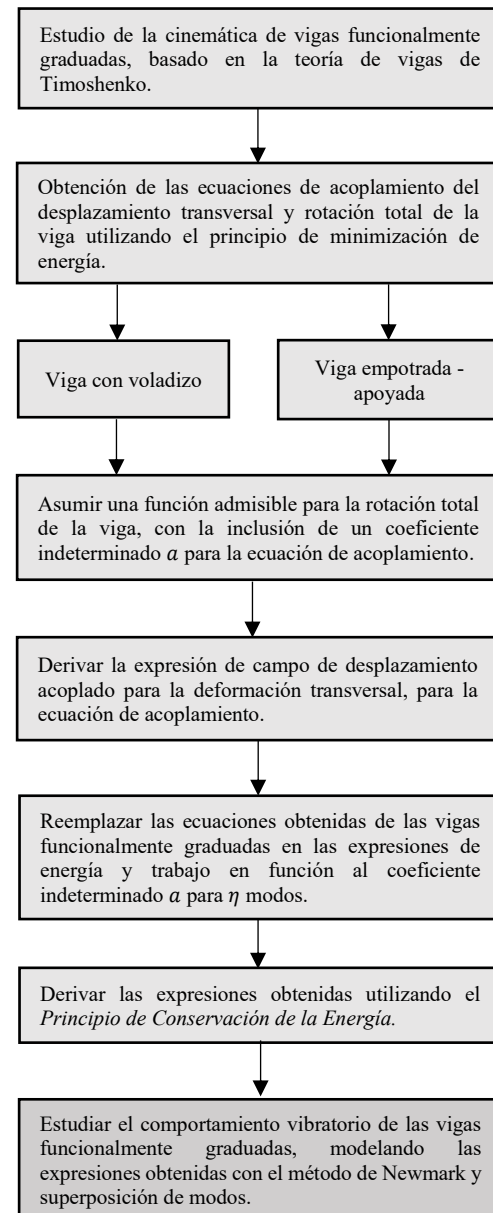


Fig. 1 Ilustración de secuencia metodológica.

Utilizando las expresiones obtenidas por el método de desplazamiento de campo acoplado, se ha calculado la deformación y energía cinética para cada modo de la viga. De la misma forma, se considera el trabajo realizado por la tensión y sus fuerzas externas actuantes. En tal sentido, las ecuaciones de movimiento vibratorio de la viga se derivan a partir del principio de conservación de la energía total. Finalmente, la ecuación de que describe el movimiento vibratorio forzado debido a una fuerza armónica de excitación se resuelve utilizando el método de Newmark para encontrar los coeficientes indeterminados en el desplazamiento transversal y rotacional de la viga en η modos. Además, se utiliza el método de superposición de modo, sumándose los valores en cada uno de ellos para obtener las respuestas dinámicas en una ubicación específica del desplazamiento transversal y la rotación total de la viga.

A. Campo de desplazamientos

La cinemática de una viga funcionalmente graduada, basada en la teoría de la viga de Timoshenko [16] y se puede describir como (Fig. 2):

$$\bar{u}(x, z) = z\theta(x) = z\left(\frac{dw}{dx} + \Phi\right) = z\left(\frac{dw}{dx} + \theta\right) \quad (1)$$

$$\bar{w}(x, z) = w(x) \quad (2)$$

Donde \bar{u} y \bar{w} son los desplazamientos axiales y transversales en un punto x de la viga, respectivamente; z es la distancia desde el eje neutro; w es el desplazamiento transversal; θ es la rotación total en cualquier punto del eje de la viga; Φ es la rotación de flexión basada en la teoría de Euler-Bernoulli; Finalmente, $\frac{dw}{dx}$ es la deformación por cizallamiento.

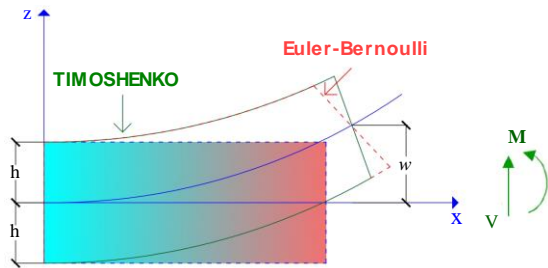


Fig. 2 Cinemática de flexión en vigas Timoshenko y Euler-Bernoulli. Adaptado de [16].

B. Campo de deformaciones

Para las deformaciones normales y angulares siguiendo el sistema de coordenadas, se sigue el trabajo de Venkateswara [11], como se muestra en la Fig. 2 y las Ecuaciones (3) y (4).

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} = z\left(\frac{d\theta}{dx}\right) \quad (3)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{dw}{dx} + \frac{du}{dx} = \left(\frac{dw}{dx} + \theta\right) \quad (4)$$

C. Ecuaciones de equilibrio

Las expresiones para la energía de deformación U y el trabajo realizado por la carga actuante W están dados por las Ecuaciones (5) y (6), tal y como se presenta en [11]:

$$U = \frac{EI}{2} \int_0^L \left(\frac{d\theta}{dx}\right)^2 dx + \frac{kGA}{2} \int_0^L \left(\frac{dw}{dx} + \theta\right)^2 dx \quad (5)$$

$$W_e = \int_0^L P(x)w(x) dx \quad (6)$$

Aplicando el principio de minimización de la energía potencial total se obtiene la ecuación (7), como se muestra en [12].

$$\delta(U - W) = 0 \quad (7)$$

A continuación, se obtienen las ecuaciones de equilibrio mediante las Ecuaciones (8) y (9), como se detalla en [17].

$$kGA \left(\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{d\theta}{dx}\right) + P = 0 \quad (8)$$

$$EI \frac{d^2\theta}{dx^2} - kGA \left(\frac{dw}{dx} + \theta\right) = 0 \quad (9)$$

Las ecuaciones de equilibrio deducidas son acopladas y pueden resolverse para la solución a un análisis estático en vigas deformables por cizallamiento. También, se nota que solo la Ecuación (9) no interviene la carga P . Por lo tanto, se utiliza esta expresión para acoplar el desplazamiento transversal con la rotación de la viga Timoshenko.

D. Método de campo de desplazamiento acoplado

En el método de campo de desplazamiento acoplado se asume una función admisible que describe la rotación total θ de la viga que satisface las condiciones de contorno, como se muestran en las Fig. 3 y 4.

D.1) Función admisible de rotación - Caso viga con voladizo



Fig. 3 Viga con voladizo con carga armónica en el extremo.

De la misma forma, la distribución total de la rotación θ a lo largo de la viga simplemente apoyada se asume según la Ecuación (10), esta función se propone teniendo en cuenta las

condiciones de borde de la viga y utilizando métodos y técnicas de parámetros indeterminados y elementos finitos siguiendo el planteamiento de Venkateswara [17].

$$\theta = a \frac{4\pi}{L} \sin \frac{4\pi x}{L} \quad (10)$$

Donde a es la amplitud transversal máxima no dimensional de la viga. Sustituyendo la función θ en la Ecuación (9), se obtiene el campo de desplazamiento acoplado transversal w . De la misma forma, la integración da lugar a la Ecuación (11), existe concordancia conforme a las constantes EI , k y GA con el planteamiento de Austin et al. [18], lo que nos indica que las funciones de rotación asumidas con correctas.

$$w = a\chi \quad (11)$$

Donde:

$$\chi = \frac{EI}{kGA} \times \left[\frac{2\pi a \sin \frac{4\pi x}{L}}{L} + \frac{16\pi^2 \cos \frac{4\pi x}{L}}{L^2} \right] \quad (12)$$

D.2) Función admisible de rotación - Caso viga empotrada – apoyada

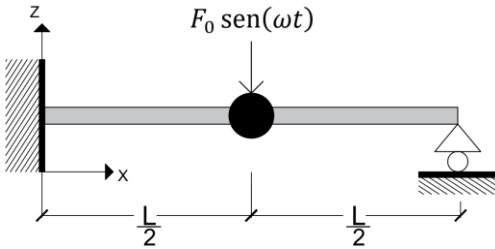


Fig. 4 Viga empotrada – apoyada con carga armónica en el centro de luz.

La distribución total de la rotación θ a lo largo de la viga doblemente empotrada se muestra en la Ecuación (13), esta función se propone teniendo en cuenta las condiciones de borde de la viga y utilizando métodos y técnicas de parámetros indeterminados y elementos finitos siguiendo el planteamiento de Venkateswara [17].

$$\theta = a \left[\frac{4\pi}{L} \sin \frac{4\pi x}{L} + \frac{2\pi}{L} \cos \frac{2\pi x}{L} \right] \quad (13)$$

Donde a es la amplitud transversal máxima no dimensional de la viga. Sustituyendo la función θ en la Ecuación (9), obtenemos el campo de desplazamiento acoplado transversal w , después de la integración se obtiene la Ecuación (14), existe concordancia conforme a las constantes EI , k y GA con el planteamiento de Austin et al. [18], lo que nos indica que las funciones de rotación asumidas con correctas.

$$w = a\chi \quad (14)$$

Donde:

$$\chi = \frac{EI}{kGA} \left[\frac{4\pi a \sin \frac{4\pi x}{L} + 4\pi^2 \sin \frac{2\pi x}{L}}{2L} + \frac{16\pi^2 \cos \frac{4\pi x}{L} - 4\pi^2 \sin \frac{2\pi x}{L}}{L^2} \right] \quad (15)$$

E. Principio de conservación de la energía

Conforme se avanza en la obtención de la expresión de campo acoplado para el desplazamiento transversal w para una función admisible θ , las vibraciones forzadas se pueden estudiar aplicando el principio de conservación de la energía en cualquier instante del tiempo, con amortiguamiento despreciable. El principio de conservación de la energía se establece mediante la Ecuación (16), como se muestra en [17].

$$U + T + W_1 = \text{Constante} \quad (16)$$

Donde U es la energía de deformación; T es la energía cinética; W_1 es el trabajo realizado por la tensión que desarrolla la viga debido a la deformación por la masa concentrada. Estas expresiones están dadas en las Ecuaciones (17), (18) y (19), según se presenta en [17].

$$U = \frac{EI}{2} \int_0^L \left(\frac{d\theta}{dx} \right)^2 dx + \frac{kGA}{2} \int_0^L \left(\frac{dw}{dx} + \theta \right)^2 dx, \quad (17)$$

$$T = \frac{\rho A}{2} \int_0^L \dot{w}^2 dx + \frac{\rho I}{2} \int_0^L \dot{\theta}^2 dx + \frac{M \dot{w}^2}{2} \Big|_{x=L/2}, \quad (18)$$

$$W_1 = \frac{T_a}{2} \int_0^L \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx, \quad (19)$$

Donde ρ es la densidad de masa, T_a es la tensión desarrollada en la viga debido a la deformación que causa la masa concentrada. La expresión T_a se obtiene de Woinowsky-Krieger en la Ecuación (20) como se detalla en [4].

$$T_a = \frac{EI}{2Lr^2} \int_0^L \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx \quad (20)$$

Donde r es el radio de giro; de la misma forma, la expresión T_a se deriva respecto al tipo de no linealidad de von Karman.

E.1) Caso viga con voladizo: Sustituyendo las expresiones asumidas de θ y w de las Ecuaciones (10) y (11) en las Ecuaciones (17), (18) y (19), las expresiones para U , T y W_1 están dados por las Ecuaciones (21), (22) y (23), siguiendo el proceso de formulación presentado en [17].

$$U = a^2 \frac{EIL}{2} \left(\frac{2\pi}{L} \right)^4 \left[1 + \left(\frac{16\pi}{L} \right)^2 \frac{EI}{kGA} \right], \quad (21)$$

$$T = \dot{a}^2 \frac{mL}{4} \left\{ \left[1 + \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \frac{EI}{kGA} \right] \left[1 + \frac{2M}{mL} \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} \right) \right] + \frac{I}{A} \left(\frac{\eta\pi}{L} \right)^2 \right\}, \quad (22)$$

$$W_1 = a^4 \frac{EIL}{132r^2} \left(\frac{16\pi}{L} \right)^4 \left[\left(\frac{16\pi}{L} \right)^3 + \left(\frac{2\pi}{L} \right)^2 \frac{EI}{kGA} \right] \quad (23)$$

Estas expresiones se sustituyen en la Ecuación (16) y simplificando, obtenemos la siguiente ecuación de balance energético:

$$\psi_1 \dot{a}^2 + \psi_2 a^2 + \psi_3 a^4 = \text{Constante} \quad (24)$$

E.2) Caso viga empotrada – apoyada: Sustituyendo las expresiones asumidas de θ y w de las Ecuaciones (13) y (14) en las Ecuaciones (17), (18) y (19), las expresiones para U , T y W_1 están dados por las Ecuaciones (25), (26) y (27), siguiendo el proceso de formulación presentado en [17].

$$U = a^2 \frac{EIL}{2} \left(\frac{2\pi}{L} \right)^4 \left[1 + \left(\frac{8\pi}{L^2} \right)^2 \frac{EI}{kGA} \right], \quad (25)$$

$$T = \dot{a}^2 \frac{mL}{8} \left\{ \left[1 + \left(\frac{16\pi}{L^2} \right)^2 \frac{EI}{kGA} \right] \left[\left(\frac{16\pi}{L^2} \right) + \frac{4M}{mL} \sin^2 \left(\frac{16\pi}{L^2} \right) \right] + \frac{I}{Ar^2} \left(\frac{4\eta\pi}{2L} \right)^3 \right\}, \quad (26)$$

$$W_1 = a^4 \frac{EIL}{48r^2} \left(\frac{16\pi}{L^2} \right)^4 \left[\left(\frac{4\pi}{L^2} \right)^2 + \left(\frac{4\pi}{L^2} \right)^3 \frac{EI}{kGA} \right]^2 \quad (27)$$

Estas expresiones se sustituyen en la Ecuación (16) y simplificando, obtenemos la siguiente ecuación de balance energético:

$$\phi_1 \dot{a}^2 + \phi_2 a^2 + \phi_3 a^4 = \text{Constante} \quad (28)$$

F. Vibraciones forzadas

En esta sección, se formula la vibración forzada de una viga Timoshenko con *voladizo*. El principio de conservación de la energía para η modos, bajo la influencia de la distribución dinámica de la fuerza transversal $f(x, t)$ lo podemos modelar como:

$$U + T + W_1 = W_e = \int_0^L f(x, t) w(x, t) dx \quad (29)$$

Donde $f(x, t)$ es la fuerza transversal dinámica concentrada sobre la viga, ubicada en $x = x_f$. La fuerza armónica $F(t) = F_0 \sin(\omega t)$ que acuta en $x = x_f$ se puede modelar como una fuerza distribuida con la popular función delta de Dirac $\delta(x)$ presentado en [17]:

$$f(x, t) = F_0 \sin(\omega t) \delta(x - x_f) \quad (30)$$

Sustituyendo las expresiones de energía de deformación, energía cinética y trabajo realizado por tensión desarrollada debido a la masa (U , T y W_1), obtenemos las siguientes expresiones:

F.1) Vibraciones forzadas en viga con voladizo

$$\psi_1 \dot{a}^2 + \psi_2 a^2 + \psi_3 a^4 = \int_0^L f(x, t) w(x, t) dx \quad (31)$$

Donde, aplicando una diferenciación respecto al tiempo, obtenemos la siguiente expresión presentada en [17]:

$$2\psi_1 \ddot{a} + 2\psi_2 a + 4\psi_3 a^3 = \int_0^L f(x, t) \chi(x) dx \quad (32)$$

F.2) Vibraciones forzadas en viga empotrada – apoyada:

$$\phi_1 \dot{a}^2 + \phi_2 a^2 + \phi_3 a^4 = \int_0^L f(x, t) w(x, t) dx \quad (33)$$

Donde, aplicando una diferenciación respecto al tiempo, obtenemos la siguiente expresión presentada en [17]:

$$2\phi_1 \ddot{a} + 2\phi_2 a + 4\phi_3 a^3 = \int_0^L f(x, t) \chi(x) dx \quad (34)$$

En las Ecuaciones (33) y (34), la expresión de fuerza generalizada para cada modo es la misma que la fuerza generalizada correspondiente a η modos proporcionada en Rao [11]. Aquí χ se le da los valores de las Ecuaciones (12) y (15) respectivamente y sustituyendo la expresión $f(x, t)$ con el uso de las propiedades de la función delta de Dirac, se obtienen las siguientes ecuaciones de movimiento para cada la viga con voladizo, y la viga empotrada – apoyada respectivamente bajo las condiciones de carga forzada:

$$2\psi_1 \ddot{a} + 2\psi_2 a + 4\psi_3 a^3 = F_0 \sin(\omega t) \chi(x_f) \quad (35)$$

$$2\phi_1 \ddot{a} + 2\phi_2 a + 4\phi_3 a^3 = F_0 \sin(\omega t) \chi(x_f) \quad (36)$$

Estas ecuaciones de movimiento se resuelven para los coeficientes indeterminados a para todos los modos $\eta = 1, 2, 3, \dots, \eta_{\max}$ en cada paso de tiempo ($\Delta_t = 0.001 \text{ seg}$) de 0 a 1 segundo utilizando método de Newmark [19]. η_{\max} se elige a base de que la solución converja al grado de precisión deseado. Utilizando el método de superposición de modos, las soluciones de ambas ecuaciones de movimiento en cada modo se sustituyen en la expresión de superposición para la obtención de la respuesta dinámica para el desplazamiento transversal w y la rotación total θ respectivamente en un tiempo t_0 y a una distancia x_0 . Entonces, siguiendo los criterios ($t = t_0$ y $x = x_0$) basados en el principio de la técnica de superposición,

se dan las siguientes expresiones para ambos tipos de vigas Timoshenko:

$$w(x_0, t_0) = \sum_{\eta=1}^n a_{\eta}(t_0) \chi_{\eta}(x_0) \quad (37)$$

$$\theta(x_0, t_0) = \sum_{\eta=1}^n a_{\eta}(t_0) \xi_{\eta}(x_0) \quad (38)$$

III. RESULTADOS Y DISCUSIONES

En esta sección, se discuten los resultados obtenidos de la presente formulación basada en el método de campo de desplazamiento acoplado. En primer lugar, se determinó la respuesta de desplazamiento de la vibración forzada sobre las vigas Timoshenko de longitud $L = 4.352 \text{ m}$, área de la sección transversal $A = 1.31 \times 10^{-3} \text{ m}^2$, momento de inercia $I = 5.71 \times 10^{-7} \text{ m}^4$, módulo de elasticidad $E = 2.02 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$, módulo de cizallamiento $G = 7.7 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$, densidad de masa $\rho = 15,267 \text{ kg/m}^3$ y factor de corrección de cizallamiento $k = 0.7$ que se somete a una carga puntual transversal de $F_0 = 1 \text{ N}$ que se desliza a una velocidad $V_f = 27.395 \text{ m/s}$ en $t = 0.5T_a$.

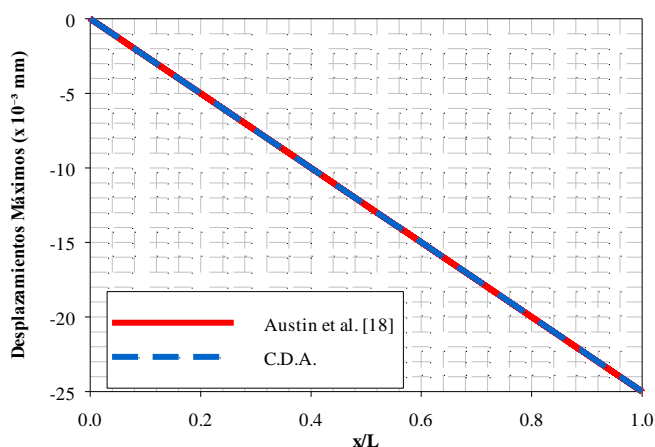


Fig. 5 Deformación de la viga con voladizo a lo largo de su longitud cuando se somete a una carga puntual transversal $F_0 = 1 \text{ N}$ moviéndose a una velocidad $V_f = 27.395 \text{ m/s}$ en $t = 0.5T_a$.

Donde T_a es el tiempo requerido por la carga en movimiento para viajar desde un extremo de la viga hasta el otro extremo, se determina utilizando la presente formulación basada en el método del campo de desplazamiento acoplado (CDA) y se valida con los resultados de Austin et al. [11]. Se observa que en la Fig. 4 y 5 los resultados obtenidos a partir de la presente formulación muestran una buena coincidencia con los resultados publicados. Esto confirma la precisión del código *MATLAB* desarrollado y de varios métodos empleados en la presente formulación para determinar la respuesta dinámica de vigas Timoshenko con condiciones de borde distintas, y con vibración forzada debido a una carga armónica aplicada en la masa que se encuentra a lo largo de sus longitudes.

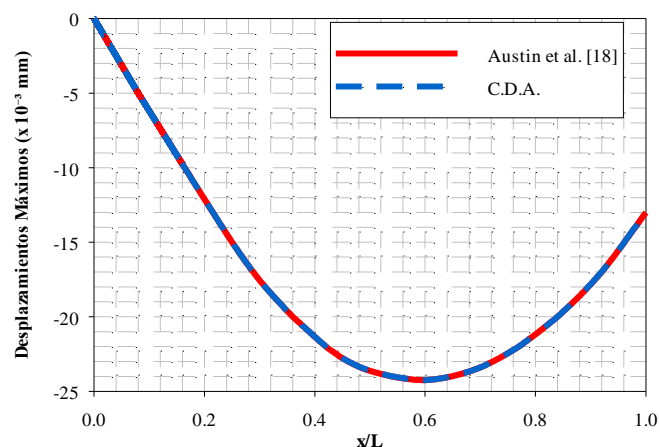


Fig. 6 Deformación de la viga empotrada – apoyada a lo largo de su longitud cuando se somete a una carga puntual transversal $F_0 = 1 \text{ N}$ moviéndose a una velocidad $V_f = 27.395 \text{ m/s}$ en $t = 0.5T_a$.

TABLA I
DESPLAZAMIENTOS MÁXIMOS (MM) LINEALES Y NO LINEALES PARA VIGA CON VOLADIZO CON DISTINTAS RELACIONES DE ESBELTEZ PARA DISTINTAS MAGNITUDES DE CARGA

Ítem	Magnitud de carga armónica (N)				
	200 - 400		600 - 800		1000
β	LINEAL	NO LINEAL	LINEAL	NO LINEAL	LINEAL
10	3.6465	3.6653	3.5596	3.6968	5.3569
	3.7831	3.7942	3.8354	3.9874	6.7541
25	3.9197	3.9231	4.1112	4.2780	8.1513
	14.0563	14.0520	14.3870	14.5686	19.5485
50	24.1929	24.1809	24.6628	24.8592	30.9457
	34.3295	34.3098	34.9386	35.1498	42.3429
75	44.4661	44.4387	45.2144	45.4404	53.7401
	54.6027	54.5676	55.4902	55.7310	65.1373
100	64.7393	64.6965	65.7660	66.0216	76.5345
	74.8759	74.8254	76.0418	76.3122	87.9317
200	105.2857	105.2121	106.8692	107.1840	122.1233
	215.4223	215.3410	217.1450	217.4746	233.5205
300	325.5589	325.4699	327.4208	327.7652	344.9177
	535.6955	535.5988	537.6966	538.0558	556.3149
400	666.1053	665.9855	668.5240	668.9276	690.5065
	706.2419	706.1144	718.7998	739.2182	761.9037

La variación de la respuesta dinámica lineal y no lineal es mayor en el caso de las vigas con mayor relación de esbeltez. Se estudia el efecto de las distintas relaciones de esbeltez para distintas magnitudes de carga armónica para comprender el comportamiento preciso de la viga. En la tabla 1 se presentan las respuestas de desplazamiento máximo en el centro de luz, tanto en la región lineal como en la no lineal, de la viga con voladizo de longitud $L = 3 \text{ m}$, $b = 0.16 \text{ m}$, con distintas relaciones de esbeltez y para distintas magnitudes de las cargas armónicas. La Fig. 6 y 7 muestra las variaciones de las respuestas lineales y no lineales del desplazamiento máximo en el volado de la viga con la magnitud de la carga armónica de longitud $L = 3 \text{ m}$, $b = 0.16 \text{ m}$. Para la mayor relación de esbeltez considerada, $\beta = 400$, la variación de la respuesta de desplazamiento lineal y no lineal en el volado de la viga con la

magnitud de la carga armónica se muestra en la Fig. 6 y 7 respectivamente.

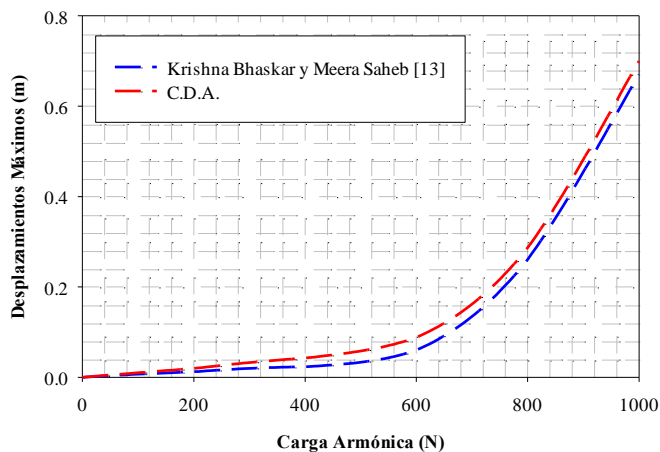


Fig. 7 Validación de desplazamientos lineales máximos para la viga con voladizo.

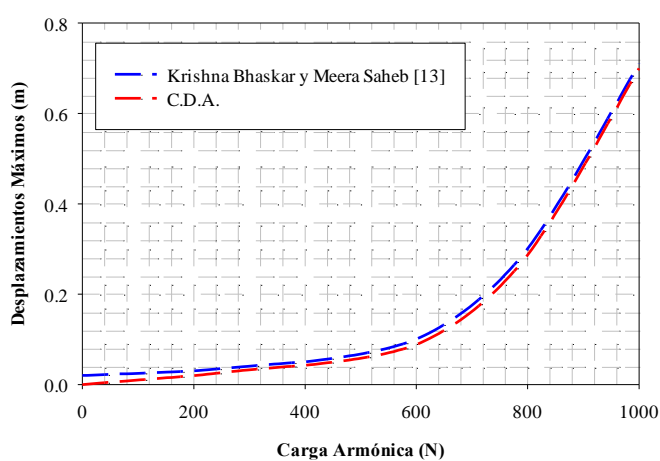


Fig. 8 Validación de desplazamientos no lineales máximos para la viga con voladizo.

TABLA II

DESPLAZAMIENTOS MÁXIMOS (MM) LINEALES Y NO LINEALES PARA VIGA EMPOTRADA – APOYADA CON DISTINTAS RELACIONES DE ESBELTEZ PARA DISTINTAS MAGNITUDES DE CARGA

Ítem	Magnitud de carga armónica (N)				
	200 - 400		600 - 800		1000
β	LINEAL	NO LINEAL	LINEAL	NO LINEAL	LINEAL
10	9.7621	9.7219	9.8621	9.8892	9.8954
	10.6354	10.6176	10.6478	10.6647	10.7123
25	10.8527	10.9863	10.8711	10.8802	10.8967
	11.1023	11.0591	11.1453	11.1132	11.2645
50	11.3584	11.4635	11.5576	11.5582	11.6013
	11.8400	11.9471	11.9833	11.9571	12.0632
75	12.2060	12.3396	12.3722	12.3357	12.4596
	12.5719	12.7320	12.7610	12.7144	12.8560
100	12.9379	13.1245	13.1499	13.0930	13.2524
	13.3038	13.5170	13.5387	13.4717	13.6488
200	14.4017	14.6944	14.7053	14.6076	14.8380
	14.7676	15.0869	15.0941	14.9863	15.2344
300	15.1336	15.4793	15.4830	15.3649	15.6308
	15.4995	15.8718	15.8718	15.7436	15.0272

400	15.8655	15.2643	15.2607	15.1222	15.4236
	15.2314	15.6567	15.6495	15.5009	15.8200

El comportamiento no lineal de la viga empotrada – apoyada se observa en las relaciones de esbeltez más altas en comparación con la viga con voladizo. Esto se debe a que, debido a sus apoyos, que detienen todos los grados de libertad, esta se vuelve más rígida en comparación con la viga con voladizo. Para la mayor relación de esbeltez considerada, $\beta = 400$, la variación de la respuesta de desplazamiento lineal y no lineal en centro de la viga con la magnitud de la carga armónica se muestra en la Fig. 8 y 9 respectivamente.

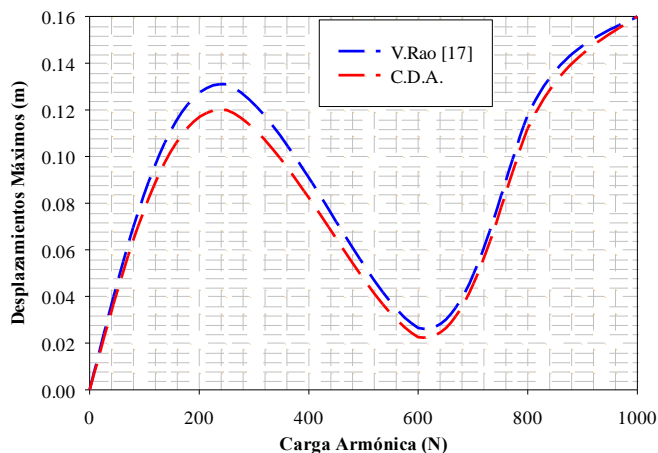


Fig. 9 Validación de desplazamientos lineales máximos para la viga empotrada – apoyada.

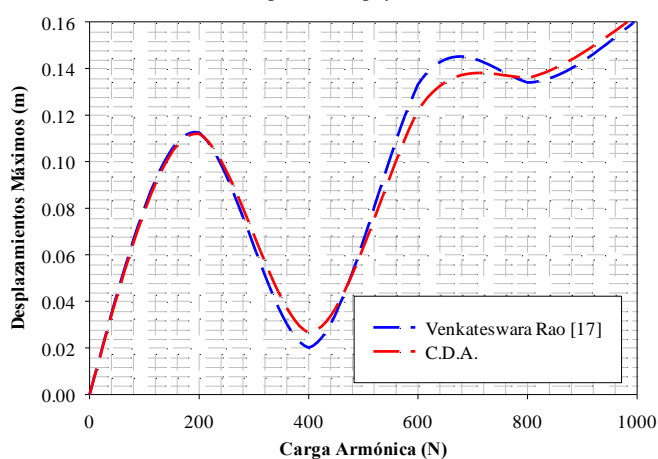


Fig. 10 Validación de desplazamientos no lineales máximos para la viga empotrada – apoyada.

En cambio, en el caso de las vigas de alta esbeltez, como se muestra en la Fig. 7 y 9 respectivamente, la respuesta lineal del desplazamiento en el centro de la viga y en el extremo de la otra, es mayor que la del caso no lineal (Fig. 10). La viga se vuelve más flexible con el aumento de la relación de esbeltez. A medida que la viga se vuelve más esbelta, se inducen fuertes vibraciones en la viga debido a su mayor flexibilidad, incluso en el caso lineal. Cuando se inducen vibraciones de gran amplitud en la viga, el estiramiento del plano neutro generado en la viga se opone a la deformación. Así, en el caso de las vigas

esbeltas, se observa que la respuesta de desplazamiento de la vibración forzada lineal es mayor que la respuesta de la vibración no lineal.

IV. CONCLUSIONES

En el presente trabajo se amplió el novedoso método de campo de desplazamiento acoplado para estudiar la respuesta de vibración forzada de vigas de Timoshenko con masa concentrada en un punto x para las vigas con distintas condiciones de contorno. El método de campo de desplazamiento acoplado se utiliza para obtener la expresión para el desplazamiento transversal de la viga con una función trigonométrica admisible asumida que tiene un solo coeficiente indeterminado para la rotación total de esta misma.

Las respuestas dinámicas de la viga de Timoshenko para las condiciones de vibración forzada de contorno presentadas, se determinaron mediante la aplicación del método Newmark para resolver la ecuación de movimiento que se obtiene del principio de conservación de la energía total, y mediante el uso de la técnica de superposición de modos explicado en [20] para diferentes vigas con condiciones de borde y forma distintos.

Para ambas condiciones de borde de la viga con voladizo y empotrada – apoyada, se observa que la respuesta de desplazamiento no lineal es mayor a la respuesta de desplazamiento lineal para las vigas cortas (menor relación de esbeltez (β), y se observa que la respuesta de desplazamiento lineal es mayor que la respuesta de desplazamiento no lineal para las vigas esbeltas. En el caso de la viga empotrada – apoyada, debido a sus condiciones de borde (apoyos), que hacen que la viga sea más resistente a la deformación, la deformación máxima observada es menor en comparación con las condiciones límite de la viga con voladizo.

Este método tiene menos complejidad en comparación con otros métodos de energía, ya que los esfuerzos computacionales se reducen a la mitad en comparación con el método de Rayleigh-Ritz como se plantea en [21]. Esta formulación también puede utilizarse para el estudio del análisis de vibraciones libres de miembros estructurales flexibles a cortantes distintos en vigas con distintas condiciones de contorno. El método de campo de desplazamiento acoplado se encuentra en proceso de extensión a otros problemas complejos como vigas de sección uniforme FG, vigas cónicas FG, placas, y otros elementos estructurales que cumplan distintas funciones en la construcción modular.

AGRADECIMIENTOS

El autor agradece a la plana docente de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Privada del Norte, y en especial al MSc. Ing. Miguel Raúl Guzmán Prado por su inestimable colaboración y persistente ayuda con el manejo del Método de los Elementos Finitos aplicado a la Ingeniería Estructural.

REFERENCIAS

[1] M. Cai and J. Luo, "Influence of COVID-19 on Manufacturing Industry and Corresponding Countermeasures from Supply Chain Perspective,"

Journal of Shanghai Jiaotong University (Science) 2020 25:4, vol. 25, no. 4, pp. 409–416, Aug. 2020, doi: 10.1007/S12204-020-2206-Z.

[2] A. Pamidimukkala and S. Kermanshachi, "Impact of Covid-19 on field and office workforce in construction industry," *Project Leadership and Society*, vol. 2, p. 100018, Dec. 2021, doi: 10.1016/J.PLAS.2021.100018.

[3] K. E. Hwang and I. Kim, "Post-COVID-19 modular building review on problem-seeking framework: function, form, economy, and time," *J Comput Des Eng*, vol. 9, no. 4, pp. 1369–1387, Aug. 2022, doi: 10.1093/JCDE/QWAC057.

[4] S. Woinowsky-Krieger, "The Effect of an Axial Force on the Vibration of Hinged Bars," *J Appl Mech*, vol. 17, no. 1, pp. 35–36, Mar. 1950, doi: 10.1115/1.4010053.

[5] C. Mei and K. Decha-Umphai, "A finite element method for non-linear forced vibrations of beams," *J Sound Vib*, vol. 102, no. 3, pp. 369–380, Oct. 1985, doi: 10.1016/S0022-460X(85)80148-6.

[6] J. A. Bennett and J. G. Easley, "A multiple degree-of-freedom approach to nonlinear beam vibrations," <https://doi.org/10.2514/3.5749>, vol. 8, no. 4, pp. 734–739, May 2012, doi: 10.2514/3.5749.

[7] L. Azrar, R. Benamar, and R. G. White, "SEMI-ANALYTICAL APPROACH TO THE NON-LINEAR DYNAMIC RESPONSE PROBLEM OF S-S AND C-C BEAMS AT LARGE VIBRATION AMPLITUDES PART I: GENERAL THEORY AND APPLICATION TO THE SINGLE MODE APPROACH TO FREE AND FORCED VIBRATION ANALYSIS," *J Sound Vib*, vol. 224, no. 2, pp. 183–207, Jul. 1999, doi: 10.1006/JSVI.1998.1893.

[8] R. T. Wang and T. H. Chou, "NON-LINEAR VIBRATION OF TIMOSHENKO BEAM DUE TO A MOVING FORCE AND THE WEIGHT OF BEAM," *J Sound Vib*, vol. 218, no. 1, pp. 117–131, Nov. 1998, doi: 10.1006/JSVI.1998.1353.

[9] Z. J. Fan, J. H. Lee, K. H. Kang, J. P. Capuñay and K. J. Kim, "THE FORCED VIBRATION OF A BEAM WITH VISCOELASTIC BOUNDARY SUPPORTS," *J Sound Vib*, vol. 210, no. 5, pp. 673–682, Mar. 1998, doi: 10.1006/JSVI.1997.1353.

[10] S. Orhan, "Analysis of free and forced vibration of a cracked cantilever beam," *NDT & E International*, vol. 40, no. 6, pp. 443–450, Sep. 2007, doi: 10.1016/J.NDTEINT.2007.01.010.

[11] G. Venkateswara Rao, K. Meera Saheb, and G. Ranga Janardhan, "Fundamental frequency for large amplitude vibrations of uniform Timoshenko beams with central point concentrated mass using coupled displacement field method," *J Sound Vib*, vol. 298, no. 1–2, pp. 221–232, Nov. 2006, doi: 10.1016/J.JSV.2006.05.014.

[12] R. Korabathina and M. S. Koppanati, "Linear free vibration analysis of tapered Timoshenko beams using coupled displacement field method," *Mathematical Models in Engineering*, vol. 2, no. 1, pp. 27–33, Jun. 2016, Accessed: Sep. 25, 2022. [Online]. Available: <https://www.extrica.com/article/16634>

[13] K. Krishna Bhaskar and K. Meera Saheb, "Large amplitude free vibrations of simply supported moderately thick rectangular plates using coupled displacement field method," *Journal of Vibroengineering*, vol. 18, no. 6, pp. 3451–3458, 2016, doi: 10.21595/jve.2016.16889.

[14] M. K. Kwak, "New admissible functions for the dynamic analysis of a slewing flexible beam," *J Sound Vib*, vol. 210, no. 5, pp. 581–592, Mar. 1998, doi: 10.1006/JSVI.1997.1354.

[15] K. Kim, K. Ri, C. Yun, C. Kim, and Y. Kim, "Analysis of the nonlinear forced vibration and stability of composite beams using the reduced-order model," *AIP Adv*, vol. 11, no. 3, p. 035220, Mar. 2021, doi: 10.1063/5.0039212.

[16] S. P. Timoshenko, J. N. Goodier, and A. Fuentes Pérez, "Teoría de la elasticidad", Accessed: Oct. 11, 2022. [Online]. Available: https://books.google.com/books/about/Teor%C3%ADa_de_la_elasticidad.html?hl=es&id=2oKNNQAACAAJ

[17] G. Venkateswara Rao, K. Kanaka Raju, and I. S. Raju, "Finite element formulation for the large amplitude free vibrations of beams and orthotropic circular plates," *Comput Struct*, vol. 6, no. 3, pp. 169–172, 1976, doi: 10.1016/0045-7949(76)90025-0.

[18] F. Austin and H. H. Pan, "Planar dynamics of free rotating flexible beams with tip masses," *AIAA Journal*, vol. 8, no. 4, pp. 726–733, 1970, doi: 10.2514/3.5748.

- [19] N. M. Newmark, “A Method of Computation for Structural Dynamics,” *Journal of the Engineering Mechanics Division*, vol. 85, no. 3, pp. 67–94, Jul. 1959, doi: 10.1061/JMCEA3.0000098.
- [20] M. R. Guzmán and R. F. G. López, “Modelamiento y simulación de sistemas con Simulink,” 2021, Accessed: Oct. 13, 2022. [Online]. Available: <https://ulibros.com/modelamiento-y-simulacion-de-sistemas-con-simulink-5k0nk.html>
- [21] S. S. Rao Professor, *Vibration of Continuous Systems*. [Online]. Available: <http://www.wiley.com/go/permissions>.