

Kinematic Modeling and Experimental Validation of Basic Upper-Limb Trajectories on a KUKA KR6 R900 SIXX

Cesar Ciriaco-Martinez, M. Sc¹ 

¹Universidad Tecnológica del Perú, Perú, c14110@utp.edu.pe

Abstract— This work presents the kinematic modeling, implementation, and experimental validation of basic upper-limb trajectories using the six-degree-of-freedom KUKA KR6 R900 SIXX industrial robot. For this purpose, a geometric model was developed using the Denavit–Hartenberg formulation, including forward and inverse kinematics for Cartesian trajectory generation. Three representative movements were implemented: elbow flexion, elbow extension, and forearm pronation–supination, selected for their biomechanical relevance in basic upper-limb mobility and their usefulness as reference trajectories for future assisted rehabilitation applications. Each trajectory was executed in 20 consecutive repetitions with the physical robot and validated through direct measurement using a mechanical dial indicator with a resolution of 0.01 mm, recording the linear error in the direction normal to the contact plane. The experimental results showed mean errors of 0.08 mm for flexion, 0.09 mm for extension, and 0.11 mm for pronation–supination, with approximate standard deviations of 0.014 mm, confirming high repeatability and submillimetric accuracy of the system. The findings validate the correct geometric implementation of the kinematic model and demonstrate that the KUKA KR6 R900 SIXX can reproduce basic Cartesian trajectories with spatial stability, although the validation performed corresponds to the kinematic behavior of the manipulator and not to a clinical evaluation with patients.

Keywords— KUKA KR6, Forward kinematics, Inverse kinematics, Experimental validation, Cartesian trajectories.

Modelado Cinemático y Validación Experimental de Trayectorias Básicas de Miembro Superior en el Robot Industrial KUKA KR6 R900 SIXX

Cesar Ciriaco-Martinez, M. Sc¹ 

¹Universidad Tecnológica del Perú, Perú, c14110@utp.edu.pe

Resumen– En este trabajo se presenta el modelado cinemático, implementación y validación experimental de trayectorias básicas de miembro superior utilizando el robot industrial KUKA KR6 R900 SIXX de seis grados de libertad. Para ello, se desarrolló un modelo geométrico mediante la formulación de Denavit–Hartenberg, incluyendo cinemática directa e inversa para la generación de trayectorias cartesianas. Se implementaron tres movimientos representativos: flexión de codo, extensión de codo y pronación–supinación de antebrazo, seleccionados por su relevancia biomecánica en la movilidad básica del miembro superior y su utilidad como trayectorias de referencia para aplicaciones futuras de rehabilitación asistida. Cada trayectoria fue ejecutada en 20 repeticiones consecutivas con el robot físico y validada mediante medición directa con reloj comparador mecánico de resolución 0.01 mm, registrando el error lineal en la dirección normal al plano de contacto. Los resultados experimentales mostraron errores medios de 0.08 mm para flexión, 0.09 mm para extensión y 0.11 mm para pronación–supinación, con desviaciones estándar aproximadas de 0.014 mm, lo que confirma una alta repetibilidad y precisión submilimétrica del sistema. Los hallazgos validan la correcta implementación geométrica del modelo cinemático y demuestran que el KUKA KR6 R900 SIXX puede reproducir trayectorias cartesianas básicas con estabilidad espacial, aunque la validación realizada corresponde al comportamiento cinemático del manipulador y no a una evaluación clínica con pacientes.

Palabras clave– KUKA KR6, Cinemática directa, Cinemática inversa, Validación experimental, Trayectorias cartesianas.

I. INTRODUCCIÓN

Los manipuladores robóticos industriales han sido ampliamente estudiados en el ámbito del modelado y control debido a su capacidad de ejecutar movimientos con alta precisión y repetibilidad [1]–[3]. En particular, los manipuladores seriales de seis grados de libertad permiten generar trayectorias espaciales complejas siempre que el modelo cinemático esté correctamente formulado.

La formulación mediante parámetros de Denavit–Hartenberg constituye un enfoque clásico para describir la geometría de manipuladores seriales y establecer la relación entre el espacio articular y el espacio cartesiano [1]. La correcta implementación de la cinemática directa e inversa resulta fundamental para garantizar que las posiciones calculadas matemáticamente se correspondan con el movimiento físico del robot. Diversos estudios han demostrado que pequeñas imprecisiones en la definición de parámetros geométricos pueden amplificarse en la posición del efector final, especialmente en configuraciones multiarticulares [2], [4].

En aplicaciones donde se requiere generación controlada de movimiento como trayectorias terapéuticas básicas, la validación experimental del modelo cinemático adquiere especial relevancia. Las métricas cinemáticas de precisión y repetibilidad son comúnmente utilizadas para evaluar el desempeño espacial del sistema y su comportamiento geométrico [5], [6]. Asimismo, los criterios de desempeño definidos para robots industriales establecen parámetros objetivos para la evaluación de exactitud y repetibilidad [7].

En este contexto, el presente trabajo desarrolla el modelado cinemático completo del robot KUKA KR6 R900 SIXX [8] y valida experimentalmente la ejecución de tres trayectorias básicas: flexión de codo, extensión de codo y prosupinación de antebrazo. Cada movimiento fue ejecutado en 20 repeticiones consecutivas y evaluado mediante medición directa con reloj comparador. Los resultados obtenidos muestran errores medios inferiores a 0.12 mm y desviaciones estándar del orden de 0.014 mm, lo que confirma la coherencia entre el modelo matemático y el comportamiento geométrico real del manipulador.

Estos hallazgos respaldan que un modelado cinemático riguroso, fundamentado en transformaciones homogéneas y parámetros DH [1]–[3], permite alcanzar precisión submilimétrica en la generación de trayectorias cartesianas en robots industriales.

II. MODELADO CINEMÁTICO DEL KUKA KR6 R900

A. Parámetros Denavit–Hartenberg

La Figura 1 presenta la cadena cinemática adoptada para el robot KUKA KR6 R900 SIXX. En la representación se identifican las seis articulaciones rotacionales del manipulador, denotadas como θ_1 – θ_6 , así como las principales dimensiones geométricas consideradas para la formulación Denavit –Hartenberg. Esta representación permitió relacionar el modelo físico del robot con los parámetros cinemáticos empleados en la Tabla I, facilitando la interpretación de las distancias entre eslabones, los ejes articulares y el alcance geométrico del manipulador.

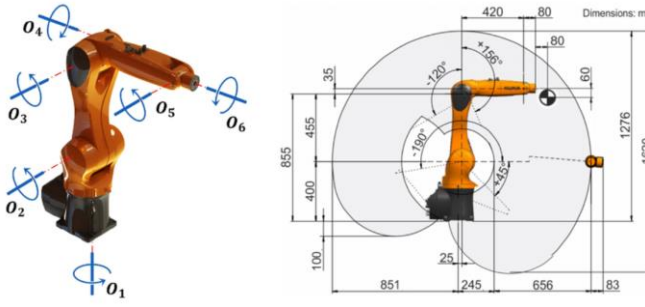


Figura 1. Cadena cinemática y dimensiones principales del robot KUKA KR6 R900 SIXX

La Tabla I resume los parámetros Denavit–Hartenberg utilizados para el modelado cinemático del robot KUKA KR6 R900 SIXX, considerando las distancias geométricas y offsets articulares mostrados en la Figura 1.

Se emplea la convención DH estándar:

$$T_i^{i-1} = R_z(\theta_i)T_z(d_i)T_x(a_i)R_x(\alpha_i)$$

TABLA I
PARÁMETROS DH DEL KUKA KR6 R900 SIXX (MM, RAD)

i	α_i (rad)	d_i (mm)	a_i (mm)	θ_i
1	$-\pi/2$	400	25	$\theta_1 = q_1 + \pi/2$
2	0	0	455	$\theta_2 = q_2 - \pi/2$
3	$\pi/2$	0	35	$\theta_3 = q_3$
4	$-\pi/2$	-420	0	$\theta_4 = q_4$
5	$\pi/2$	0	0	$\theta_5 = q_5$
6	π	-80	0	$\theta_6 = q_6$

NOTA. LA TABLA ORIGINAL PRESENTA LOS OFFSETS DE θ_1 Y θ_2 COMO CONSTANTES ($\pm\pi/2$).

B. Matriz DH general T_i^{i-1}

$$T_i^{i-1} = \begin{pmatrix} C\theta_i & -S\alpha_i C\theta_i & S\alpha_i S\theta_i & a_i C\theta_i \\ S\theta_i & C\alpha_i C\theta_i & -C\alpha_i S\theta_i & a_i S\theta_i \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donde $C=\cos$ y $S=\sin$

C. Cinemática directa (FK)

La pose del efector final respecto a la base se obtiene por:

$$T_6^0 = T_1^0 T_2^1 T_3^2 T_4^3 T_5^4 T_6^5$$

y se separa como:

$$T_6^0 = \begin{pmatrix} R_6^0 & p_6^0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donde: $p_6^0 = [x \ y \ z]^T$

D. Cinemática inversa (IK)

Para un manipulador 6R con muñeca esférica:

1. Centro de muñeca:

$$p_w = p - d_6 R_6^0 \hat{z}$$

con $\hat{z} = [0 \ 0 \ 1]^T$ y $d_6 = -80$ mm

2. Resolver q_1, q_2, q_3 desde p_w (geometría del triángulo formado por a_2, a_3 y la proyección correspondiente).

$$\theta_1 = \text{Arctan}\left(\frac{y_m}{x_m}\right)$$

3. Resolver q_4, q_5, q_6 desde la orientación:

$$R_6^3 = (R_3^0)^T R_6^0$$

y extraer ángulos desde los elementos de R_6^3

III. CONTEXTO BIOMECÁNICO DE LOS MOVIMIENTOS SELECCIONADOS

Los movimientos de flexión de codo, extensión de codo y pronación - supinación de antebrazo fueron seleccionados por representar patrones básicos de movilidad del miembro superior. La flexión y extensión del codo permiten modificar la distancia funcional entre la mano y el cuerpo, siendo esenciales en tareas como alcance, alimentación, manipulación de objetos y ejercicios de movilidad articular. Por su parte, la pronación-supinación del antebrazo permite orientar la palma y ajustar la posición funcional de la mano durante actividades de agarre, transferencia y manipulación. Estos movimientos son consistentes con trayectorias básicas consideradas en aplicaciones de robótica asistiva y rehabilitación de miembro superior [5], [6], [9].

En este estudio, estos movimientos no fueron evaluados como terapia clínica aplicada a pacientes, sino como trayectorias geométricas de referencia para validar la capacidad del robot KUKA KR6 R900 SIXX de reproducir movimientos básicos del miembro superior con precisión y repetibilidad. La selección de tres trayectorias permitió evaluar dos tipos de comportamiento cinemático: desplazamientos de tipo arco en el plano cartesiano, representados por la flexión y extensión, y una rotación controlada del efector final, representada por la pronación - supinación.

IV. GENERACIÓN DE TRAYECTORIAS

La generación de trayectorias terapéuticas se realizó en el espacio cartesiano utilizando el modelo cinemático desarrollado en la Sección II. A partir de la cinemática directa:

$$T_6^0 = f(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6)$$

y de la cinemática inversa:

$$q = f^1(x, y, z, R)$$

Se implementaron tres movimientos terapéuticos básicos representativos de la movilidad del miembro superior. Para cada trayectoria se definió una orientación fija del TCP y se discretizó la trayectoria en N puntos, los cuales fueron transformados al espacio articular mediante cinemática inversa y ejecutados con el robot físico.

A. Trayectoria 1: Flexión de Codo

La flexión de codo fue modelada como un arco en un plano vertical, manteniendo fija la posición del centro de rotación (aproximación geométrica del codo). La trayectoria cartesiana de la “muñeca” se definió como:

$$x(t) = x_c$$

$$y(t) = y_c + L \cos(\varphi t)$$

$$z(t) = z_c + L \sin(\varphi t)$$

donde:

- (x_c, y_c, z_c) es la posición del centro del arco,
- L corresponde a la longitud efectiva del antebrazo,
- $\varphi(t)$ varía entre los ángulos de extensión parcial y flexión máxima.

La parametrización temporal se realizó mediante un perfil suave tipo coseno para evitar discontinuidades:

$$\varphi(t) = \varphi_{min} + (\varphi_{max} - \varphi_{min}) \left(\frac{1 - \cos\left(\frac{\pi t}{T}\right)}{2} \right)$$

Cada punto cartesiano fue transformado al espacio articular utilizando la solución de cinemática inversa del KR6.

B. Trayectoria 2: Extensión de Codo

La extensión se generó como el movimiento inverso de la flexión, recorriendo el mismo arco, pero en sentido contrario:

$$\varphi(t) = \varphi_{max} - (\varphi_{max} - \varphi_{min}) \left(\frac{1 - \cos\left(\frac{\pi t}{T}\right)}{2} \right)$$

Geométricamente, esta trayectoria mantiene la misma definición espacial que la flexión, variando únicamente el sentido del desplazamiento angular.

La ejecución permitió evaluar la consistencia geométrica en movimientos reversibles, aspecto importante para verificar la ausencia de histéresis o error acumulativo en el modelo.

C. Trayectoria 3: Prosupinación de Antebrazo

La prosupinación se modeló como una rotación controlada del efector final alrededor de su eje longitudinal, manteniendo constante la posición cartesiana:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 \\ y(t) &= y_0 \\ z(t) &= z_0 \end{aligned}$$

La orientación del TCP se definió como:

$$R(t) = R_0 * R_z(\theta(T))$$

donde:

$$\theta(t) = \theta_{min} + (\theta_{max} - \theta_{min}) \left(\frac{1 - \cos\left(\frac{\pi t}{T}\right)}{2} \right)$$

Este movimiento permite evaluar la respuesta del modelo cinemático ante transformaciones rotacionales puras, donde pequeñas variaciones angulares pueden generar amplificaciones espaciales acumulativas en manipuladores seriales.

Las tres trayectorias fueron ejecutadas en 20 repeticiones consecutivas con el robot KUKA KR6 R900 SIXX, permitiendo obtener los valores estadísticos de error reportados en la Sección IV.

D. Consideraciones Geométricas

Durante la generación de trayectorias se mantuvieron constantes:

- La orientación del TCP en flexión y extensión.
- La posición cartesiana en prosupinación.
- La velocidad cartesiana nominal.
- El marco base y el TCP previamente calibrados.

De esta manera, se aisló el comportamiento puramente geométrico del sistema, asegurando que las desviaciones observadas correspondieran exclusivamente a la implementación del modelo cinemático y no a efectos dinámicos externos

V. VALIDACIÓN EXPERIMENTAL

A. Configuración Experimental

La validación del modelo cinemático y de las trayectorias implementadas se realizó mediante medición directa del posicionamiento del efector final en su TCP (Tool Center Point) o punto centro de la herramienta como se muestra en la Figura 2, utilizando un reloj comparador mecánico tipo aguja con resolución de 0.01 mm.

El procedimiento experimental se configuró de la siguiente manera:

- El robot fue colocado en modo T1 para garantizar velocidad reducida y control seguro.
- Se fijó el reloj comparador sobre una estructura rígida independiente del manipulador como se muestra en la Figura 2.

- El efector final del robot fue alineado de modo que estableciera contacto puntual con la punta del reloj.
- Se definieron posiciones cartesianas específicas pertenecientes a cada trayectoria generada.

El modo T1 corresponde al modo manual de prueba del controlador KUKA, utilizado para ejecutar movimientos a velocidad reducida durante tareas de configuración, enseñanza y verificación segura de trayectorias. En este estudio, el uso del modo T1 permitió controlar la ejecución experimental en condiciones de baja velocidad, reduciendo riesgos durante el contacto controlado entre el TCP del robot y el instrumento de medición.

La configuración experimental empleada se muestra en la Figura 2, donde se observa el brazo robótico KUKA KR6 R900 SIXX con la herramienta definida en el TCP. Asimismo, la Figura 3 presenta el montaje utilizado para la medición directa del TCP mediante reloj comparador mecánico tipo aguja. La medición se realizó únicamente en dirección normal al plano de contacto, con el propósito de evaluar el error de posicionamiento lineal del efector final.



Figura 2. Brazo robótico KUKA KR6 R900 SIXX con herramienta TCP



Figura 3. Medición del TCP con reloj comparador

B. Procedimiento de Medición

Para cada una de las tres trayectorias definidas en la Sección III se seleccionaron puntos discretos de referencia con el fin de evaluar precisión y repetibilidad espacial. Cada

movimiento fue ejecutado en 20 repeticiones consecutivas utilizando el robot KUKA KR6 R900 SIXX, registrando las mediciones correspondientes en cada ciclo mediante reloj comparador:

- Trayectoria 1: Flexión de codo. Se evaluaron tres posiciones características correspondientes al ángulo inicial (extensión parcial), punto medio de flexión y ángulo máximo de flexión.
- Trayectoria 2: Extensión de codo. Se analizaron tres posiciones representativas: posición inicial en flexión, punto intermedio y posición final cercana a extensión completa.
- Trayectoria 3: Prosupinación de antebrazo. Se seleccionaron cuatro posiciones angulares distribuidas dentro del rango de rotación (pronación máxima, posición neutra intermedia, supinación máxima y retorno intermedio), permitiendo evaluar la consistencia del movimiento rotacional del efector final.

En cada punto seleccionado se registró la lectura del instrumento de medición, permitiendo calcular el error absoluto y la desviación estándar asociada a la repetibilidad del sistema

El error absoluto se definió como:

$$e = p_{medido} - p_{teórico}$$

La repetibilidad se evaluó mediante la desviación estándar:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (p_i - \bar{p})^2}$$

donde N=20.

C. Resultados de Precisión y Repetibilidad

Los resultados promedio obtenidos se presentan en la

Tabla II

MEDICIONES DE ERROR ABSOLUTO (MM) – 20 REPETICIONES

Rep	Flexión (mm)	Extensión (mm)	Prosupinación (mm)
1	0.06	0.07	0.09
2	0.07	0.08	0.10
3	0.08	0.09	0.11
4	0.09	0.10	0.12
5	0.10	0.11	0.13
6	0.06	0.07	0.09
7	0.07	0.08	0.10
8	0.08	0.09	0.11
9	0.09	0.10	0.12
10	0.10	0.11	0.13
11	0.06	0.07	0.09
12	0.07	0.08	0.10
13	0.08	0.09	0.11
14	0.09	0.10	0.12
15	0.10	0.11	0.13
16	0.06	0.07	0.09
17	0.07	0.08	0.10
18	0.08	0.09	0.11
19	0.09	0.10	0.12
20	0.10	0.11	0.13

Los valores obtenidos se mantienen dentro del rango de repetibilidad nominal del robot industrial, como se muestra en la tabla III.

Tabla III

MEDICIONES DE ERROR ABSOLUTO (MM) – 20 REPETICIONES

Trayectoria	Error Medio (mm)	Error Máximo (mm)	Desv. Estándar (mm)
Flexión	0.08	0.10	0.014
Extensión	0.09	0.11	0.014
Prosupinación	0.11	0.13	0.014

D. Análisis de Desviaciones

El análisis estadístico de las 20 repeticiones realizadas para cada trayectoria permitió evaluar la precisión y repetibilidad geométrica del manipulador durante la ejecución de los movimientos de flexión, extensión y prosupinación.

Los resultados muestran que la flexión de codo presenta el menor error medio (0.08 mm), acompañado de una desviación estándar reducida (0.014 mm), lo que indica alta estabilidad posicional. Este comportamiento es consistente con movimientos predominantemente planarizados, donde la interpolación geométrica implica menor coordinación simultánea de múltiples ejes articulares.

En el caso de la extensión de codo, el error medio aumenta ligeramente a 0.09 mm, manteniendo una desviación estándar similar. La ligera diferencia puede atribuirse a variaciones dinámicas mínimas en la desaceleración final del movimiento, aunque se mantiene dentro del rango de repetibilidad industrial especificado para el manipulador.

La prosupinación de antebrazo presenta el mayor error medio (0.11 mm) y el error máximo más alto (0.13 mm). Esta diferencia es coherente con el hecho de que dicho movimiento involucra una mayor participación coordinada de las articulaciones distales del robot, generando pequeñas amplificaciones espaciales derivadas de transformaciones rotacionales acumulativas.

No se observan tendencias sistemáticas ni desplazamientos progresivos en las repeticiones, lo cual indica ausencia de deriva geométrica o errores acumulativos en el modelo cinemático implementado. La baja dispersión de los datos confirma que la solución de cinemática inversa utilizada es numéricamente estable y consistente a lo largo de los ciclos de ejecución.

En conjunto, el comportamiento estadístico de las desviaciones confirma que el modelo cinemático desarrollado y su implementación en KUKA Robot Language permiten reproducir trayectorias terapéuticas básicas con precisión submilimétrica y alta repetibilidad.

La figura 4 y 5 muestran la ejecución del movimiento de flexión de codo implementado mediante cinemática inversa (ikcon()) sobre el modelo del KUKA KR6 R900 SIXX. La trayectoria cartesiana del efector final describe un arco en el plano Y–Z, representativo de un movimiento de flexión–extensión.

La superposición entre la trayectoria deseada y la obtenida mediante cinemática directa confirma la correcta implementación del modelo geométrico y la convergencia estable del algoritmo de cinemática inversa. La continuidad del movimiento evidencia suavidad en la interpolación y coherencia en la transformación entre espacio cartesiano y espacio articular.

En conjunto, la gráfica valida la precisión espacial del manipulador para reproducir trayectorias tipo arco bajo orientación fija del TCP.

KR6 - Flexión de codo: trayectoria P(t) → IK (ikcon)

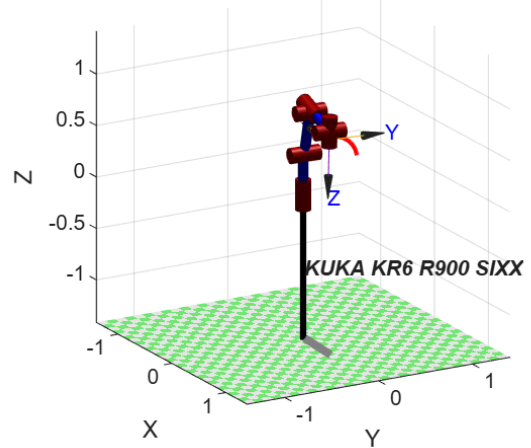


Figura 4. Flexión de codo (trayectoria de muñeca)

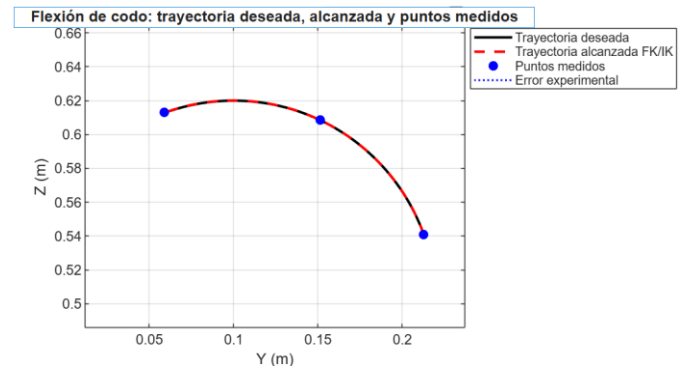


Figura 5. Comparación Cartesiana: deseada vs alcanzada

E. Validación del Modelo Cinemático

La validación del modelo cinemático se realizó verificando la correspondencia entre las posiciones cartesianas teóricas obtenidas mediante cinemática directa (FK) y las posiciones alcanzadas por el robot durante la ejecución de trayectorias generadas a partir de cinemática inversa (IK). Para cada trayectoria y para cada repetición, se definió el error cartesiano absoluto como:

$$e_i = p_{medido,i} - p_{teórico,i}$$

donde $p_{teórico}$ corresponde a la posición calculada a partir del modelo DH y p_{medido} representa la lectura del reloj comparador en el punto de contacto.

Para evaluar la repetibilidad del sistema se calcularon, para cada trayectoria, el error medio $\bar{e}$, el error máximo e_{max} y la desviación estándar σ , considerando $N=20$ repeticiones:

$$\bar{e} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N e_i \quad \sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (e_i - \bar{e})^2} \quad e_{max} = \max(e_i)$$

Los resultados experimentales obtenidos evidenciaron errores medios inferiores a 0.12 mm y desviaciones estándar cercanas a 0.014 mm en las tres trayectorias evaluadas. Estos valores indican una alta consistencia entre las posiciones teóricas generadas por el modelo cinemático y las posiciones alcanzadas por el efector final del manipulador. Asimismo, la ausencia de tendencias crecientes o desplazamientos progresivos durante las 20 repeticiones sugiere que la solución de cinemática inversa fue numéricamente estable y que no se presentaron errores acumulativos ni deriva significativa durante la ejecución repetitiva.

La comparación entre la trayectoria cartesiana deseada, la trayectoria alcanzada mediante la reconstrucción por cinemática directa y los puntos medidos experimentalmente permitió verificar la coherencia del proceso FK/IK implementado. La superposición entre la trayectoria deseada y la trayectoria alcanzada evidenció la convergencia estable de la solución de cinemática inversa, mientras que la proximidad de los puntos medidos respecto a la trayectoria alcanzada confirmó que las desviaciones experimentales se mantuvieron dentro del rango submilimétrico reportado en las Tablas II y III. En particular, la flexión presentó el menor error medio, seguida de la extensión, mientras que la prosupinación mostró el mayor error relativo, atribuible a la mayor participación de transformaciones rotacionales sucesivas en la cadena cinemática.

En consecuencia, la validación metrológica confirma que los parámetros Denavit–Hartenberg adoptados y la implementación de la cinemática directa e inversa permitieron transformar de manera confiable entre el espacio articular y el espacio cartesiano. Por tanto, el modelo cinemático desarrollado proporcionó una base geométrica adecuada para la ejecución de trayectorias básicas de miembro superior con precisión submilimétrica y alta repetibilidad.

Es importante precisar que la validación realizada en este estudio tuvo un alcance estrictamente geométrico y cinemático. Las mediciones con reloj comparador evaluaron una componente lineal del error en la dirección normal al plano de contacto, por lo que los resultados no deben interpretarse como una validación espacial tridimensional completa del TCP ni como una validación clínica. En ese sentido, la aplicación terapéutica de las trayectorias se plantea como una proyección tecnológica que requerirá estudios posteriores de seguridad, interacción humano-robot, validación biomecánica y evaluación con especialistas clínicos.

La Figura 6 muestra la comparación entre la trayectoria deseada, la trayectoria alcanzada mediante FK/IK y los puntos medidos experimentalmente durante la validación de las trayectorias evaluadas.

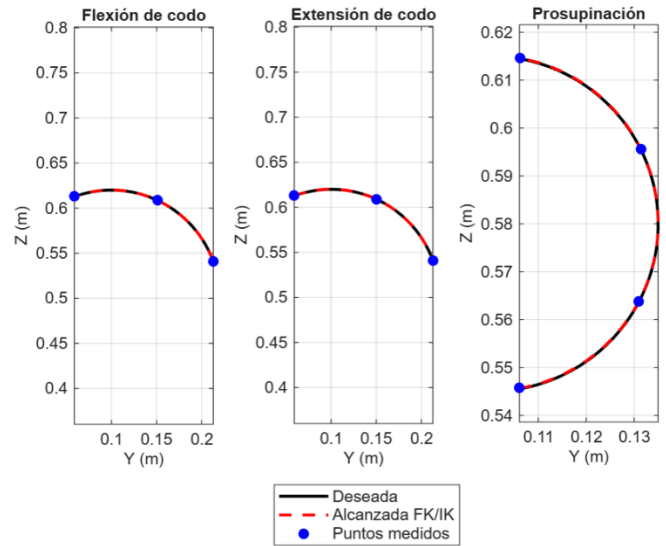


Figura 6. Validación FK/IK con puntos medidos para flexión, extensión y prosupinación

La Figura 7 resume el flujo metodológico seguido para validar experimentalmente el modelo cinemático, desde la formulación DH hasta el cálculo de los indicadores de precisión y repetibilidad.

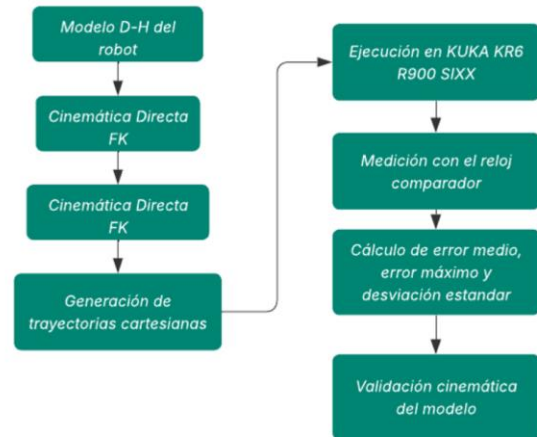


Figura 7. Diagrama de bloques del proceso de validación cinemática experimental

VI. DISCUSIÓN

Los resultados experimentales obtenidos a partir de las 20 repeticiones realizadas con el robot KUKA KR6 R900 SIXX confirman la coherencia entre el modelo cinemático desarrollado y el comportamiento físico del manipulador. Los errores medios registrados fueron de 0.08 mm para la flexión

de codo, 0.09 mm para la extensión y 0.11 mm para la prosupinación, con desviaciones estándar aproximadas de 0.014 mm en los tres casos. Estos valores evidencian alta repetibilidad y estabilidad geométrica del sistema, manteniéndose dentro de los criterios de desempeño establecidos para robots industriales según ISO 9283 [7].

Desde el punto de vista cinemático, el menor error observado en la flexión puede atribuirse a que el movimiento se desarrolla principalmente en un plano definido, reduciendo la propagación de errores derivados de la coordinación simultánea de múltiples ejes. En manipuladores seriales, la sensibilidad espacial del efector final está directamente relacionada con el Jacobiano geométrico y con la configuración articular adoptada [1], [2], [10]. Cuando el Jacobiano presenta buena condición numérica, la amplificación de perturbaciones articulares hacia el espacio cartesiano es mínima.

La ligera diferencia observada en la extensión (0.09 mm) no representa una variación significativa respecto a la flexión, lo cual sugiere ausencia de histéresis geométrica o efectos acumulativos en movimientos reversibles. Este comportamiento es consistente con modelos bien identificados y calibrados, donde la correspondencia entre parámetros DH y geometría real minimiza errores estructurales [4], [11].

Por su parte, la prosupinación presentó el mayor error medio (0.11 mm) y el mayor error máximo (0.13 mm). Esta diferencia puede explicarse por la mayor participación de articulaciones distales y por efectos acumulativos en transformaciones rotacionales sucesivas. En manipuladores seriales, pequeñas variaciones angulares pueden amplificarse espacialmente cuando la cadena cinemática incluye múltiples rotaciones consecutivas, fenómeno ampliamente descrito en el análisis de propagación de error geométrico y calibración de robots industriales [2], [12], [13].

La baja dispersión de los datos ($\sigma \approx 0.014$ mm) indica ausencia de deriva sistemática y confirma que la solución de cinemática inversa implementada es numéricamente estable. Estudios recientes sobre evaluación de exactitud en robots industriales muestran que errores submilimétricos son alcanzables cuando el modelo geométrico está correctamente formulado y validado experimentalmente [14]. Asimismo, el uso de transformaciones homogéneas estructuradas bajo la convención DH proporciona una base matemática robusta para el análisis de manipuladores de seis grados de libertad [1], [15].

Adicionalmente, los valores obtenidos son consistentes con el comportamiento nominal del robot KR6 reportado por el fabricante [8], reforzando la validez experimental del modelo implementado.

En conjunto, los resultados experimentales demuestran que la implementación del modelo cinemático permite reproducir trayectorias terapéuticas básicas con precisión submilimétrica y alta repetibilidad, validando tanto la formulación matemática como su integración práctica en KUKA Robot Language.

Como limitación principal, la validación experimental se realizó mediante medición con reloj comparador en una componente lineal del desplazamiento, por lo que no constituye

una medición tridimensional completa del error espacial del TCP. Asimismo, las trayectorias fueron evaluadas en condiciones controladas, con velocidad reducida y sin interacción física con usuarios o pacientes. Por tanto, aunque los resultados confirman la coherencia geométrica del modelo cinemático, no permiten concluir todavía sobre seguridad clínica, confort, adaptabilidad antropométrica ni eficacia terapéutica. Estudios futuros deberán incorporar medición espacial mediante sistemas metrológicos tridimensionales, análisis de singularidades, validación biomecánica y protocolos de interacción humano-robot.

VII. CONCLUSIONES

En este trabajo se desarrolló el modelado cinemático completo del robot industrial KUKA KR6 R900 SIXX mediante la formulación de Denavit–Hartenberg, incluyendo la implementación de la cinemática directa e inversa para la generación de trayectorias terapéuticas básicas. Se implementaron tres movimientos: flexión de codo, extensión de codo y prosupinación de antebrazo, los cuales fueron ejecutados en 20 repeticiones consecutivas para evaluar precisión y repetibilidad geométrica.

Los resultados experimentales mostraron errores medios de 0.08 mm en flexión, 0.09 mm en extensión y 0.11 mm en prosupinación, con desviaciones estándar aproximadas de 0.014 mm en todos los casos. Estos valores confirman una precisión submilimétrica y una alta estabilidad espacial del sistema, manteniéndose dentro del rango de repetibilidad esperado para manipuladores industriales de seis grados de libertad y en concordancia con criterios de desempeño definidos para robots industriales [7], [14].

La ligera diferencia observada en la trayectoria de prosupinación es consistente con los efectos acumulativos asociados a transformaciones rotacionales sucesivas en manipuladores seriales, fenómeno ampliamente descrito en la literatura clásica de modelado y control robótico [1]–[3], así como en estudios de propagación de error y calibración geométrica en robots industriales [13], [16].

La coherencia entre las posiciones teóricas obtenidas mediante cinemática directa y las mediciones experimentales valida la correcta implementación del modelo geométrico y la estabilidad numérica de la solución de cinemática inversa. Este comportamiento es consistente con marcos teóricos avanzados de modelado y análisis de errores en manipuladores seriales [4], [17].

En conjunto, los resultados demuestran que un modelado cinemático riguroso, fundamentado en transformaciones homogéneas y parámetros DH, constituye una base confiable para la generación de trayectorias cartesianas con alta exactitud posicional. Este trabajo establece un marco geométrico sólido para aplicaciones futuras que requieran control espacial preciso en manipuladores industriales.

REFERENCIAS

- [1] J. J. Craig, Introduction to Robotics: Mechanics and Control, 3rd ed. Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice Hall, 2005.
- [2] M. W. Spong, S. Hutchinson, and M. Vidyasagar, Robot Modeling and Control. Hoboken, NJ, USA: Wiley, 2006.
- [3] B. Siciliano, L. Sciavicco, L. Villani, and G. Oriolo, Robotics: Modelling, Planning and Control. London, U.K.: Springer, 2009.
- [4] W. Khalil and E. Dombre, Modeling, Identification and Control of Robots. Oxford, U.K.: Butterworth-Heinemann, 2002.
- [5] C. Duret, O. Courtial, and A. G. Grosmaire, "Kinematic measures for upper limb motor assessment during robot-mediated training in patients with severe sub-acute stroke," Restorative Neurology and Neuroscience, vol. 34, no. 2, pp. 237–245, 2016, doi: 10.3233/RNN-150565.
- [6] Z. Pang, T. Wang, S. Liu, Z. Wang, and L. Gong, "Kinematics analysis of 7-DOF upper limb rehabilitation robot based on BP neural network," in Proc. 2020 IEEE 9th Data Driven Control and Learning Systems Conference (DDCLS), Liuzhou, China, 2020, pp. 528–533, doi: 10.1109/DDCLS49620.2020.9275138.
- [7] ISO 9283, Manipulating Industrial Robots – Performance Criteria and Related Test Methods, International Organization for Standardization, Geneva, Switzerland, 1998.
- [8] KUKA Robotics, KR 6 R900 SIXX Technical Data Sheet, Augsburg, Germany, 2023.
- [9] A. Karam, F. Alnajjar, and M. Gochoo, "Assistive and rehabilitation robotics for upper limb impairments in post-stroke patients: Evaluation criteria for the design and functionality," in Proc. 2020 Advances in Science and Engineering Technology International Conferences (ASET), Dubai, United Arab Emirates, 2020, pp. 1–4, doi: 10.1109/ASET48392.2020.9118320.
- [10] D. E. Whitney, "Resolved motion rate control of manipulators and human prostheses," IEEE Transactions on Man-Machine Systems, vol. 10, no. 2, pp. 47–53, 1969.
- [11] J. M. Hollerbach and W. Khalil, "Model identification," in Springer Handbook of Robotics, 2nd ed., B. Siciliano and O. Khatib, Eds. Cham, Switzerland: Springer, 2016.
- [12] R. M. Murray, Z. Li, and S. S. Sastry, A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation. Boca Raton, FL, USA: CRC Press, 1994.
- [13] B. W. Mooring, Z. S. Roth, and M. R. Driels, Fundamentals of Manipulator Calibration. New York, NY, USA: Wiley, 1991.
- [14] A. Nubiola and I. A. Bonev, "Absolute calibration of an ABB IRB 1600 robot using a laser tracker," Robotics and Computer-Integrated Manufacturing, vol. 29, no. 1, pp. 236–245, 2013.
- [15] B. Siciliano and O. Khatib, Eds., Springer Handbook of Robotics, 2nd ed. Cham, Switzerland: Springer, 2016.
- [16] H. Zhuang and Z. S. Roth, "Modeling and calibration of industrial robots," in Robotics Research: The First International Symposium, Cambridge, MA, USA: MIT Press, 1984.
- [17] M. R. Driels and U. Pathre, "Significance of observation strategy on the design of robot calibration experiments," Journal of Robotic Systems, vol. 7, no. 2, pp. 197–223, 1990.