

Artificial prime numbers in algebraic structures: a contextual extension beyond the integers

Acevedo Jiménez, José¹ ; Sánchez Fernández, Francisco del Rosario² 

^{1,2}Universidad Tecnológica de Santiago (UTESA), República Dominicana, joseacvdojimenez@gmail.com,
franciscosanchez@utesa.edu

Abstract– *This paper generalizes the concept of artificial prime numbers from subsets of the positive integers to broader algebraic structures, including integral domains, Euclidean domains, and rings of algebraic integers. Artificial primality is defined through internal divisibility relations within a set, incorporating associated elements and removing the dependence on unique factorization. The Gaussian integers $\mathbb{Z}[i]$ are analyzed as a representative case, illustrating the contextual nature of primality under set restrictions. The relationship between artificial primes, irreducible elements, and algebraic primes is examined, and key properties, a generalized sieve algorithm, and potential applications in STEM education are discussed.*

Keywords: artificial prime numbers; algebraic number theory; Gaussian integers; irreducible elements; computational mathematics; STEM education; algorithmic modeling.

Números primos artificiales en estructuras algebraicas: una extensión contextual más allá de los números enteros

Acevedo Jiménez, José¹; Sánchez Fernández, Francisco del Rosario²

^{1,2}Universidad Tecnológica de Santiago (UTESA), República Dominicana, joseacvdojimenez@gmail.com, franciscosanchez@utesa.edu

Resumen– En este trabajo se extiende el concepto de números primos artificiales, previamente definido sobre subconjuntos de los enteros positivos, hacia estructuras algebraicas más generales, tales como dominios de integridad, dominios euclidianos y anillos de enteros algebraicos. Se propone una formulación general de la primalidad artificial en términos de relaciones de divisibilidad internas a un conjunto dado, incorporando la noción de elementos asociados. Se establecen resultados básicos en forma de proposiciones, y se analizan casos particulares en los enteros gaussianos $\mathbb{Z}[i]$ y en anillos no necesariamente factoriales, comparando esta noción con los conceptos de irreducibilidad y primalidad algebraica. Asimismo, se discuten posibles aplicaciones y limitaciones del enfoque, así como su potencial en contextos de computación y educación STEM. Este enfoque proporciona una interpretación contextual de la primalidad, dependiente del conjunto considerado y de su estructura de divisibilidad.

Palabras clave: números primos artificiales; teoría algebraica de números; enteros gaussianos; elementos irreducibles; computación matemática; educación STEM; modelado algorítmico.

I. INTRODUCCIÓN

La noción clásica de número primo constituye uno de los pilares fundamentales de la teoría de números. Sin embargo, como se mostró en trabajos previos, la idea de primalidad puede reformularse de manera relativa cuando se restringe el universo de divisibilidad a un conjunto específico. Esta perspectiva condujo a la definición de *números primos artificiales* en subconjuntos de los enteros positivos, donde la primalidad deja de ser una propiedad absoluta y pasa a depender del contexto.

El objetivo del presente trabajo es extender esta noción más allá de $\mathbb{Z}$, explorando su formulación y propiedades en estructuras algebraicas generales, tales como anillos conmutativos, dominios de integridad y anillos de enteros algebraicos. Esta extensión no solo es natural desde el punto de vista matemático, sino que permite desvincular la primalidad artificial de la factorización única, abriendo nuevas posibilidades de análisis teórico y aplicaciones prácticas.

II. DEFINICIÓN BÁSICA

Sea S un conjunto no vacío de elementos de un dominio numérico en el que esté definida una noción de divisibilidad.

Un elemento $q \in S$ se denomina número primo artificial en S si no existe ningún elemento $d \in S$, con $d \neq q$, tal que d divida a q .

Esta definición enfatiza que la primalidad artificial depende exclusivamente de las relaciones internas de divisibilidad en el conjunto S .

A diferencia de la primalidad clásica, la primalidad artificial es esencialmente relativa. Un mismo número puede ser primo artificial en un conjunto y dejar de serlo en otro. De este modo, la primalidad artificial proporciona un marco flexible para estudiar estructuras numéricas dependientes del contexto.

III. NUEVAS PERSPECTIVAS

- a. *Relación con la biología y la evolución:* un ejemplo ilustrativo proviene del estudio de ciclos de vida en especies biológicas. Algunas especies de cigarras del género *Magicicada* presentan ciclos de vida extraordinariamente largos: pasan 13 o 17 años bajo tierra antes de emerger de forma masiva, reproducirse y morir en pocas semanas. Estos períodos llaman la atención no solo por su duración, sino porque 13 y 17 son números primos. Esta coincidencia ha motivado estudios que combinan biología, ecología, teoría de números y evolución.

Las cigarras periódicas pasan la mayor parte de su vida como ninfas subterráneas, alimentándose de la savia de las raíces de los árboles. Tras 13 o 17 años, emergen simultáneamente en grandes cantidades, mudan a adultos, se reproducen y mueren.

¿Por qué números primos?

Desde un punto de vista matemático, los números primos tienen una propiedad esencial: no comparten divisores con otros números excepto 1. Esto tiene consecuencias ecológicas importantes. Evitar sincronización con depredadores.

Muchos depredadores tienen ciclos poblacionales regulares (por ejemplo, de 2, 3, 4 o 6 años). Si las cigarras tuvieran un ciclo compuesto, como 12 años, coincidirían con estos depredadores con mayor frecuencia. En cambio, un ciclo primo p :

- Solo coincide exactamente con un ciclo de longitud n cuando n divide a p , lo que solo ocurre si $n = 1$ o $n = p$.
- Minimiza la frecuencia de encuentros regulares con depredadores periódicos.

Por ejemplo:

- Un depredador con ciclo de 4 años coincidiría con una cigarra de 12 años cada 12 años, pero con una de 13 años solo cada 52 años.

Esta explicación, basada en la primalidad clásica, ha sido ampliamente aceptada como un mecanismo matemático que sustenta una ventaja evolutiva.

Sin embargo, desde una perspectiva más general, no es estrictamente necesario recurrir a la primalidad clásica para explicar este fenómeno. La noción de primalidad artificial permite ampliar el marco conceptual y adaptarlo mejor a contextos biológicos reales, donde los ciclos relevantes no abarcan necesariamente todos los números naturales, sino un conjunto finito y dinámico determinado por el ecosistema.

Supongamos, por ejemplo, que los depredadores presentan ciclos de vida de 2 y 7 años, mientras que las cigarras presentan ciclos de 9 y 15 años. Si se define el conjunto $C_p = \{2, 7, 9, 15\}$, entonces los ciclos de las cigarras son primos artificiales en C_p , ya que ninguno de ellos es divisible por los ciclos de los depredadores dentro del conjunto considerado, ver Fig. 1. En este contexto, la ventaja evolutiva no depende de que los ciclos de las cigarras sean primos en el sentido clásico, sino de que sean indivisibles respecto a los ciclos de los depredadores relevantes.

Esta visión resulta especialmente natural desde el punto de vista evolutivo. Los ecosistemas no son estáticos: los conjuntos de ciclo de vida pueden variar con el tiempo debido a mutaciones, migraciones, cambios ambientales y procesos de selección natural.

La primalidad artificial captura esta dependencia contextual, mostrando que la naturaleza no “elige números primos universales”, sino relaciones de indivisibilidad dentro de conjuntos específicos.

En este sentido, la teoría de los números primos artificiales proporciona un marco más flexible y realista para comprender cómo emergen patrones matemáticos en

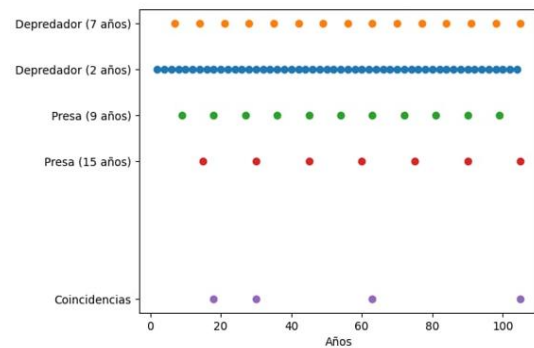


Fig. 1 Coincidencia de ciclos de vida entre depredadores y presas.

sistemas biológicos, reforzando la idea de que la adaptación evolutiva puede interpretarse como un proceso de optimización estructural relativa, más que como una adhesión estricta a propiedades numéricas absolutas.

Desde el punto de vista matemático, el éxito evolutivo de estos ciclos no depende de la primalidad absoluta, sino de la ausencia de divisibilidad respecto al conjunto relevante de ciclos del ecosistema. Esta condición puede expresarse de manera natural mediante la noción de primalidad artificial.

Este modelo no pretende reemplazar los enfoques clásicos basados en el mínimo común múltiplo, sino complementarlos, ofreciendo una interpretación alternativa basada en divisibilidad relativa dentro de un conjunto finito de ciclos relevantes.

- Conjuntos finitos y selección aleatoria:* La primalidad artificial resulta especialmente informativa en conjuntos finitos. Por ejemplo, al seleccionar aleatoriamente seis números del 1 al 100 y considerarlos como elementos de un conjunto, es altamente probable que la mayoría de ellos sean primos artificiales dentro de dicho conjunto. Esta observación puede aportar información útil en contextos como sorteos, análisis combinatorio o estudio de aleatoriedad.
- Relación entre ecuaciones cuadráticas y números primos artificiales*

La noción de números primos artificiales depende de la estructura interna del conjunto sobre el cual se define. En particular, cuando el conjunto está generado por una función cuadrática de la forma $f(x) = x^2 + bx + c$, surgen relaciones algebraicas internas que influyen directamente en las propiedades de divisibilidad relativa.

Considérese el conjunto de números enteros positivos

$S = \{a_n: a_n = n^2 + bn + c, n \in \mathbb{Z}^+\}$, donde b y c son parámetros enteros fijos. En este contexto, se observa que los productos de dos términos consecutivos del conjunto pueden expresarse nuevamente como un elemento del mismo conjunto, es decir:

$$a_n a_{n+1} = a_k, \quad a_n, a_{n+1}, a_k \in S. \quad (1)$$

Esta propiedad se apoya en la siguiente propiedad algebraica válida para todo n .

$$(n^2 + bn + c)((n+1)^2 + b(n+1) + c) = (n^2 + (b+1)n + c)^2 + b(n^2 + (b+1)n + c) + c. \quad (2)$$

La identidad muestra que el producto de dos expresiones cuadráticas consecutivas puede reescribirse como una combinación estructurada de un solo término cuadrático central, el cual conserva la forma funcional que define al conjunto S . En consecuencia, el conjunto presenta una clausura multiplicativa parcial, característica que no aparece en conjuntos arbitrarios de enteros positivos.

Desde la perspectiva de los números primos, estas identidades algebraicas permiten identificar de manera más precisa qué elementos del conjunto no son primos artificiales y cuales mantienen un comportamiento de primo artificial. Así, la primalidad artificial no depende únicamente de la ausencia de divisores dentro del conjunto, sino también de las relaciones algebraicas internas inducidas por la ecuación algebraica generadora.

Estas identidades muestran la existencia de relaciones multiplicativas internas en el conjunto, aunque no implican que el conjunto sea cerrado bajo el producto en general.

- d. *Generación de sucesiones:* La primalidad artificial permite definir nuevas sucesiones numéricas. Por ejemplo, dada una sucesión $\{a_n\} \subset S$, se puede definir: $a_1 = 2$, para $n \geq 1, a_{n+1}$ como el segundo entero mayor que a_n que no sea divisible por ninguno de los términos $a_1, a_2, \dots, a_n$.

Ejemplo: iniciamos con el 2, que será el primer término. El segundo término es el 5, puesto que hemos descartado el 3 que es el primer número entero que no es divisible por el 2. El tercer término es el 9, el cuarto el 13, el quinto el 19 y así obtenemos obtenemos los primeros términos de la sucesión: 2, 5, 9, 13, 19, 23, 31, 37, 43, 49, 53, ...

Este tipo de construcción ilustra cómo la primalidad artificial puede utilizarse como regla generadora de estructuras numéricas novedosas.

Estos ejemplos muestran que la primalidad puede depender del conjunto considerado. Para comprender plenamente esta relatividad, resulta útil analizar estructuras algebraicas más generales, donde las nociones de irreducible y primo se distinguen formalmente.

IV. LA PRIMALIDAD COMO NOCIÓN RELATIVA MÁS ALLÁ DE LOS NÚMEROS NATURALES

La noción de número primo ocupa un lugar central en las matemáticas desde la Antigüedad. En su formulación clásica, un número primo es un entero mayor que uno que solo admite divisores triviales. Esta definición sustenta el Teorema Fundamental de la Aritmética: todo entero positivo mayor que uno se descompone de manera única como producto de números primos.

Sin embargo, al ampliar el horizonte más allá de los números naturales, surge una cuestión fundamental: ¿qué significa realmente “ser primo”?

La evolución histórica de la teoría de números muestra que la primalidad no es una propiedad absoluta de los objetos, sino una noción que depende del contexto estructural en el que se define la divisibilidad.

1) *Primalidad y divisibilidad: el núcleo conceptual*

Toda noción de primalidad presupone, explícita o implícitamente, dos ingredientes básicos:

- un conjunto de objetos.
- una relación de divisibilidad definida entre ellos.

Un elemento se considera “primo” cuando resulta indivisible respecto a dicha relación, salvo de manera trivial. En este sentido, la primalidad no es una propiedad intrínseca del objeto, sino una propiedad relativa a un conjunto y a su estructura de divisibilidad.

La primalidad artificial formaliza precisamente esta observación.

2) *Primos clásicos y factorización en $\mathbb{N}$*

En el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$, un número primo es un entero mayor que 1 cuyos únicos divisores son 1 y él mismo. Los números compuestos, en cambio, admiten una factorización no trivial.

El Teorema Fundamental de la Aritmética establece que todo entero positivo mayor que 1 puede escribirse como producto de números primos de manera única, salvo el orden de los factores. Esta propiedad confiere a los números primos el papel de *átomos multiplicativos* de $\mathbb{N}$.

En este contexto, la noción de:

- elemento primo
- elemento irreducible

coinciden plenamente. Esta coincidencia, como veremos, es excepcional.

3) *Números primos clásicos como caso particular de los números primos artificiales*

Si tomamos:

$$S = \mathbb{N} \setminus \{1\},$$

con la divisibilidad usual, los primos artificiales coinciden exactamente con los números primos clásicos.

La exclusión del 1 no es una exigencia lógica de la primalidad, sino una decisión estructural destinada a garantizar la factorización única. De hecho, si se considera:

$S = \mathbb{Z}^+$, el único primo artificial es el 1, y la descomposición en factores únicos no puede surgir. Este hecho muestra que la factorización única no define la

primalidad, sino que emerge como consecuencia de restricciones adicionales.

La inclusión del 1 al conjunto S muestra que la primalidad artificial no presupone la existencia de factorización única; por el contrario, la factorización única surge como consecuencia de restricciones adicionales sobre el conjunto considerado. Esto no contradice la teoría clásica, sino que muestra que: en la primalidad clásica, la exclusión de la unidad es una condición estructural necesaria para que emerja la factorización única.

4) Principio para cribar números primos artificiales

La criba clásica elimina números compuestos utilizando divisores primos pertenecientes al conjunto de los números naturales. En contraste, el cribado de números primos artificiales se fundamenta en el siguiente principio:

Un elemento de S debe eliminarse únicamente si admite un divisor propio que también pertenezca a S .

Por lo tanto, la eliminación no depende factores externos al conjunto, sino exclusivamente de las relaciones de divisibilidad internas.

I. Definición de la criba

Sea $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\} \subset \mathbb{N}$, con $s_i > 1$ para todo i .

Definimos una función indicadora

$$\chi: S \rightarrow \{0,1\},$$

Donde:

- $\chi(s) = 1$ indica que s es candidato a primo artificial;
- $\chi(s) = 0$ indica que s ha sido descartado.

Inicialmente, se asigna:

$$\chi(s) = 1 \quad \forall s \in S.$$

La regla se define entonces por la siguiente regla de eliminación:

si existen $s_i, s_j \in S$ con $s_i < s_j$ y $s_i \mid s_j$, eliminamos s_j .

II. Algoritmo general de la criba

El procedimiento puede expresarse de manera algorítmica como sigue:

- Fijar el conjunto S .
- Marcar todos los elementos de S como candidatos a primo artificial.
- Para cada par de elementos (s_i, s_j) en S , con $s_i < s_j$:
 - si $s_i \mid s_j$, eliminar s_j .
- Los elementos no eliminados constituyen el conjunto de números primos artificiales de S .

Este algoritmo es independiente de la forma explícita de S y puede aplicarse tanto a conjuntos definidos por extensión como por comprensión.

5) Irreducibles y primos en anillos

Al pasar de $\mathbb{N}$ a un anillo conmutativo general, es necesario refinar las definiciones.

Sea R un dominio de integridad.

- Un elemento $p \in R$ es irreducible si no es una unidad y si $p = ab$ implica que a o b es una unidad.
- Un elemento p es primo si $p \mid ab$ implica que $p \mid a$ o $p \mid b$.

En $\mathbb{N}$ ambas nociones coinciden, pero en un dominio arbitrario no necesariamente. La distinción es crucial: la irreducibilidad es una propiedad interna del elemento, mientras que la primalidad controla la divisibilidad en todo el anillo.

En dominios de factorización única (UFD), ambas coinciden; en otros, divergen. Desde el punto de vista de la primalidad artificial, ambos conceptos corresponden a primos artificiales definidos en conjuntos distintos:

- los irreducibles aparecen al restringir S a los elementos no unidad $(1, -1, i, -i)$,
- los primos surgen al imponer condiciones adicionales sobre la divisibilidad.

Esta visión general nos prepara para analizar casos concretos en anillos de enteros algebraicos, como $\mathbb{Z}[i]$, donde las diferencias entre irreducibles, primos y primos artificiales se hacen evidentes y permiten explorar nuevas estructuras numéricas.

6) Enteros gaussianos y primos gaussianos

La teoría de números clásica estudia principalmente las propiedades aritméticas de los números enteros. Sin embargo, al extender el concepto de números enteros a otros sistemas algebraicos, surgen estructuras ricas y profundas. Uno de los ejemplos más importantes es el conjunto de los enteros gaussianos, introducido implícitamente por Carl Friedrich Gauss en sus estudios sobre la aritmética compleja y la ley de reciprocidad cuadrática.

Los enteros gaussianos permiten generalizar nociones fundamentales como divisibilidad, máximo común divisor y primalidad, dando lugar al concepto de primos gaussianos, que presentan propiedades distintas pero relacionadas con los primos ordinarios.

a) Enteros gaussianos

Se define el conjunto de los enteros gaussianos como:

$$\mathbb{Z}[i] = \{a + bi : a, b \in \mathbb{Z}, i^2 = -1\}$$

Este conjunto es un subanillo del cuerpo de los números complejos $\mathbb{C}$, y se verifica que $\mathbb{Z}[i]$ es un dominio de integridad.

b) Norma y unidades: Para estudiar la divisibilidad en $\mathbb{Z}[i]$, se introduce la norma:

$$N(a + bi) = a^2 + b^2. \quad (3)$$

La norma tiene propiedades clave:

- $N(z) \geq 0$ y $N(z) = 0$ si y solo si $z = 0$.
- $N(zw) = N(z)N(w)$ para todo $z, w \in \mathbb{Z}[i]$.

Un elemento $u \in \mathbb{Z}[i]$ es una unidad si existe $v \in \mathbb{Z}[i]$ tal que

$uv = 1$. Usando la norma, se demuestra que las únicas unidades son:

$$\pm 1, \pm i.$$

b) Divisibilidad y dominio euclídeo

Un entero gaussiano z divide a w si existe $q \in \mathbb{Z}[i]$ tal

que $w = zq$.

Gracias a la norma, $\mathbb{Z}[i]$ es un dominio euclideo, lo que implica que es un dominio de factorización única (DFU). En consecuencia, todo entero gaussiano distinto de cero y no unidad puede escribirse como producto de primos gaussianos, de forma única salvo el orden y las unidades.

c) Primos gaussianos

Un entero gaussiano p se llama primo gaussiano si no es cero ni unidad y, siempre que $p = ab$, entonces a o b es una unidad.

Un entero gaussiano $a + bi$ es primo si y solo si se cumple una de las siguientes condiciones:

1. Uno de los coeficientes es cero:

- Si p es un primo entero y $p \equiv 3 \pmod{4}$, entonces p y $-p$ son primos gaussianos.
- Si $p \equiv 1 \pmod{4}$, entonces p no es primo en $\mathbb{Z}[i]$, ya que se factoriza como:

$$p = a^2 + b^2 = (a + bi)(a - bi). \quad (4)$$

2. Ambos coeficientes son no nulos:

- $a + bi$ es primo gaussiano si $a^2 + b^2$ es un primo ordinario.

Un caso especial es el número $1 + i$, cuya norma es 2, y que es un primo gaussiano.

d) Ejemplos

- 3 es primo en $\mathbb{Z}[i]$ porque $3 \equiv 3 \pmod{4}$.
- 5 no es primo gaussiano, ya que $5 = (2 + i)(2 - i)$.
- $2 = (1 + i)(1 - i)$, por lo que no es primo gaussiano.

Los enteros gaussianos proporcionan un ejemplo clásico de cómo extender la aritmética usual a un nuevo contexto algebraico conservando la factorización única. El estudio de los primos gaussianos revela una profunda conexión entre la aritmética modular y la estructura de los números complejos. Entre estas propiedades, se observa un patrón visual de coronas circulares dispersas, donde los números primos complejos se organizan en anillos concéntricos alrededor del origen, como se observa en la Fig. 2. Esta disposición refleja simetrías propias de los enteros gaussianos y destaca zonas de concentración y vacíos, proporcionando información útil para explorar propiedades geométricas y algebraicas de estos primos complejos.

La visualización de este patrón facilita la identificación de regularidades, densidades relativas y posibles conexiones con otras estructuras del plano complejo.

La imagen muestra un patrón geométrico que representa la distribución de los primos gaussianos en el plano complejo.

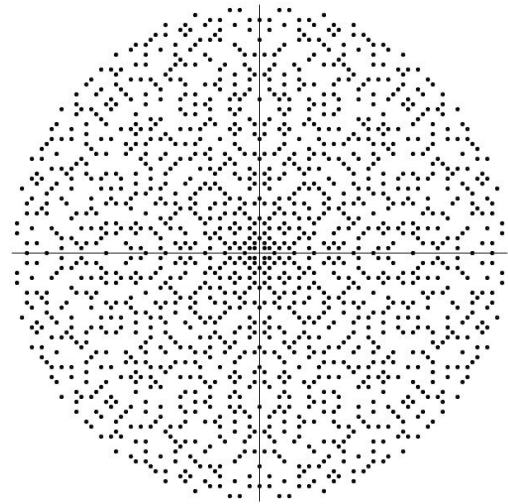


Fig. 2 Patrón visual de coronas circulares dispersas de los primos gaussianos en el plano cartesiano.

7) Primos gaussianos como caso particular de los números primos artificiales

Sea

$$\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$$

y sea el conjunto de unidades gaussianas

$$U = \{1, -1, i, -i\}.$$

Definimos el conjunto:

$$S \subseteq \mathbb{Z}[i] \setminus U.$$

En este conjunto, un elemento $q \in S$ es primo artificial si y solo si es un primo gaussiano.

La primalidad gaussiana es una noción absoluta, definida en todo $\mathbb{Z}[i]$, mientras que la primalidad artificial es relativa al conjunto S . Ambos conceptos coinciden exactamente cuando el conjunto S , además de excluir las unidades, es cerrado bajo divisibilidad: si $z \in S$, entonces todo divisor no asociado de z también pertenece a S . Bajo esta condición, ningún elemento compuesto puede ser primo artificial, ya que siempre posee un divisor propio dentro del conjunto.

En consecuencia, si $S \subseteq \mathbb{Z}[i]$ no contiene a las unidades $\{1, -1, i, -i\}$ y preserva la estructura de divisibilidad del anillo, el conjunto de primos artificiales coincide exactamente con el conjunto de primos gaussianos. Si alguna de estas condiciones no se cumple, pueden aparecer primos artificiales que no son primos gaussianos, reflejando el carácter contextual de la primalidad artificial.

8) Números algebraicos y primos algebraicos

Un número algebraico es un número (real o complejo) que es raíz de algún polinomio no nulo con coeficientes enteros. Formalmente esto es: α es un número algebraico si existe un polinomio

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

con $a_i \in \mathbb{Z}, a_n \neq 0$, tal que

$$p(\alpha) = 0. \quad (3)$$

gaussianos.

✓ Enteros algebraicos en un UFD

$$S = \mathcal{O}_k \setminus U(\mathcal{O}_k)$$

Coincidencia total entre primos artificiales e irreducibles algebraicos.

La primalidad artificial coincide con todas las nociones conocidas de primalidad exactamente cuando el conjunto considerado reproduce íntegramente la estructura de divisibilidad de la teoría subyacente y excluye las unidades. En este régimen, ver Fig. 3, la primalidad artificial no genera “nuevos primos”, sino que unifica conceptualmente los existentes.

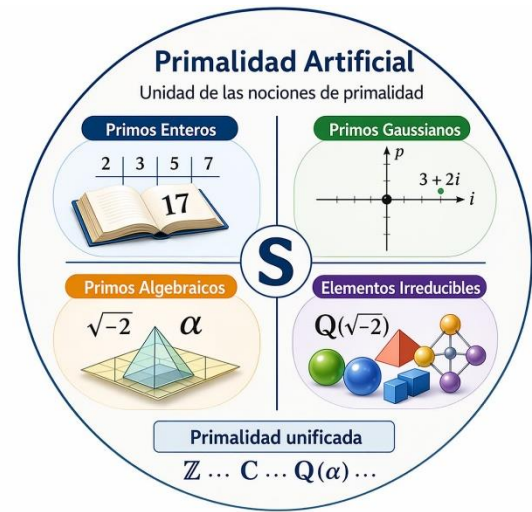


Fig. 3 La primalidad artificial unifica todas las formas de primalidad conocidas.

Ejemplos

- $\sqrt{2}$ es algebraico, porque es raíz de $x^2 - 2 = 0$.
- $i = \sqrt{-1}$ es algebraico, raíz de $x^2 + 1 = 0$.
- Todo número racional es algebraico (por ejemplo, $\frac{3}{2}$ es raíz de $2x - 3 = 0$).

Ejemplos de números no algebraicos

- π, e son números trascendentes, es decir, no algebraicos.

a) Enteros algebraicos

Antes de hablar de primos algebraicos, necesitamos este concepto.

Un entero algebraico es un número algebraico que es raíz de un polinomio mónico (coeficiente líder igual a 1) con coeficientes enteros.

Ejemplos

- $\sqrt{2}$ es un entero algebraico (raíz de $x^2 - 2 = 0$).
- $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ es entero algebraico (raíz de $x^2 - x - 1 = 0$).
- Todo entero usual ($\mathbb{Z}$) es un entero algebraico.

b) Primos algebraicos

El concepto de primo algebraico aparece en el contexto de los anillos de enteros algebraicos, como $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ o, más generalmente, el anillo de enteros de un cuerpo numérico.

Un primo algebraico es un elemento que:

- no es una unidad,
- no es cero,
- y no puede factorizarse en el anillo salvo por unidades y elementos asociados.

Es el análogo de un número primo, pero dentro de un anillo de enteros algebraicos.

Definición (irreducible)

Un entero algebraico α es primo algebraico si:

$$\alpha = \beta\gamma \Rightarrow \beta \text{ o } \gamma \text{ es una unidad.}$$

(En dominios de factorización única, “primo” e “irreducible” coinciden).

Ejemplos de primos algebraicos

En $\mathbb{Z}[i]$ (enteros gaussianos)

- $1 + i$ es primo algebraico.

Los primos usuales pueden dejar de ser primos en anillos algebraicos.

9) *Primos artificiales en distintos conjuntos*

✓ Enteros ($\mathbb{Z}$)

- $S = \mathbb{Z}_{>1}$
- Sin unidades, cerrado bajo divisibilidad, primos artificiales = primos clásicos.

✓ Enteros gaussianos ($\mathbb{Z}[i]$)

- $S = \mathbb{Z}[i] \setminus \{\pm 1, \pm i\}$
- Dominio euclideo, primos artificiales = primos

V. MÁS ALLÁ DE LA FLEXIBILIDAD: LA PRIMALIDAD ARTIFICIAL COMO PRINCIPIO RELACIONAL

Decir que la primalidad artificial es flexible es correcto, pero insuficiente. Esta flexibilidad no es un defecto ni una arbitrariedad: es la manifestación de un principio más profundo.

La primalidad artificial revela que las propiedades aritméticas no son absolutas, sino relativas al conjunto S en el que se definen.

Cada conjunto es un “universo matemático” propio, con leyes internas específicas.

• Ejemplo fundamental: conjunto de dos elementos Sea

$$S = \{a, b\}, \quad a > b, a, b \in \mathbb{Z}^+.$$

La interacción entre conjunto y primalidad produce tres escenarios cualitativamente distintos, completamente

determinados por el valor de $\text{gcd}(a, b)$.

Caso I: $\text{gcd}(a, b) = 1$

- a y b son coprimos.
- Ningún elemento del conjunto divide al otro.
- Ambos elementos son primos artificiales en S .

Este caso coincide con la noción clásica de primalidad relativa, ampliamente estudiada en teoría de números.

Caso II: $1 < \text{gcd}(a, b) < b$

- a y b comparten un divisor común que no pertenece a S .
- Desde la aritmética externa no son coprimos.
- Sin embargo, dentro de S ninguno divide al otro.

Ambos elementos siguen siendo primos artificiales, aunque no sean coprimos clásicamente.

Este caso no tiene análogo directo en la teoría clásica de los primos y muestra claramente el enfoque de la primalidad artificial.

Caso III: $\text{gcd}(a, b) = b$

- b divide a a .
- Existe divisibilidad interna en el conjunto.

En este caso solo b es primo artificial en S .

Este análisis muestra que:

La primalidad artificial no es solo una generalización técnica. Es una teoría relacional, donde las propiedades numéricas: dependen del conjunto, emergen de las interacciones entre sus elementos, y pueden cambiar radicalmente al cambiar el conjunto S .

Por eso, no se trata simplemente de que la primalidad artificial sea flexible, sino de que: cada conjunto define su propia aritmética interna, y la primalidad artificial es la herramienta que permite estudiarla.

VI. PRIMALIDAD ARTIFICIAL INDUCIDA POR UN DOMINIO DE DIVISORES

Sea S un conjunto no vacío y D un dominio numérico fijado que representa el conjunto de valores admisibles para las divisiones entre los elementos de S . Para $q, d \in S$, se considera válida la división $\frac{q}{d}$ únicamente si el cociente pertenece al dominio D . Un elemento $q \in S$ se denomina primo artificial relativo al par (S, D) si no existe $d \in S$, con $d \neq q$, tal que

$$\frac{q}{d} \in D.$$

En este sentido, la primalidad artificial queda determinada por la imposibilidad de expresar a q como una división interna a S cuyo resultado permanezca dentro del dominio divisorio D .

Cuando S es un subconjunto de los enteros positivos y D coincide con el dominio entero, esta definición reproduce la noción clásica de primalidad: un entero es primo si no puede dividirse por otro entero del conjunto sin abandonar el dominio de los enteros. Sin embargo, al considerar conjuntos no enteros, la estructura de la primalidad se modifica sustancialmente según el dominio divisorio adoptado.

Por ejemplo, para $S = \{0.5, 0.8, 1.3, 2.1, 3.4, 5.5, \dots\}$, la elección de D como el dominio de los enteros, los racionales o de un intervalo real definido, genera configuraciones distintas de primalidad artificial. Un mismo elemento puede admitir o no divisiones internas válidas dependiendo de si el cociente permanece dentro del dominio divisorio considerado.

Esta formulación sitúa al conjunto D como el elemento estructural clave del sistema (S, D) , desplazando el foco de los divisores hacia los valores admisibles de las divisiones. De este modo, la primalidad artificial se interpreta como una propiedad emergente del dominio de divisiones elegido, lo que permite explorar nuevas estructuras de indivisibilidad en conjuntos numéricos arbitrarios.

En particular

- En anillos: $D = S \rightarrow$ recuperas divisibilidad interna.
- En dominios algebraicos: $D = \mathcal{O}_k \rightarrow$ primos algebraicos.
- En modelos aplicados: D restringido $\rightarrow$ nuevos criterios de indivisibilidad.

VII. APLICACIONES DE LOS NÚMEROS PRIMOS ARTIFICIALES (NPA) EN LA ENSEÑANZA DE MATEMÁTICAS, COMPUTACIÓN E INGENIERÍA

1. Implicaciones para la formación STEM

Los números primos artificiales constituyen un modelo conceptual que encaja de manera natural dentro de la educación STEM/STEAM, ya que trasladan una noción clásica de la teoría de números hacia un entorno dinámico, relacional y dependiente del contexto. Esta transición permite que los estudiantes no solo trabajen con propiedades numéricas, sino con estructuras matemáticas definidas por reglas internas explícitas, lo cual es fundamental en la formación científica contemporánea.

En este sentido, sus implicaciones pueden ampliarse de la siguiente manera:

- Integración de disciplinas de forma estructural:
Los NPA permiten conectar matemáticas discretas, álgebra abstracta, teoría de conjuntos y programación en un único marco operativo. Esto facilita que el estudiante comprenda que los objetos matemáticos no existen de forma aislada, sino que dependen de sistemas de definición. Además, el mismo modelo puede implementarse en lenguajes de programación,

visualización gráfica y simulación de sistemas, reforzando la conexión entre teoría y práctica.

- Desarrollo de pensamiento crítico y estructural:

El análisis de primalidad artificial obliga al estudiante a cuestionar qué significa realmente “ser primo”, desplazando la atención desde una definición memorística hacia una construcción lógica basada en relaciones de divisibilidad. Esto fortalece habilidades como la identificación de invariantes, la construcción de contraejemplos y la formulación de hipótesis matemáticas dentro de conjuntos arbitrarios.

- Fomento de la investigación formativa y exploración matemática:

Los NPA constituyen un entorno ideal para la generación de proyectos de investigación en niveles preuniversitarios y universitarios iniciales. Los estudiantes pueden diseñar sus propios conjuntos S , definir reglas de divisibilidad y estudiar cómo cambian las estructuras resultantes. Esto promueve el aprendizaje basado en descubrimiento, donde las matemáticas se convierten en un proceso activo de exploración.

- Visualización, experimentación y modelado computacional:

La naturaleza discreta del concepto permite su representación mediante grafos, matrices de divisibilidad y simulaciones dinámicas. Esto facilita la comprensión visual de estructuras abstractas, permitiendo observar cómo emergen patrones de primos artificiales, cómo se eliminan elementos en procesos tipo criba y cómo varían las estructuras al modificar el conjunto base.

2. Enfoque computacional de los NPA

Desde la computación, los números primos artificiales ofrecen un marco ideal para el desarrollo del pensamiento algorítmico. A diferencia de los primos clásicos, cuya búsqueda se realiza sobre un dominio fijo, los primos artificiales requieren definir previamente el conjunto S y establecer reglas explícitas de pertenencia y divisibilidad. Este proceso permite trabajar con:

- Diseño de algoritmos personalizados (cribas artificiales).

- Análisis de complejidad en función del conjunto de entrada.
- Programación de estructura de datos para representar conjuntos definidos por fórmulas.
- Comparación entre algoritmos clásicos y algoritmos adaptados a dominios restringidos.

En el ámbito educativo, esto resulta especialmente valioso para la enseñanza de programación, ya que el estudiante no solo implementa un algoritmo, sino que reflexiona sobre cómo la definición matemática impacta directamente en la lógica computacional.

3. Enfoque pedagógico de los números primos artificiales

Desde el punto de vista educativo, los NPA constituyen una herramienta didáctica con valor conceptual. Su principal aporte radica en transformar la primalidad en una noción relativa, depende del conjunto y de las reglas internas de divisibilidad, lo cual favorece una comprensión más profunda de lo que significa definir un objeto matemático. Entre sus aportes pedagógicos más relevantes se encuentran:

- La superación de una visión dogmática de los números primos como una lista fija.
- El fortalecimiento del pensamiento lógico mediante el análisis de condiciones necesarias y suficientes.
- Compresión del papel del conjunto de referencia en la definición de propiedades matemáticas.
- La transición gradual desde la aritmética escolar hacia el razonamiento abstracto propio del álgebra y la teoría de conjuntos.

4. Aplicaciones en ingeniería y modelado

En ingeniería, los NPA pueden interpretarse como elementos estructuralmente irreducibles dentro de un sistema restringido. Esta interpretación resulta útil en contextos de modelado, donde no todos los elementos del universo matemático son admisibles.

Algunas aplicaciones conceptuales incluyen:

- Modelo de sistemas discretos con restricciones internas:
Los NPA permiten representar sistemas donde no todos los estados son admisibles y donde las transiciones están gobernadas por relaciones de divisibilidad o dependencia estructural. Esto es útil en sistemas digitales, redes discretas y procesos de control.

- Análisis de componentes fundamentales dentro de redes:
En redes complejas, los primos artificiales pueden interpretarse como nodos fundamentales que no pueden descomponerse en términos de otros nodos dentro del sistema. Esto es análogo a identificar “unidades estructurales mínimas” en redes de comunicación o transporte.
- Codificación estructural basada en subconjuntos restringidos:
Los NPA permiten diseñar esquemas de codificación donde los elementos válidos dependen de reglas internas del sistema. Esto puede ser útil en criptografía conceptual, diseño de códigos y sistemas de verificación.
- Estudio de robustez y dependencia interna en sistemas modulares:
El análisis de qué elementos son irreducibles dentro de un sistema permite estudiar su estabilidad estructural. Sistemas con alta dependencia de elementos no primos artificiales pueden ser más vulnerables a fallos estructurales.

VIII. JUSTIFICACIÓN

Bajo elecciones adecuadas de S , la primalidad artificial contiene y unifica todas las nociones conocidas de primos. Los números primos enteros, los primos gaussianos, los primos algebraicos y los elementos irreducibles aparecen como casos particulares cuando S excluye las unidades y es cerrado bajo divisibilidad. En estas condiciones, no surgen primos artificiales “nuevos”, y ambos conceptos coinciden exactamente. La principal fortaleza de la primalidad artificial es su flexibilidad conceptual. Permite estudiar nociones de primalidad en cualquier conjunto numérico — enteros, complejos, números algebraicos o estructuras más exóticas— incluso en contextos donde no existe factorización única. De este modo, la primalidad artificial actúa como un marco unificador que explica todas las formas de primalidad conocidas como manifestaciones de un mismo principio dependiente del conjunto.

Aunque su fin no es sustituirla, los números primos artificiales amplían la noción clásica de primalidad y la convierten en una herramienta de análisis estructural. Sus aplicaciones matemáticas incluyen el estudio de conjuntos restringidos, la generalización de conjeturas y la exploración de dominios alternativos. Desde el punto de vista pedagógico, favorecen la comprensión profunda de las definiciones, el desarrollo del pensamiento abstracto y la formación investigativa.

El enfoque en computación e ingeniería permite ilustrar la aplicabilidad práctica de los NPA, mostrando cómo

conceptos teóricos pueden transformarse en algoritmos, modelos y sistemas estructurales. En la educación STEM, los NPA constituyen un recurso interdisciplinario que potencia el aprendizaje, fomenta la investigación formativa y prepara a los estudiantes para abordar problemas complejos de manera crítica y analítica.

IX. CONCLUSIÓN

La noción de números primos artificiales permite reinterpretar la primalidad como una propiedad estructural dependiente del conjunto en el que se define la relación de divisibilidad.

En este trabajo se ha mostrado que esta perspectiva unifica, bajo un mismo marco conceptual, diversas nociones de primalidad presentes en estructuras como los enteros, los enteros gaussianos y los anillos de enteros algebraicos. El enfoque propuesto no sustituye la teoría clásica de los números primos, sino que la extiende al análisis de subconjuntos con estructuras de divisibilidad restringidas, donde la noción de irreducibilidad adquiere un carácter relativo.

Asimismo, se evidencian posibles aplicaciones en contextos computacionales, educativos y de modelado, lo que abre líneas futuras de investigación en estructuras algebraicas discretas.

AGRADECIMIENTO/RECONOCIMIENTO

Los autores, José Acevedo Jiménez y Francisco del Rosario Sánchez Fernández, expresan su más sincero agradecimiento a Mercedes María Jiménez Almonte y a José Acevedo (†) por la confianza depositada, el apoyo constante y los sabios consejos que acompañaron su desarrollo personal y académico a lo largo de este artículo. De igual manera, extienden un especial agradecimiento a Danilka Hernández Ureña por su dedicación, paciencia y acompañamiento permanente durante la elaboración del presente trabajo, así como por el respaldo continuo, fundamental para la culminación exitosa del proyecto desarrollado.

Asimismo, reconocen a la Universidad Tecnológica de Santiago (UTESA) como institución educativa, destacando el valioso rol de su Consejo Académico y Directivo, así como de sus representantes, cuya gestión y orientación contribuyen al fortalecimiento de la calidad académica e investigativa.

De manera particular, agradecen al Dr. Luis B. Gómez Luciano, Vicerrector de Investigación y Producción Científica de la Universidad Tecnológica de Santiago (UTESA, Sede), por su apoyo al desarrollo de la investigación y la promoción del conocimiento científico. Se incluye un especial reconocimiento al Instituto Avanzado de Tecnologías en Ciencias e Innovación (IATECI) por su contribución al fomento de la investigación, el desarrollo tecnológico y la innovación, elementos clave en la realización del presente trabajo.

Se extiende un reconocimiento al ingeniero Roberto Augusto Durán Vargas por el esfuerzo realizado y el valioso apoyo brindado en la gestión de las condiciones necesarias que hicieron posible la concreción de este artículo.

Se expresa además un profundo agradecimiento a Francisco Antonio Sánchez y Esperanza Argentina Fernández por su amor, formación en valores y apoyo incondicional a lo largo de la trayectoria académica y personal.

REFERENCIAS

- [1] J. S. Milne, *Algebraic Number Theory*, Course Notes, University of Michigan, 2014. [Online]. Available: <https://www.jmilne.org/math/CourseNotes/ANT.pdf>
- [2] B. D. Sittinger, “Quotients of Primes in an Algebraic Number Ring,” *arXiv preprint arXiv:1607.08319*, 2016. [Online]. Available: <https://arxiv.org/abs/1607.08319>
- [3] W. Stein, *Algebraic Number Theory: A Computational Approach*, Graduate Texts in Mathematics, American Mathematical Society, 2012.
- [4] D. Pinto Prieto, *Teoría algebraica de números*, Trabajo Fin de Grado, Grado en Matemáticas, Universidad de Oviedo, Oviedo, España, Jun. 2017. [Online]. Available: <http://hdl.handle.net/10651/47540>
- [5] W. Mora-Flores, *Introducción a la teoría de números*, Cartago, Costa Rica, 2014. [Online]. Available: <https://www.sacaba.gob.bo/images/wsacaba/pdf/libros/matematicas/Introduccion%20a%20la%20Teoria%20de%20Numeros.pdf>
- [6] R. Crandall and C. B. Pomerance, *Prime Numbers: A Computational Perspective*, 2^a ed., Springer-Verlag, New York, NY, USA, 2005. ISBN: 978-0-387-25282-7.
- [7] P. R. A. Campos, V. M. de Oliveira, R. Giro, y D. S. Galvão, “The emergence of prime numbers as the result of evolutionary strategy,” *arXiv: q-bio/0406017*, Jun. 7, 2004. [Online]. Available: <https://arxiv.org/pdf/q-bio/0406017>
- [8] G. H. Hardy and E. M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*, 6th ed. Oxford, UK: Oxford University Press, 2008.
- [9] J. Acevedo Jiménez, “Artificial Prime Numbers: A Relative Perspective on Primality,” in *Proceedings of the 23rd LACCEI International Multi-Conference for Engineering, Education and Technology (LACCEI 2025)*, 2025, doi: <https://dx.doi.org/10.18687/LACCEI2025.1.1.1871>.
- [10] P. Ribenboim, *The New Book of Prime Number Records*. New York, NY, USA: Springer, 1996.
- [11] N. Biggs, *Discrete Mathematics*, 2nd ed. Oxford, UK: Oxford University Press, 2002.
- [12] I. Niven, H. S. Zuckerman, and H. L. Montgomery, *An Introduction to the Theory of Numbers*, 5th ed. New York, NY, USA: Wiley, 1991.
- [13] J.-P. Serre, *A Course in Arithmetic*. New York, NY, USA: Springer, 1973.