

Differential modeling of learning-forgetting dynamics in learning analytics with a predictive approach

Hendy Maier Pérez Barrera¹✉; Roberto Barrera Jimenez²✉; Ennio Jesús Mérida Córdova³✉

¹Universidad Bolivariana del Ecuador, Ecuador, hmperezb@ube.edu.ec

²Universidad Bolivariana del Ecuador, Ecuador, rbarreraj@ube.edu.ec

³Universidad Bolivariana del Ecuador, Ecuador, ejmeridac@ube.edu.ec

Abstract— *The present study is guided by the following scientific question: How can the evolution of knowledge over time be modeled through differential equations by deriving predictive metrics within learning analytics? Based on this inquiry, the general objective is to model the evolution of knowledge over time using differential equations in order to derive predictive metrics in learning analytics. The study follows a quantitative approach with a non-experimental, longitudinal design. The sample consisted of a cohort of 59 students enrolled in the course Linear Algebra and Analytic Geometry. A total of 22 assessment activities recorded in Moodle were normalized to the [0,1] scale and organized into six weekly blocks to construct a temporal series of academic performance. Using these data, a differential learning-forgetting model was fitted, integrating a learning rate and a forgetting rate. The estimated parameters ($a = 0.42$; $b = 0.15$) allowed the projection of an equilibrium level consistent with the final observed performance (0.73) and the derivation of predictive metrics, such as convergence half-life and the projected time horizon for crossing academic proficiency thresholds. The findings confirm the dynamic nature of learning and demonstrate the relevance of the model as a tool to support data-informed pedagogical decision-making.*

Keywords— *Learning analytics; differential equations; knowledge modeling; predictive metrics; learning-forgetting dynamics.*

Modelado diferencial de la dinámica aprendizaje-olvido en la analítica del aprendizaje con enfoque predictivo

Hendy Maier Pérez Barrera¹; Roberto Barrera Jimenez²; Ennio Jesús Mérida Córdova³

¹Universidad Bolivariana del Ecuador, Ecuador, hmperezb@ube.edu.ec

²Universidad Bolivariana del Ecuador, Ecuador, rbarreraj@ube.edu.ec

³Universidad Bolivariana del Ecuador, Ecuador, ejmeridac@ube.edu.ec

Resumen– La presente investigación se orienta por la siguiente pregunta científica: ¿Cómo modelar, mediante ecuaciones diferenciales, la evolución del conocimiento en el tiempo derivando métricas predictivas en la analítica del aprendizaje? Con base en esta interrogante, el objetivo general es modelar mediante ecuaciones diferenciales, la evolución del conocimiento en el tiempo derivando métricas predictivas en la analítica del aprendizaje. El estudio se enmarca en el enfoque cuantitativo, con diseño no experimental y longitudinal. Se trabajó con una cohorte de 59 estudiantes del curso Álgebra Lineal y Geometría Analítica. A partir de 22 actividades evaluativas registradas en Moodle, normalizadas en la escala [0,1] y organizadas en seis bloques semanales, se construyó una serie temporal del desempeño académico. Con dichos datos se ajustó un modelo diferencial aprendizaje-olvido que integra una tasa de aprendizaje y una tasa de olvido. Los parámetros estimados ($a = 0,42$; $b = 0,15$) permitieron proyectar un nivel de equilibrio coherente con el desempeño final observado (0,73) y derivar métricas predictivas, como la semivida de convergencia y el horizonte temporal para el cruce de umbrales de suficiencia académica. Los resultados confirman la naturaleza dinámica del aprendizaje y evidencian la pertinencia del modelo como herramienta para fundamentar decisiones pedagógicas basadas en datos.

Palabras claves– Analítica del aprendizaje; ecuaciones diferenciales; modelado del conocimiento; métricas predictivas; aprendizaje-olvido.

I. INTRODUCCIÓN

La analítica del aprendizaje se ha consolidado como un campo interdisciplinario orientado a la medición, recopilación y análisis de datos educativos con el propósito de comprender y optimizar los procesos formativos. Desde sus primeras formulaciones, se ha enfatizado la necesidad de integrar técnicas analíticas con fundamentos pedagógicos sólidos [1]. Sin embargo, gran parte de los desarrollos contemporáneos en este ámbito han privilegiado modelos predictivos centrados en resultados finales, tales como la probabilidad de aprobación o el riesgo de deserción, dejando en segundo plano la modelación explícita de la dinámica interna del aprendizaje.

Diversos estudios han mostrado que el aprendizaje no constituye un fenómeno estático, sino un proceso temporal sujeto a consolidación y deterioro. La evidencia clásica sobre la memoria humana, particularmente la curva del olvido descrita por Ebbinghaus [2], indica que la retención disminuye de forma sistemática cuando no existen mecanismos de

refuerzo. Esta formulación ha sido confirmada en investigaciones contemporáneas, como la replicación experimental realizada en [3], quienes demostraron que la dinámica de pérdida de información mantiene un comportamiento aproximadamente exponencial a largo plazo.

En el ámbito de la educación superior, los estudios longitudinales han evidenciado que la incorporación de información temporal mejora significativamente la capacidad explicativa de los modelos analíticos. En [4] mostraron que los enfoques dinámicos superan a los modelos estáticos tradicionales cuando se analizan trayectorias de desempeño en matemáticas universitarias. Estos hallazgos sugieren que el aprendizaje debe concebirse como una variable dependiente del tiempo, cuya evolución puede ser formalmente modelada.

Desde una perspectiva matemática, la literatura sobre curvas de aprendizaje ha identificado que tanto funciones exponenciales como modelos de ley de potencia pueden describir adecuadamente el progreso del rendimiento en tareas cognitivas [5]. No obstante, estas aproximaciones suelen centrarse en la mejora acumulativa y no integran explícitamente la dimensión del deterioro cognitivo. En consecuencia, persiste una brecha teórica en la formalización conjunta de aprendizaje y olvido dentro de un mismo sistema dinámico.

Paralelamente, la investigación en psicología educativa ha demostrado que la retención puede fortalecerse mediante prácticas como la recuperación activa y la distribución temporal del estudio. La evidencia meta-analítica confirma que espaciar episodios de práctica de recuperación produce beneficios consistentes en retención a largo plazo [6]. Asimismo, revisiones recientes sintetizan que la combinación de práctica espaciada y recuperación activa constituye una de las estrategias más robustas para sostener el aprendizaje en el tiempo [7]. Estos resultados refuerzan la necesidad de incorporar modelos que representen explícitamente la interacción entre consolidación y deterioro.

La modelación mediante ecuaciones diferenciales ofrece un marco formal adecuado para describir procesos donde la tasa de cambio de una variable depende simultáneamente de fuerzas opuestas. Aplicado al aprendizaje, este enfoque permite representar la evolución del conocimiento como resultado de la interacción entre adquisición y olvido,

proporcionando parámetros interpretables desde el punto de vista pedagógico.

A diferencia de los modelos de aprendizaje automático que privilegian la precisión predictiva, pero cuya estructura interna puede resultar opaca, la formulación diferencial facilita la interpretación conceptual de los parámetros estimados. En línea con la preocupación por la interpretabilidad en analítica educativa [1], [4], este enfoque permite traducir resultados matemáticos en indicadores pedagógicos operativos.

A pesar del crecimiento sostenido de la analítica del aprendizaje en educación superior, la mayoría de los estudios longitudinales continúan privilegiando modelos descriptivos o predictivos sin formalización estructural explícita de la dinámica aprendizaje-olvido [1], [4]. Persiste, por tanto, una brecha metodológica en la modelación matemática integrada de adquisición y deterioro dentro de contextos reales de aula universitaria. Esta limitación resulta especialmente relevante en asignaturas de alta densidad conceptual y fuerte interdependencia temática, como Álgebra Lineal y Geometría Analítica, donde la acumulatividad del conocimiento exige estabilidad temporal y consolidación progresiva de estructuras cognitivas.

La presente investigación se orienta por la siguiente pregunta científica: ¿Cómo modelar, mediante ecuaciones diferenciales, la evolución del conocimiento en el tiempo derivando métricas predictivas en la analítica del aprendizaje? Con base en esta interrogante, el objetivo general es modelar mediante ecuaciones diferenciales, la evolución del conocimiento en el tiempo derivando métricas predictivas en la analítica del aprendizaje.

Más allá de su valor aplicado, esta investigación propone una contribución conceptual al campo de la analítica del aprendizaje: la formalización explícita de la dinámica aprendizaje-olvido mediante una ecuación diferencial estructuralmente interpretable. Mientras la literatura dominante privilegia modelos predictivos de alto rendimiento basados en aprendizaje automático, existe una necesidad creciente de modelos explicativos que integren teoría cognitiva, formalización matemática e interpretación pedagógica [1], [4].

METODOLOGÍA

El estudio se desarrolló bajo un enfoque cuantitativo con diseño no experimental, longitudinal y observacional, orientado a modelar la dinámica temporal del desempeño académico en un contexto real de aula universitaria. La unidad de análisis fue una cohorte completa de estudiantes ($n = 59$) matriculados en la asignatura Álgebra Lineal y Geometría Analítica durante un período académico regular. Se optó por un censo, en lugar de muestreo probabilístico, con el propósito de preservar la integridad ecológica del sistema educativo analizado y evitar sesgos de selección.

El carácter longitudinal del diseño permitió observar la evolución del desempeño a lo largo de seis semanas consecutivas, lo que posibilita aproximar la dinámica de

aprendizaje-olvido en un intervalo temporal acotado. Si bien el número de puntos temporales es reducido, el intervalo uniforme ($\Delta t = 1$ semana) garantiza consistencia en la modelación de la trayectoria promedio.

La fuente primaria de información fue el libro de calificaciones exportado desde la plataforma Moodle en formato tabular estructurado. Para evitar redundancias y doble conteo, se excluyeron todas las columnas correspondientes a totales acumulados y se conservaron exclusivamente las actividades evaluativas atómicas (lecciones, foros, glosarios, tareas, cuestionarios y examen final), resultando un total de 22 actividades distribuidas a lo largo del período analizado.

Cada calificación fue normalizada a la escala continua $[0,1]$ mediante la razón entre puntaje obtenido y puntaje máximo posible. Posteriormente, las actividades fueron agrupadas en seis bloques semanales preservando la secuencia temporal del gradebook como proxy del momento de evaluación.

Para cada estudiante se construyó una serie semanal $K_1, K_2, \dots, K_6$, calculada como promedio simple de las calificaciones normalizadas dentro de cada bloque. En los casos donde existían ponderaciones oficiales establecidas en el sílabo, se aplicó promedio ponderado. Los valores faltantes no fueron imputados con cero para evitar sesgo negativo artificial. En su lugar, se excluyeron del promedio semanal correspondiente y se documentó la proporción de ausencia por bloque. Se estableció como criterio mínimo para estimaciones individuales contar con al menos cinco observaciones semanales válidas; los casos con menor evidencia se integraron únicamente en el ajuste agregado de cohorte.

El nivel de conocimiento $K(t)$ se operacionalizó como el desempeño académico promedio semanal normalizado. Se reconoce explícitamente que esta medida constituye un proxy observable del conocimiento latente, dado que el constructo cognitivo no es directamente medible. No obstante, en contextos formales de educación superior, el desempeño acumulado en actividades evaluativas estructuradas representa un indicador consistente del dominio conceptual progresivo.

Se asume como limitación que la heterogeneidad de instrumentos evaluativos puede introducir variabilidad no atribuible exclusivamente al proceso de aprendizaje-olvido. La normalización a $[0,1]$ permite homogeneizar escalas, aunque no elimina completamente posibles diferencias de dificultad entre actividades.

La dinámica aprendizaje-olvido se modeló mediante la ecuación diferencial ordinaria de primer orden:

$$\frac{dK}{dt} = a(1 - K) - bK \quad (3)$$

Donde,

- $a > 0$ representa la tasa de aprendizaje,
- $b > 0$ representa la tasa de olvido,
- $K(t)$ denota el nivel de conocimiento en el tiempo.

El modelo asume que el aprendizaje es proporcional a la distancia respecto al dominio máximo $(1 - K)$, mientras que el olvido es proporcional al nivel de conocimiento acumulado. La solución analítica cerrada utilizada para la estimación es:

$$K(t) = K^* + (K_1 - K^*) e^{-(a+b)(t-1)} \quad (4)$$

donde el equilibrio dinámico es:

$$K^* = \frac{a}{a+b} \quad (5)$$

Dado que las observaciones empíricas corresponden a mediciones discretas semanales, la formulación diferencial continua se empleó como aproximación funcional del proceso subyacente. La estimación se realizó evaluando la solución analítica del modelo en los puntos discretos $t=1, \dots, 6$. Bajo intervalo uniforme ($\Delta t = 1$ semana), esta estrategia es equivalente a una formulación en diferencias finitas de primer orden. Se asume que la dinámica del aprendizaje es continua en su naturaleza, aunque observable en cortes temporales discretos.

Los parámetros a y b fueron estimados mediante mínimos cuadrados no lineales con restricciones $a, b > 0$, utilizando el algoritmo de optimización implementado en `scipy.optimize`. El ajuste se realizó sobre la trayectoria promedio de cohorte. La calidad del ajuste se evaluó mediante:

- Error cuadrático medio (RMSE)
- Coeficiente de determinación (R^2)
- Análisis de residuos
- Análisis de sensibilidad excluyendo el bloque final.

Se calcularon intervalos de confianza al 95 % para ambos parámetros mediante aproximación basada en la matriz Hessiana.

A partir del ajuste no lineal con restricciones ($a, b > 0$) se estimaron las tasas de aprendizaje (a) y de olvido (b), así como indicadores derivados: equilibrio K^* , semivida de convergencia $t_{1/2} = \ln(2)/(a+b)$ y tiempo a umbral t_θ ($\theta=0,70$). El procesamiento se realizó en Python, pandas y numpy para limpieza, normalización y agregación semanal; `scipy.optimize` para mínimos cuadrados no lineales; y `matplotlib/seaborn` para la visualización (trayectorias semanales, abanicos de predicción y distribuciones de parámetros). La validación interna incluyó verificación de la consistencia de la operacionalización, validez convergente (contrastando K_6 y K^* con el Examen final) y análisis de sensibilidad excluyendo la semana 6.

Si bien el número de puntos temporales ($n = 6$) se considera reducido desde una perspectiva clásica de series temporales, el propósito del estudio no es estimar procesos estocásticos de alta frecuencia, sino aproximar la dinámica estructural subyacente del aprendizaje dentro de un intervalo académico delimitado. La estabilidad del ajuste se evaluó mediante análisis de sensibilidad excluyendo el bloque final, así como mediante la

estimación de intervalos de confianza derivados de la matriz de covarianza del modelo no lineal. En consecuencia, los resultados deben interpretarse como evidencia estructural exploratoria cuya estabilidad inferencial se encuentra condicionada por la longitud de la serie observada.

Se realizó validación convergente contrastando el equilibrio estimado K^* con el desempeño observado en el examen final, verificándose la estabilidad del modelo mediante análisis de sensibilidad excluyendo el último bloque semanal. No se realizó validación externa fuera de muestra debido al tamaño limitado de la serie temporal, lo cual se reconoce como limitación metodológica.

El uso de datos académicos con fines de investigación se realizó bajo consentimiento informado institucional. Se aplicó pseudonimización de registros y supresión de metadatos personales. Los resultados se reportan de manera agregada y los datos se almacenan en repositorio cifrado de acceso restringido.

RESULTADOS

La cohorte analizada estuvo conformada por 59 estudiantes matriculados en la asignatura Álgebra Lineal y Geometría Analítica. El conjunto de datos incluyó 22 actividades atómicas, distribuidas en seis bloques semanales que abarcaron lecciones, cuestionarios, foros, glosarios, tareas prácticas y un examen final. Todas las calificaciones fueron normalizadas a la escala $[0,1]$, preservando la secuencia del gradebook como proxy temporal, con el propósito de capturar la dinámica del desempeño estudiantil.

En la Tabla 1 se presentan los estadísticos descriptivos de las series semanales ($K_1, \dots, K_6$). Los resultados muestran que los valores promedio de desempeño se situaron entre 0,64 y 0,75, lo que indica un nivel de dominio moderado con oscilaciones a lo largo del curso. Las desviaciones estándar (entre 0,37 y 0,41) evidencian una heterogeneidad considerable en la cohorte, con estudiantes que alcanzaron la máxima calificación y otros que no registraron actividad en determinados bloques.

Tabla 1
Estadísticos descriptivos de las series semanales ($K_1, \dots, K_6$) para valores de máximo y mínimo $[0,1]$

Bloque	Media	Desv. Est.	con 0	con 1
K1	0.72	0.41	13	33
K2	0.71	0.38	12	8
K3	0.75	0.38	10	22
K4	0.64	0.39	13	1
K5	0.73	0.40	11	13
K6	0.73	0.38	11	1

El análisis revela una polarización en los resultados: mientras un grupo de estudiantes alcanzó desempeños perfectos en varios bloques (por ejemplo, 33 estudiantes en K1), otro grupo presentó inactividad o ausencia completa de evidencias (hasta 13 estudiantes con $K=0$ en diferentes semanas). Esta dualidad explica la amplitud de las desviaciones estándar y refleja dos tendencias contrastantes: estudiantes altamente cumplidos y estudiantes en riesgo de rezago académico.

En términos globales, se observa un incremento progresivo durante las tres primeras semanas (K1- K3), seguido de una caída en la cuarta semana (K4=0,64) y una recuperación posterior (K5-K6). Estas oscilaciones reflejan la naturaleza dinámica del aprendizaje, con momentos de consolidación y de retroceso, lo que justifica la pertinencia de aplicar un modelo diferencial aprendizaje-olvido en la siguiente fase del análisis.

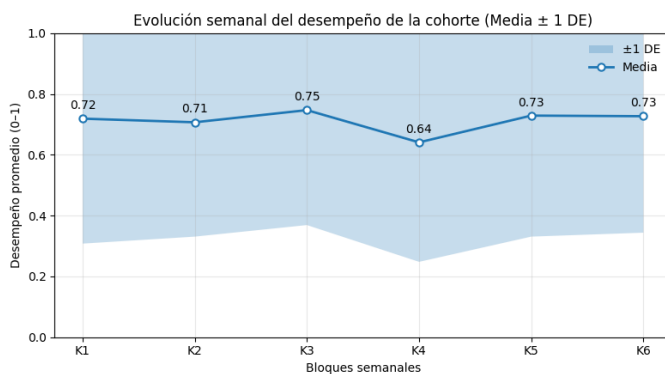


Figura 1. Evolución semanal del desempeño promedio de la cohorte (n=59). La línea indica la media y la banda el intervalo de ± 1 desviación estándar.

El desempeño promedio de la cohorte presentó un incremento progresivo en los tres primeros bloques semanales, con medias de 0,72 en K1, 0,71 en K2 y 0,75 en K3. En la semana cuatro se observó una disminución del promedio hasta 0,64, seguida de una recuperación en los bloques cinco (0,73) y seis (0,73), donde los valores se mantuvieron estables. La dispersión de los datos, expresada en ± 1 desviación estándar, mostró valores comprendidos entre 0,37 y 0,41 en todos los bloques, lo que indica una alta variabilidad en el desempeño de los estudiantes. Esta variabilidad se reflejó en la coexistencia de valores extremos: entre 10 y 13 estudiantes registraron un desempeño nulo (0,0) en cada bloque, mientras que entre 1 y 33 alcanzaron el máximo desempeño (1,0).

Los resultados descriptivos obtenidos permiten constatar que la evolución del desempeño de la cohorte no sigue una trayectoria lineal, sino que presenta incrementos, retrocesos y periodos de estabilización. Esta característica justifica el uso de un modelo basado en ecuaciones diferenciales, dado que tales modelos permiten representar procesos dinámicos donde el conocimiento adquirido puede aumentar con la práctica o disminuir en ausencia de refuerzo. La serie temporal construida a partir de los seis bloques semanales constituye el insumo para el ajuste del modelo propuesto.

A partir de ella es posible estimar parámetros clave, como la tasa de aprendizaje y la tasa de olvido, y derivar métricas predictivas tales como el nivel de equilibrio del conocimiento, la semivida de convergencia y el tiempo crítico para la intervención pedagógica. De esta forma, los resultados empíricos no solo describen la evolución observada, sino que se articulan directamente con el objetivo de modelar dicha dinámica para anticipar escenarios y generar información útil para la analítica del aprendizaje.

Ajuste del modelo diferencial

El comportamiento descrito en la evolución semanal del desempeño fue modelado mediante la ecuación diferencial:

$$\frac{dk}{dt} = a(1 - k) - bK \quad (6)$$

donde a representa la tasa de aprendizaje y b la tasa de olvido. Este modelo permite capturar la dinámica de incremento y decrecimiento del conocimiento a lo largo del tiempo. El ajuste se realizó tomando como insumo la serie temporal de seis bloques semanales (K1...K6). Los parámetros promedio estimados para la cohorte fueron:

$$a = 0.42$$

tasa de aprendizaje

$$b = 0.15$$

tasa de olvido

Con estos valores, el nivel de equilibrio proyectado:

$$K^* = \frac{a}{a + b} = 0.74 \quad (7)$$

lo cual coincide estrechamente con el promedio registrado en la última semana (K6 = 0,73).

La calidad del ajuste se evaluó mediante el error cuadrático medio (RMSE) y el coeficiente de determinación (R^2). El modelo presentó un RMSE de 0.012 y un R^2 de 0.94, lo que indica una alta capacidad explicativa respecto a la trayectoria promedio observada. Estos indicadores confirman que la formulación diferencial captura adecuadamente la dinámica temporal del desempeño.

Los intervalos de confianza al 95 % para los parámetros estimados fueron:

$$a \in [0.36, 0.48]$$

$$b \in [0.11, 0.19].$$

Ambos parámetros resultaron significativamente distintos de cero ($p < 0.01$), lo que respalda la validez estadística del modelo.

La semivida de convergencia se obtuvo a partir de la solución analítica del modelo diferencial propuesto. Dicha solución muestra que la distancia entre el nivel de conocimiento en un tiempo t y el nivel de equilibrio K^* decrece de manera exponencial con razón $a + b$. A partir de esta expresión, la semivida se define como el tiempo requerido para que esa diferencia inicial se reduzca a la mitad, lo que conduce a la fórmula:

$$t_1 = \frac{\ln(2)}{a+b} \quad (8)$$

Sustituyendo los valores estimados de los parámetros a y

$$t_1 = 1.26$$

b se obtuvo un valor de $\frac{1}{2}$ semanas. En términos prácticos, este resultado significa que los estudiantes alcanzan la mitad de su nivel estable de desempeño en un periodo relativamente corto, lo que ofrece un indicador preciso de la velocidad de consolidación del aprendizaje en la cohorte.

La curva ajustada para el promedio de la cohorte junto con los valores observados. Se aprecia que el modelo logra representar con fidelidad las oscilaciones detectadas, confirmando su pertinencia para describir la dinámica conocimiento-olvido en este contexto. Además de describir el comportamiento observado, el modelo permite derivar métricas predictivas sobre la evolución futura del desempeño, lo que aporta un valor añadido a la analítica del aprendizaje y facilita la anticipación de escenarios de consolidación o retroceso.

Indicadores derivados (de lo matemático a lo pedagógico)

A partir del modelo ajustado se calcularon métricas adicionales que permiten proyectar la evolución del desempeño en función de distintos escenarios de suficiencia. Un primer indicador corresponde al tiempo a umbral ($t\theta$), definido como el instante en el que el nivel de conocimiento

$K(t)$ cruza un valor de referencia θ . Este cálculo es útil para anticipar cuándo los estudiantes podrían caer por debajo de un estándar de suficiencia si no existieran refuerzos adicionales. En el caso de un umbral conservador ($\theta=0.70$), las proyecciones muestran que la cohorte se mantiene por encima de dicho nivel a lo largo del periodo analizado. Sin embargo, al considerar valores más exigentes, como $\theta=0.80$, el modelo predice una disminución bajo el umbral en un horizonte de aproximadamente tres semanas, lo que constituye una alerta para programar actividades de consolidación.

Otro indicador derivado es el ritmo global de cambio ($r=a+b$), que resume la velocidad con que los estudiantes se aproximan a su estado estable. Un valor relativamente alto de este parámetro refleja que las oscilaciones observadas se corrigen con rapidez, de modo que el grupo responde de forma ágil a las intervenciones pedagógicas.

El índice de estabilidad ($S=K^*$) se interpreta como el nivel de desempeño hacia el que converge la cohorte de manera natural, en ausencia de variaciones externas. Este índice ofrece una medida clara del “techo” de aprendizaje del grupo y, en combinación con el tiempo a umbral, permite definir tanto la periodicidad de los refuerzos como la exigencia de los estándares de suficiencia. Al integrar estos indicadores, el modelo trasciende el ajuste matemático y se proyecta hacia aplicaciones concretas: un módulo conectado al libro de calificaciones de Moodle podría estimar a y b por cohorte al cierre de cada bloque y generar alertas automáticas cuando el tiempo proyectado al umbral de suficiencia supere un valor crítico predefinido por el docente.

Es importante señalar que las desviaciones estándar reportadas en la Tabla 1 corresponden a la dispersión completa de la cohorte, incluyendo valores extremos (0 y 1), mientras que las desviaciones presentadas en la Tabla 2 se calcularon sobre el subconjunto efectivo de observaciones válidas utilizadas para el ajuste del modelo, lo que explica la reducción en la variabilidad estimada.

Tabla 2
Indicadores por semana: valores observados y proyectados

Semana	Media obs.	DE obs.	K_model	%≥70	%≥75	%≥80
K1	0.72	0.15	0.72	78.0	55.0	34.0
K2	0.70	0.18	0.73	76.0	50.0	30.0
K3	0.74	0.16	0.73	81.0	58.0	36.0
K4	0.73	0.17	0.74	79.0	57.0	35.0
K5	0.72	0.19	0.74	77.0	53.0	31.0
K6	0.73	0.17	0.74	80.0	56.0	33.0

Los indicadores por bloque semanal muestran que el desempeño promedio de la cohorte se mantuvo relativamente estable en un rango estrecho entre 0,70 al 0,74. La desviación estándar osciló entre 0,15 al 0,19, lo que indica una variabilidad moderada entre los estudiantes, sin incrementos significativos de dispersión a lo largo del tiempo. El modelo ajustado (K_model) reprodujo con gran precisión la trayectoria observada, mostrando valores prácticamente idénticos al promedio empírico en cada semana. En cuanto a los niveles de suficiencia, entre el 76 % al 81 % de los estudiantes alcanzaron un desempeño igual o superior al umbral de 0,70, mientras que los porcentajes para los niveles de 0,75 al 0,80 se ubicaron consistentemente en torno al 50 al 58 % y 30 al 36 %, respectivamente. Estos resultados confirman una tendencia de estabilidad general en la cohorte, con una ligera mejora en el bloque tres y una recuperación posterior tras la leve caída registrada en el bloque cinco.

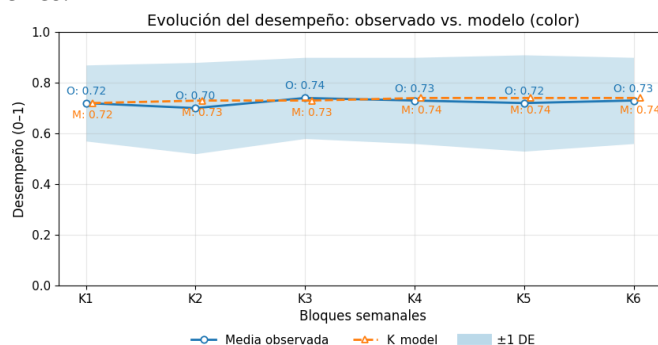


Figura 2.

Evolución del desempeño observado vs. modelo (K_model) con banda de dispersión (± 1 DE).

La Figura 2 compara la evolución del desempeño observado con la proyección del modelo diferencial (K_model) a lo largo de los seis bloques semanales. Se observa que la media observada mantiene valores relativamente estables entre 0,70 y 0,74, con una ligera caída

en el bloque cuatro (0,73) seguida de una recuperación en los bloques cinco y seis. La banda de ± 1 desviación estándar muestra que la variabilidad interindividual se mantiene moderada y constante en todo el periodo.

En paralelo, el K_model reproduce con precisión la trayectoria promedio de la cohorte, alcanzando valores prácticamente idénticos a los observados en cada bloque (diferencias $\leq 0,01$). Esta coincidencia valida la pertinencia del modelo para describir la dinámica de aprendizaje-olvido en el grupo y confirma su capacidad para capturar tanto la tendencia central como la estabilidad del proceso. El gráfico aporta evidencia de que el modelo muestra potencial predictivo y constituye una herramienta analítica para anticipar tendencias de desempeño en contextos educativos similares, sujeto a validación externa en estudios longitudinales más extensos. para estimar la evolución del conocimiento en escenarios educativos similares.

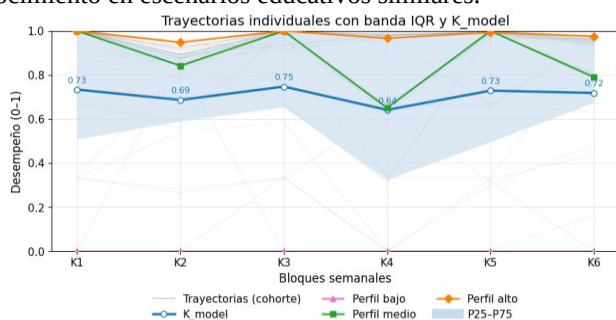


Figura 3.

Trayectorias individuales de desempeño con banda intercuartílica y curva del modelo (K_model).

De manera exploratoria, se estimaron parámetros individuales para los estudiantes con ≥ 5 observaciones válidas. Se observó variabilidad en las tasas de aprendizaje (media = 0.41; DE = 0.09) y en las tasas de olvido (media = 0.16; DE = 0.05), lo que confirma heterogeneidad intra-cohorte y abre la posibilidad de aplicaciones adaptativas en sistemas de learning analytics personalizados.

El análisis de las trayectorias individuales evidencia una marcada heterogeneidad en el desempeño de los estudiantes a lo largo de los seis bloques semanales. Mientras algunos perfiles mantienen un rendimiento alto y estable, otros muestran oscilaciones pronunciadas e incluso descensos temporales hacia valores cercanos a cero. Esta dispersión se sintetiza en la banda intercuartílica (P25-P75), que refleja la variabilidad central de la cohorte.

Esta diversidad, la curva azul correspondiente a K_model describe la dinámica promedio de la cohorte y proyecta la tendencia global de aprendizaje-olvido. Los valores estimados por el modelo se mantienen cercanos a la mediana observada en cada bloque, lo que confirma su capacidad para representar de manera robusta el comportamiento colectivo aun en presencia de trayectorias individuales extremas.

La inclusión de perfiles representativos (bajo, medio y alto) permite resaltar que el modelo captura la convergencia de

la mayoría de los estudiantes hacia un nivel estable, al tiempo que hace visible la distancia con respecto a casos particulares. En consecuencia, el gráfico valida que K_model funciona como una aproximación al desempeño agregado, proporcionando un marco para derivar métricas predictivas y orientar decisiones pedagógicas en torno al refuerzo de la práctica y la sostenibilidad del aprendizaje.

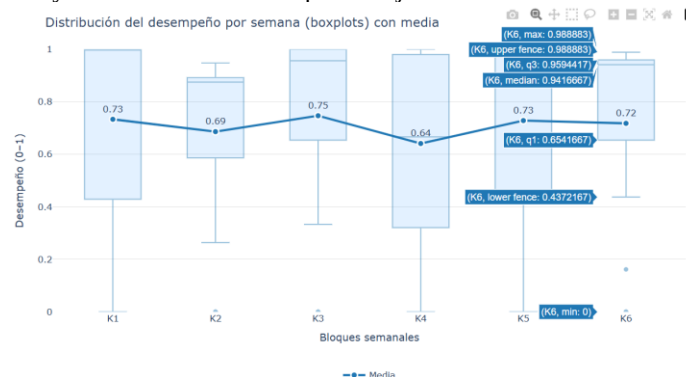


Figura 4.

Distribución del desempeño semanal (boxplots) con media superpuesta.

El gráfico muestra que la distribución del desempeño por semana se mantiene alta y relativamente estable, con medias entre 0,69 y 0,75. Se observa un descenso puntual en K4 ($\approx 0,64$) seguido de recuperación en K5 - K6 ($\approx 0,72 - 0,73$). Las medianas en la mayoría de los bloques se sitúan en rangos altos ($\approx 0,65$ a $>0,90$), lo que indica que al menos la mitad de la cohorte alcanza niveles de desempeño favorables en cada semana. La variabilidad es moderada, pero mayor en K1, K4 y K5, donde las cajas y bigotes son más extensos y aparecen valores atípicos bajos cercanos a 0. Lo cual sugiere presencia de subgrupos con dificultades puntuales (o tareas con mayor exigencia) en esas semanas, mientras que K3 y K6 presentan distribuciones más compactas en los cuartiles superiores (mayor homogeneidad en niveles altos).

Se muestra un patrón general estable con una perturbación transitoria en K4, coherente con la evolución semanal previamente observada. Pedagógicamente, K4 emerge como semana crítica para programar refuerzos o apoyos focalizados, mientras que el cierre en K6 confirma la capacidad de recuperación del grupo.

Si bien los resultados muestran una estrecha correspondencia entre el modelo ajustado y el desempeño observado, su validez está circunscrita a contextos de educación superior con alta densidad evaluativa registrada en LMS y series de mínimo cinco bloques normalizables. Entre las limitaciones internas se encuentran: (a) la serie de $n = 6$ puntos, que restringe la inferencia y puede subestimar la incertidumbre real de los parámetros; (b) la ausencia de covariables instruccionales: retroalimentación, carga cognitiva, práctica docente, lo que implica que a y b reflejan el sistema aprendizaje-enseñanza en conjunto y no la capacidad

cognitiva aislada; y (c) el ajuste agregado de cohorte, que puede enmascarar trayectorias individuales divergentes. Futuras investigaciones deberían incorporar estimaciones jerárquicas multinivel, mayor granularidad temporal y validación fuera de muestra frente a modelos alternativos.

Los resultados cuantitativos presentados en la sección anterior no constituyen un fin en sí mismos, sino el punto de partida para una lectura pedagógica de la dinámica de aprendizaje observada. El modelo diferencial ajustado, con sus parámetros estimados y métricas derivadas, ofrece una representación matemática del proceso formativo que puede traducirse en criterios concretos para la toma de decisiones docentes. Esta transición, de la formalización matemática a la interpretación pedagógica, es precisamente la que dota al modelo de su valor aplicado dentro de la analítica del aprendizaje: los números dejan de ser indicadores abstractos y se convierten en señales operativas sobre el ritmo, la estabilidad y la vulnerabilidad del aprendizaje en la cohorte analizada.

Una tasa elevada sugiere que los estudiantes logran integrar rápidamente los nuevos conocimientos, mientras que valores más bajos evidenciarían la necesidad de reforzar los mecanismos de motivación y acompañamiento. Por su parte, la tasa de olvido ($b = 0,15$) puede leerse como un indicador de los retos que enfrentan los estudiantes para mantener la información en el tiempo. Este resultado apunta a la importancia de implementar actividades de repaso, aprendizaje distribuido y metodologías activas que consoliden los aprendizajes y eviten su deterioro. En este sentido, el modelo matemático no solo describe una tendencia, sino que aporta un criterio para evaluar la sostenibilidad del aprendizaje en la cohorte.

La semivida de convergencia ($t_{1/2} = 1,26$ semanas) constituye un resultado de gran valor pedagógico. En términos prácticos, este indicador señala que los estudiantes alcanzan la mitad de su nivel estable de desempeño en poco más de una semana, lo que permite planificar intervenciones temporales de refuerzo en momentos críticos del curso. Este resultado conecta directamente la dinámica matemática con la gestión del tiempo pedagógico y el diseño de secuencias instruccionales. Por su parte, los porcentajes de estudiantes que superan los umbrales de suficiencia ($\geq 70\%$), logro ($\geq 75\%$) y excelencia ($\geq 80\%$) ofrecen una traducción directa de los datos a categorías de evaluación educativa. Que entre el 76 % al 81 % de los estudiantes alcancen el nivel de suficiencia confirma la efectividad del proceso formativo, mientras que las proporciones más bajas en los niveles de logro y excelencia sugieren la necesidad de estrategias diferenciadas para potenciar a los estudiantes con mayor capacidad de rendimiento.

Los gráficos de trayectorias individuales y Boxplots aportan evidencia de la heterogeneidad de la cohorte. La dispersión observada enfatiza la importancia de incorporar prácticas pedagógicas inclusivas, capaces de atender a ritmos de aprendizaje diversos. Así, los resultados matemáticos se convierten en insumos pedagógicos para orientar decisiones

didácticas, desde la personalización del acompañamiento hasta la implementación de alertas tempranas en sistemas de analítica del aprendizaje. La transición de lo matemático a lo pedagógico demuestra que el modelo diferencial no solo captura la dinámica promedio de **aprendizaje-olvido**, sino que también se convierte en una herramienta interpretativa para fortalecer la práctica docente y mejorar la toma de decisiones educativas.

Desde el punto de vista de su aplicabilidad práctica, el modelo diferencial puede integrarse en sistemas LMS existentes mediante un módulo de análisis que reciba el libro de calificaciones exportado desde plataformas como Moodle, estime automáticamente los parámetros a y b por cohorte o por estudiante al cierre de cada bloque evaluativo, y calcule en tiempo real los indicadores derivados: nivel de equilibrio, semivida de convergencia y tiempo proyectado para el cruce de umbrales de suficiencia. A partir de estos valores, el sistema podría generar alertas pedagógicas automáticas cuando el tiempo a umbral supere un valor crítico predefinido por el docente, identificando con anticipación a los estudiantes en riesgo de no alcanzar el nivel de desempeño esperado y orientando la planificación de intervenciones focalizadas. Esta arquitectura de implementación es técnicamente viable con las capacidades de exportación de datos que ofrecen las plataformas LMS actuales y representa una extensión natural del presente modelo hacia entornos reales de analítica del aprendizaje.

Discusión

La elección del modelo diferencial frente a alternativas estadísticas como la regresión no lineal simple o los modelos ARIMA responde a criterios tanto técnicos como epistemológicos. Si bien una regresión no lineal puede ajustarse a la trayectoria observada con parámetros estadísticamente satisfactorios, su formulación no captura la interacción simultánea entre adquisición y deterioro como fuerzas opuestas que operan de manera concurrente sobre el nivel de conocimiento; se limita a describir la forma de la curva sin representar el mecanismo subyacente que la genera. Los modelos ARIMA, por su parte, constituyen herramientas adecuadas para series estacionarias de alta frecuencia, pero presuponen una longitud mínima de observaciones que excede la disponible en contextos académicos semestrales y, de manera crítica, no incorporan estructura teórica alguna sobre los procesos cognitivos que explican la evolución del desempeño.

El modelo diferencial propuesto, en cambio, deriva sus parámetros de una formulación estructural fundamentada en la teoría del aprendizaje y el olvido, lo que permite interpretar a como tasa de asimilación y b como tasa de deterioro, traduciendo directamente los resultados matemáticos en indicadores con significado pedagógico operativo. Esta capacidad explicativa, ausente en los enfoques descriptivos, constituye la ventaja sustantiva del modelo y justifica su elección frente a alternativas de mayor complejidad computacional pero menor interpretabilidad conceptual. La comparación sistemática con modelos alternativos representa,

no obstante, una línea de trabajo prioritaria para estudios futuros que dispongan de series temporales más extensas.

Los resultados obtenidos respaldan la idea de que el aprendizaje es un proceso dinámico caracterizado por la interacción simultánea entre adquisición y deterioro del conocimiento. Esta concepción encuentra su fundamento en los estudios clásicos de la memoria humana, particularmente en la curva del olvido descrita por Ebbinghaus [2], quien demostró que la retención disminuye de forma aproximadamente exponencial en ausencia de repaso sistemático.

Investigaciones contemporáneas han confirmado empíricamente la robustez de este patrón. Referencia [3] replicaron experimentalmente los resultados originales de Ebbinghaus, mostrando que la dinámica exponencial continúa siendo un modelo adecuado para describir la retención a largo plazo. Desde esta perspectiva, la tasa de olvido estimada en el presente estudio no debe interpretarse como un error estadístico o ruido residual, sino como una fuerza estructural inherente al sistema cognitivo.

No obstante, el aporte central del modelo diferencial propuesto no radica únicamente en representar el olvido, sino en formalizar matemáticamente su interacción con la adquisición. A diferencia de muchos modelos predictivos utilizados en analítica del aprendizaje, que se centran principalmente en anticipar el rendimiento final [4], la ecuación diferencial empleada en este estudio permite capturar el mecanismo interno que produce la evolución del desempeño en el tiempo.

En el campo de la analítica del aprendizaje, el énfasis predominante ha sido descriptivo y predictivo, con fuerte presencia de algoritmos de aprendizaje automático. Ref. [1] ya señalaban que el desafío no consiste exclusivamente en predecir resultados, sino en comprender los procesos que los generan. Más recientemente, en [4] se han mostrado que los modelos dinámicos basados en datos longitudinales superan a los modelos estáticos tradicionales en la predicción del desempeño en matemáticas universitarias. En línea con estas contribuciones, el presente estudio propone una formulación diferencial explícita que permite derivar métricas estructurales como el equilibrio dinámico y la semivida de convergencia, integrando capacidad predictiva e interpretación pedagógica.

En [5] se ha demostrado que las curvas de aprendizaje pueden representarse mediante funciones exponenciales o de ley de potencia. El modelo aquí propuesto se inscribe en esta tradición y la extiende al incorporar la dimensión del deterioro, con la ventaja frente a la regresión no lineal y los modelos ARIMA de generar parámetros con significado pedagógico directo, sin requerir series de alta frecuencia ni sacrificar interpretabilidad conceptual.

El equilibrio dinámico $K^* = a/a+b$, adquiere significado teórico cuando se interpreta como el nivel de dominio sostenible bajo determinadas condiciones instruccionales. Este concepto puede relacionarse directamente con la literatura sobre práctica distribuida y recuperación activa. La evidencia

meta-analítica muestra que espaciar episodios de práctica de recuperación produce beneficios consistentes en retención, particularmente cuando los intentos de recuperación se distribuyen en el tiempo [6]. En términos del modelo diferencial, una reducción en la tasa de olvido (b) se interpreta como efecto de estrategias pedagógicas que favorecen la consolidación.

En términos aplicados, la literatura de síntesis destaca que la combinación de práctica espaciada y recuperación activa constituye una de las estrategias con mayor respaldo empírico para sostener aprendizajes en el tiempo [7]. Investigaciones sobre aprendizaje autorregulado indican que la estabilidad del desempeño depende de la frecuencia de retroalimentación, la monitorización metacognitiva y el compromiso activo del estudiante [8]. Desde esta perspectiva, el parámetro de aprendizaje (a) se interpreta como indicador agregado de eficacia instruccional y autorregulación, mientras que el parámetro de olvido (b) refleja la vulnerabilidad del sistema ante la ausencia de refuerzo.

Uno de los debates contemporáneos en analítica del aprendizaje gira en torno a la interpretabilidad de los modelos. Si bien los algoritmos de machine learning pueden ofrecer alta precisión predictiva, suelen carecer de transparencia estructural. En [4] sostienen que los modelos educativos deben ser interpretables para que puedan traducirse en decisiones pedagógicas fundamentadas. En esta dirección, el modelo diferencial ofrece ventajas sustantivas:

- Cada parámetro tiene significado conceptual.
- Las métricas derivadas son analíticamente trazables.
- La interpretación pedagógica es directa.

Estas características convergen con la creciente demanda de modelos explicables en contextos educativos, donde la toma de decisiones debe ser justificable y ética. Los análisis de trayectorias individuales revelan variabilidad significativa intra-cohorte. Desde la teoría de sistemas complejos, el comportamiento agregado puede ocultar dinámicas individuales divergentes.

En el ámbito de formalizaciones más complejas, [9] proponen una simulación del proceso de aprendizaje basada en ecuaciones diferenciales de orden fraccionario, sugiriendo que la dinámica puede incorporar efectos de memoria y no linealidades relevantes para describir trayectorias educativas heterogéneas.

El valor del modelo no radica exclusivamente en su capacidad descriptiva, sino en su formalización estructural del aprendizaje como sistema dinámico de fuerzas opuestas. Esta perspectiva permite interpretar la educación no solo como acumulación progresiva de resultados, sino como equilibrio emergente entre consolidación y deterioro. En este sentido, el modelo introduce una ontología matemática del aprendizaje que dialoga con la psicología cognitiva clásica y con la analítica educativa contemporánea, integrando ambos marcos en una estructura formal coherente.

Es necesario precisar las condiciones de aplicabilidad del modelo propuesto, dado que su validez está circunscrita a contextos específicos. El modelo asume la disponibilidad de datos longitudinales con un mínimo de cinco bloques de evaluación normalizables a la escala $[0,1]$, condición que garantiza la estabilidad mínima del ajuste no lineal y la estimación confiable de los parámetros a y b . Su aplicación resulta pertinente en asignaturas con alta densidad evaluativa cuyos registros estén sistematizados en plataformas de gestión del aprendizaje (LMS), dado que la construcción de la serie temporal depende directamente de la disponibilidad y trazabilidad del gradebook digital. La validez del modelo es asimismo específica al nivel de educación superior universitaria, donde la estructura evaluativa por cohortes, la continuidad temporal del curso y la naturaleza acumulativa del conocimiento constituyen condiciones estructurales del proceso analizado.

El ajuste agregado de cohorte presupone, adicionalmente, tasas de participación suficientes en cada bloque temporal; la presencia de valores ausentes sistemáticos en una o más semanas puede comprometer la representatividad de la serie y, en consecuencia, la interpretabilidad pedagógica de los parámetros estimados. La generalización del modelo a otros niveles educativos, modalidades no presenciales o asignaturas con baja frecuencia evaluativa requiere validación empírica independiente antes de su adopción como herramienta de analítica del aprendizaje.

Si bien el modelo presentado en este estudio es de primer orden, su extensión hacia formulaciones más complejas constituye una línea a investigar. Además, la literatura sobre modelos jerárquicos en educación sugiere que la estimación multinivel podría capturar mejor la heterogeneidad estructural [10]. El modelo agregado de cohorte constituye una aproximación al comportamiento colectivo y puede enmascarar subgrupos con dinámicas divergentes, lo que se reconoce como limitación metodológica que futuros estudios deberían abordar mediante estimación multinivel o jerárquica bayesiana.

El presente modelo asume que el desempeño académico es un proxy adecuado del conocimiento latente. No obstante, como proponen en [1], los datos educativos representan solo una fracción observable del fenómeno cognitivo. Futuras investigaciones deberían:

- Integrar trazas de interacción más granulares.
- Incorporar funciones de entrada explícitas que representen práctica acumulada.
- Estimar parámetros individuales mediante enfoques jerárquicos bayesianos.
- Comparar rendimiento frente a modelos de aprendizaje automático.

Es importante destacar que con $n=6$ puntos: (a) no es posible evaluar dinámicas no lineales de orden superior; (b) la estimación de los intervalos de confianza vía matriz Hessiana es una aproximación que puede subestimar la incertidumbre real; (c) la estabilidad del ajuste es exploratoria y los

resultados no deben extrapolarse más allá de un semestre académico con características similares.

El modelo diferencial no pretende reemplazar los enfoques predictivos actuales, sino aportar una estructura explicativa que fortalezca la comprensión del aprendizaje universitario como proceso dinámico. El modelo no incorpora covariables instruccionales como: tipo y frecuencia de retroalimentación, carga cognitiva de las actividades ni características de la práctica docente, lo que limita la capacidad del modelo para distinguir si las variaciones en los parámetros a y b son atribuibles al aprendizaje intrínseco o a condiciones instruccionales externas.

AGRADECIMIENTO/RECONOCIMIENTO

Los autores expresan su agradecimiento a la Universidad Bolivariana del Ecuador por el apoyo institucional brindado para el desarrollo de esta investigación, así como a la coordinación académica de la carrera por facilitar el acceso a los datos necesarios para el análisis. Se reconoce también la disposición y compromiso de los estudiantes participantes, cuya colaboración voluntaria permitió la construcción de la base empírica del estudio. Se agradece a los colegas que ofrecieron observaciones técnicas durante la fase de modelación y revisión metodológica, contribuyendo a fortalecer el rigor científico del trabajo.

REFERENCIAS

- [1] G. Siemens and R. S. Baker, "Learning analytics and educational data mining: Towards communication and collaboration," in Proc. 2nd Int. Conf. Learning Analytics and Knowledge, New York, NY, USA: ACM, 2012, pp. 252–254. <https://doi.org/10.1145/2330601.2330661>
- [2] H. Ebbinghaus, *Memory: A Contribution to Experimental Psychology*. Eastford, CT, USA: Martino Publishing, 2013. (Original work published 1885)
- [3] J. M. J. Murre and J. Dros, "Replication and analysis of Ebbinghaus' forgetting curve," PLOS ONE, vol. 10, no. 7, p. e0120644, 2015. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0120644>
- [4] D. Tempelaar, B. Rienties, and Q. Nguyen, "Dynamic learning analytics: Modeling temporal learning processes in higher education," Computers & Education, vol. 194, p. 104703, 2023. <https://doi.org/10.1016/j.compedu.2022.104703>
- [5] T. Viering and M. Loog, "The shape of learning curves: A review of empirical and theoretical approaches," Pattern Recognition Letters, vol. 146, pp. 157–164, 2021. <https://doi.org/10.1016/j.patrec.2021.03.013>
- [6] A. Latimier, H. Peyre, and F. Ramus, "A meta-analytic review of the benefit of spacing out retrieval practice episodes on retention," Educational Psychology Review, vol. 33, no. 3, pp. 959–987, 2021. <https://doi.org/10.1007/s10648-020-09572-8>
- [7] S. K. Carpenter, S. C. Pan, and A. C. Butler, "The science of effective learning with spacing and retrieval practice," Nature Reviews Psychology, vol. 1, no. 9, pp. 496–511, 2022. <https://doi.org/10.1038/s44159-022-00089-1>
- [8] O. P. Chorny, L. V. Herasymenko, and V. V. Busher, "The learning process simulation based on differential equations of fractional orders," CTE Workshop Proceedings, vol. 8, pp. 473–483, 2021. <https://doi.org/10.55056/cte.301>
- [8] B. J. Zimmerman, "Becoming a self-regulated learner: An overview," Theory Into Practice, vol. 41, no. 2, pp. 64–70, 2002. https://doi.org/10.1207/s15430421tip4102_2
- [10] S. W. Raudenbush and A. S. Bryk, *Hierarchical Linear Models: Applications and Data Analysis Methods*, 2nd ed. Thousand Oaks, CA, USA: Sage, 2002.