

# Mixed-Integer Programming Strategies for Reducing Rehandling in Multi-Customer Distribution Operations

Miguel Fernández Pérez ; Sixto Díaz Chávez ; Camilo Fernández Farfán ; Lucy Aragón Casas 

Grupo de Investigación de Operaciones Aplicada, Departamento Académico de Ingeniería, Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, Perú, [mfernandezp@pucp.edu.pe](mailto:mfernandezp@pucp.edu.pe), [sixto.diaz@pucp.edu.pe](mailto:sixto.diaz@pucp.edu.pe), [camilo.fernandezf@pucp.edu.pe](mailto:camilo.fernandezf@pucp.edu.pe), [laragonc@pucp.edu.pe](mailto:laragonc@pucp.edu.pe)

**Abstract**– *In the current context of global logistics, the optimization of operational costs is essential to maintain the competitiveness of supply chains. In particular, decisions related to load planning and unloading operations in multi-drop distribution systems play a crucial role in overall operational performance. In this regard, this paper addresses the Multi-Drop Container Loading Problem, integrating critical variables such as customer delivery sequences and the dimensional characteristics of the items. A mixed-integer programming model is proposed to efficiently organize the load, minimizing unnecessary rehandling during the unloading process through the incorporation of a last-in, first-out (LIFO) constraint. In addition, an auxiliary mathematical model is introduced to adjust the initial solution and ensure a physically coherent and stable load configuration. The proposed methodology is validated through case studies implemented in AMPL and Python Colab, demonstrating that the proposed approach not only optimizes the use of available space but also facilitates faster and more orderly unloading operations.*

**Keywords**– *Mixed-integer programming; Container loading problem; Unloading constraints (multi-drop).*

# Estrategias de Programación Entera Mixta para la Reducción de Reordenamientos en Operaciones de Distribución con Múltiples Clientes

Miguel Fernández Pérez<sup>id</sup>; Sixto Díaz Chávez<sup>id</sup>; Camilo Fernández Farfán<sup>id</sup>; Lucy Aragón Casas<sup>id</sup>

Grupo de Investigación de Operaciones Aplicada, Departamento Académico de Ingeniería, Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, Perú, [mfernandezp@pucp.edu.pe](mailto:mfernandezp@pucp.edu.pe), [sixto.diaz@pucp.edu.pe](mailto:sixto.diaz@pucp.edu.pe), [camilo.fernandezf@pucp.edu.pe](mailto:camilo.fernandezf@pucp.edu.pe), [laragonc@pucp.edu.pe](mailto:laragonc@pucp.edu.pe)

**Resumen**– En el contexto actual de la logística global, la optimización de los costos operativos es fundamental para mantener la competitividad de las cadenas de suministro. En particular, las decisiones asociadas a la planificación de la carga y descarga en sistemas de distribución con múltiples entregas juegan un papel determinante en el desempeño operativo. En este sentido, este artículo aborda el problema de carga de contenedores con entregas múltiples (Multi-Drop Container Loading Problem), integrando variables críticas como la secuencia de entrega a los clientes y las dimensionales de los objetos. Se propone un modelo de programación entera mixta orientado a organizar la carga de manera eficiente, minimizando el reordenamiento innecesario durante el proceso de descarga mediante la incorporación de una restricción last-in, first-out (LIFO). Adicionalmente, se introduce un modelo matemático auxiliar que ajusta la solución inicial y garantiza una disposición físicamente coherente y estable. La metodología se valida mediante casos de estudio implementados en AMPL y Python Colab, demostrando que el enfoque propuesto no solo optimiza el uso del espacio disponible, sino que también facilita una descarga más rápida y ordenada.

**Palabras clave**– Programación entera mixta; Problema de carga de contenedores; Restricciones de descarga (Multi-drop).

## I. INTRODUCCIÓN

En el ecosistema del comercio global contemporáneo, la gestión eficiente de las operaciones logísticas se ha consolidado como un pilar estratégico para la sostenibilidad financiera de las empresas [1]. La organización óptima de la carga en vehículos de distribución, tales como camiones y contenedores, no es solo una cuestión de aprovechamiento de volumen, sino un factor determinante en la reducción de costos operativos y la minimización de la huella de carbono asociada al transporte. La literatura científica identifica este desafío como el Problema de Carga de Contenedores (Container Loading Problem), cuya complejidad aumenta exponencialmente al integrar restricciones del mundo real, como la estabilidad física de la carga y la secuencia de entrega a múltiples clientes (multi-drop constraints) [2].

Estudios en logística de distribución han señalado que una planificación de carga que no considera la secuencia de entrega puede generar ineficiencias operativas significativas, especialmente en contextos de distribución con múltiples paradas. En estos casos, la necesidad de reordenar objetos durante las operaciones de descarga incrementa los tiempos de servicio en cada punto, afecta la utilización efectiva del espacio de carga y repercute negativamente en los costos de transporte. En consecuencia, la optimización de la disposición de los

objetos dentro del contenedor no solo contribuye a una mayor eficiencia en el uso del volumen disponible, sino que también mejora la agilidad de las operaciones logísticas y favorece prácticas más sostenibles al reducir los tiempos de operación de los vehículos en ruta [3].

El presente artículo se estructura de la siguiente manera: en primer lugar, se realiza una revisión de la literatura. Seguidamente se describe la nomenclatura utilizada y se detalla la formulación del modelo matemático propuesto, incluyendo las variables de decisión, las restricciones y la función objetivo. Posteriormente, se presentan los experimentos computacionales diseñados para validar el desempeño del modelo. Finalmente, se concluye con un análisis de los resultados obtenidos y se proponen posibles líneas de investigación futura.

## II. REVISIÓN DE LA LITERATURA

Esta problemática ha sido abordada por diversos autores debido a su alta complejidad combinatoria, pues se debe decidir cómo se debe ordenar la carga bajo múltiples restricciones operativas. Este problema es clasificado como NP-Difícil [4]. Esto hace que la optimización del problema de carga continúe siendo un área de investigación activa, con aplicaciones que abarcan desde la distribución de bienes de consumo hasta la logística industrial.

En la Referencia [5], los autores han desarrollado un modelo de programación entera mixta para el problema clásico de carga de contenedores. La función objetivo del modelo es la minimización del espacio no usado en los contenedores. Este enfoque se ha convertido en una base fundamental para estudios posteriores.

En la Referencia [6] se introduce una heurística para la carga en contenedores enfocado en asegurar una distribución uniforme del peso y la estabilidad del transporte. Este método usa un post-procesamiento que reorganiza la disposición inicial de los elementos dentro del contenedor. El método evalúa diferentes configuraciones mediante permutaciones y el reflejo de bloques no superpuestos, mejorando tanto la utilización del espacio como el balance de peso.

En la Referencia [7], el autor estudia el problema de carga de contenedores como un problema de la mochila tridimensional, maximizando el volumen de las cajas empaquetadas en un contenedor. El autor propone un enfoque heurístico basado en la construcción de capas, combinando técnicas como branch-and-bound y algoritmos de la mochila. El

método propuesto emplea varias reglas de clasificación para mejorar la selección de soluciones.

En la Referencia [8] se aborda el problema de cargar múltiples contenedores en operaciones de distribución, optimizando la ubicación de palets en camiones para minimizar el uso de vehículos. Se desarrollaron modelos de programación entera mixta que incorporan restricciones de estabilidad vertical y horizontal de la carga, y la resistencia de soporte, incluyendo la fragilidad de los productos. Los modelos fueron probados con datos reales de una empresa europea, mostrando soluciones óptimas o de alta calidad en tiempos computacionales bajos.

En la Referencia [9], los autores proponen un algoritmo heurístico híbrido multi-estrategia para maximizar el uso del volumen en contenedores con carga débilmente heterogénea. Utilizan un modelo probabilístico que combina métodos de colonia de hormigas y heurísticas constructivas. Además, diseñaron una estrategia de poda para reducir el espacio de búsqueda, mejorando así la eficiencia del algoritmo.

En la Referencia [10], los autores abordan el problema de carga de contenedores en entregas múltiples considerando restricciones flexibles para la descarga. Proponen un modelo de programación entera mixta que penaliza la necesidad de reubicar cajas durante la entrega, balanceando la eficiencia en la carga y la facilidad de descarga. Los experimentos destacan cómo este enfoque supera métodos rígidos tradicionales.

Otros estudios relevantes, presentados en [11, 12, 13, 14], han incorporado restricciones relacionadas con la distribución de peso, estabilidad, orientación y compatibilidad de carga, además de proponer enfoques heurísticos y metaheurísticos para la solución del problema. Asimismo, diversas investigaciones han abordado escenarios de incertidumbre mediante modelos de optimización estocástica y enfoques híbridos, con el objetivo de obtener soluciones más robustas [15, 16, 17, 18].

A pesar de los avances reportados en la literatura sobre el problema de carga de contenedores, persisten desafíos cuando se consideran simultáneamente las restricciones de descarga en rutas con múltiples clientes y la necesidad de asegurar una disposición físicamente coherente de la carga. En este contexto, en este artículo se propone un modelo de programación entera mixta bajo una lógica tipo LIFO para reducir reordenamientos innecesarios durante la descarga, complementado con un modelo auxiliar que ajusta la solución inicial para garantizar una configuración estable y físicamente consistente dentro del contenedor.

### III. NOMENCLATURA

La nomenclatura usada para definir los índices, parámetros y variables de decisión de los modelos matemáticos que se presentarán en la próxima sección se detallan a continuación:

#### Índices

- $m, n$ : Índice de objetos,  $m = \{1, 2, \dots, N\}$
- $e$ : Índice de clientes,  $e = \{1, 2, \dots, E\}$

#### Parámetros

- $N$ : Número de objetos
- $E$ : Número de clientes
- $L$ : Largo del contenedor (eje  $x$ )
- $W$ : Ancho del contenedor (eje  $y$ )
- $H$ : Altura del contenedor (eje  $z$ )
- $p_m$ : Largo del objeto  $m$
- $q_m$ : Ancho del objeto  $m$
- $r_m$ : Altura del objeto  $m$
- $\delta_m$ : Identificación del cliente destinatario del objeto  $m$
- $K$ : Número muy grande

#### Variables de decisión

- $X_m$ : Coordenada en el eje  $x$  de la esquina inferior izquierda y trasera del objeto  $m$  dentro del contenedor
- $Y_m$ : Coordenada en el eje  $y$  de la esquina inferior izquierda y trasera del objeto  $m$  dentro del contenedor
- $Z_m$ : Coordenada en el eje  $z$  de la esquina inferior izquierda y trasera del objeto  $m$  dentro del contenedor
- $l_m^x = 1$ , si el largo del objeto  $m$  es paralelo al eje  $x$ ; 0, caso contrario
- $l_m^y = 1$ , si el largo del objeto  $m$  es paralelo al eje  $y$ ; 0, caso contrario
- $l_m^z = 1$ , si el largo del objeto  $m$  es paralelo al eje  $z$ ; 0, caso contrario
- $w_m^x = 1$ , si el ancho del objeto  $m$  es paralelo al eje  $x$ ; 0, caso contrario
- $w_m^y = 1$ , si el ancho del objeto  $m$  es paralelo al eje  $y$ ; 0, caso contrario
- $w_m^z = 1$ , si el ancho del objeto  $m$  es paralelo al eje  $z$ ; 0, caso contrario
- $h_m^x = 1$ , si la altura del objeto  $m$  es paralelo al eje  $x$ ; 0, caso contrario
- $h_m^y = 1$ , si la altura del objeto  $m$  es paralelo al eje  $y$ ; 0, caso contrario
- $h_m^z = 1$ , si la altura del objeto  $m$  es paralelo al eje  $z$ ; 0, caso contrario
- $a_{mn} = 1$ , si el objeto  $m$  se posiciona a la izquierda del objeto  $n$  dentro del contenedor; 0, caso contrario
- $b_{mn} = 1$ , si el objeto  $m$  se posiciona detrás del objeto  $n$  dentro del contenedor; 0, caso contrario
- $c_{mn} = 1$ , si el objeto  $m$  se posiciona debajo del objeto  $n$  dentro del contenedor; 0, caso contrario
- $d_m^x$ : Profundidad respecto al eje  $x$ , esto es, la distancia entre la puerta del contenedor y el objeto  $m$
- $d_m^z$ : Profundidad respecto al eje  $z$ , esto es, la distancia entre el techo del contenedor y el objeto  $m$
- $d_e^x$ : Profundidad promedio respecto al eje  $x$  de los objetos asociados al cliente  $e$

- $\bar{d}_e^z$ : Profundidad promedio respecto al eje z de los objetos asociados al cliente  $e$
- $u_e^x$ : Holgura de la profundidad promedio, respecto al eje x, entre los objetos de los clientes  $e+1$  y  $e$
- $v_e^x$ : Exceso de la profundidad promedio, respecto al eje x, entre los objetos de los clientes  $e+1$  y  $e$
- $u_e^z$ : Holgura de la profundidad promedio, respecto al eje z, entre los objetos de los clientes  $e+1$  y  $e$
- $v_e^z$ : Exceso de la profundidad promedio, respecto al eje z, entre los objetos de los clientes  $e+1$  y  $e$

#### IV. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

Considere un conjunto de  $N$  objetos que deben ser cargados en un contenedor con dimensiones de largo, ancho y altura denotadas por  $(L, W, H)$ . Cada objeto  $m$  tiene dimensiones de largo, ancho y altura denotadas por  $(p_m, q_m, r_m)$ , y pertenece a un cliente identificado por  $\delta_m \in \{1, 2, \dots, E\}$ , donde 1 corresponde al primer cliente en la lista de entrega y  $E$  al último. Se introduce un sistema de coordenadas cartesianas  $(x, y, z)$ , donde el origen  $(0, 0, 0)$  coincide con la esquina inferior izquierda del fondo del contenedor. El eje  $x$  se alinea con el largo del contenedor, el eje  $y$  con el ancho y el eje  $z$  con la altura. Los ejes  $x$  y  $y$  son paralelos a la base del contenedor, mientras que el eje  $z$  perpendicular a ella. Las cuatro esquinas de la puerta del contenedor, donde tiene lugar la descarga, están ubicadas en las coordenadas  $(L, 0, 0)$ ,  $(L, W, 0)$ ,  $(L, W, H)$  y  $(L, 0, H)$ . El problema consiste en determinar las coordenadas  $(X_m, Y_m, Z_m)$  de cada objeto dentro del contenedor, de manera que se minimice o elimine la necesidad de reorganización de otros objetos durante la descarga. Se establecieron las siguientes suposiciones:

- Solo se cuenta con un contenedor.
- Los objetos solo pueden ser cargados ortogonalmente dentro del contenedor.
- Cada objeto puede adoptar una de las seis posibles orientaciones definidas por rotaciones ortogonales.
- El contenedor tiene la capacidad suficiente para cargar todos los objetos respetando sus límites.

A continuación, se presenta el modelo matemático propuesto, denominado MP, diseñado para abordar este problema:

$$(MP) \text{ Min } \sum_{e=1}^{E-1} u_e^x + u_e^z \quad (1)$$

Sujeto a:

$$l_m^x + l_m^y + l_m^z = 1 \quad \forall m \quad (2)$$

$$w_m^x + w_m^y + w_m^z = 1 \quad \forall m \quad (3)$$

$$h_m^x + h_m^y + h_m^z = 1 \quad \forall m \quad (4)$$

$$l_m^x + w_m^x + h_m^x = 1 \quad \forall m \quad (5)$$

$$l_m^y + w_m^y + h_m^y = 1 \quad \forall m \quad (6)$$

$$l_m^z + w_m^z + h_m^z = 1 \quad \forall m \quad (7)$$

$$a_{mn} + a_{nm} \leq 1 \quad \forall m, n | m > n \quad (8)$$

$$b_{mn} + b_{nm} \leq 1 \quad \forall m, n | m > n \quad (9)$$

$$c_{mn} + c_{nm} \leq 1 \quad \forall m, n | m > n \quad (10)$$

$$a_{mn} + a_{nm} + b_{mn} + b_{nm} + c_{mn} + c_{nm} \geq 1 \quad \forall m, n | m > n \quad (11)$$

$$X_m + p_m l_m^x + q_m w_m^x + r_m h_m^x \leq X_n + K(1 - a_{mn}) \quad \forall m, n | m \neq n \quad (12)$$

$$Y_m + p_m l_m^y + q_m w_m^y + r_m h_m^y \leq Y_n + K(1 - b_{mn}) \quad \forall m, n | m \neq n \quad (13)$$

$$Z_m + p_m l_m^z + q_m w_m^z + r_m h_m^z \leq Z_n + K(1 - c_{mn}) \quad \forall m, n | m \neq n \quad (14)$$

$$X_m + p_m l_m^x + q_m w_m^x + r_m h_m^x \leq L \quad \forall m \quad (15)$$

$$Y_m + p_m l_m^y + q_m w_m^y + r_m h_m^y \leq W \quad \forall m \quad (16)$$

$$Z_m + p_m l_m^z + q_m w_m^z + r_m h_m^z \leq H \quad \forall m \quad (17)$$

$$d_m^x = L - X_m \quad \forall m \quad (18)$$

$$d_m^z = H - Z_m \quad \forall m \quad (19)$$

$$\bar{d}_e^x = \sum_{m | \delta_m = e} d_m^x / \sum_{m | \delta_m = e} 1 \quad \forall e \quad (20)$$

$$\bar{d}_e^z = \sum_{m | \delta_m = e} d_m^z / \sum_{m | \delta_m = e} 1 \quad \forall e \quad (21)$$

$$\bar{d}_{e+1}^x + u_e^x - v_e^x = \bar{d}_e^x \quad \forall e | e < E \quad (22)$$

$$\bar{d}_{e+1}^z + u_e^z - v_e^z = \bar{d}_e^z \quad \forall e | e < E \quad (23)$$

$$X_m, Y_m, Z_m, d_m^x, d_m^z \geq 0 \quad \forall m \quad (24)$$

$$l_m^x, l_m^y, l_m^z, w_m^x, w_m^y, w_m^z, h_m^x, h_m^y, h_m^z \in \{0, 1\} \quad \forall m \quad (25)$$

$$a_{mn}, b_{mn}, c_{mn} \in \{0, 1\} \quad \forall m, n | m \neq n \quad (26)$$

$$\bar{d}_e^x, \bar{d}_e^z \geq 0 \quad \forall e \quad (27)$$

$$u_e^x, v_e^x, u_e^z, v_e^z \geq 0 \quad \forall e|e < E \quad (28)$$

En este modelo matemático, la función objetivo (1) tiene como propósito garantizar un distanciamiento entre los objetos pertenecientes a distintos clientes. Específicamente, se busca que, en promedio, los objetos del cliente  $e + 1$ , se ubiquen detrás y por debajo de los objetos del cliente  $e$ ; no es relevante que los objetos del cliente  $e + 1$  se ubique a la derecha o izquierda del objeto  $e$ . La restricción (2) asegura que el largo de cada objeto sea paralelo al eje  $x$  o al eje  $y$  o al eje  $z$ . La restricción (3) asegura que el ancho de cada objeto sea paralelo al eje  $x$  o al eje  $y$  o al eje  $z$ . La restricción (4) asegura que la altura de cada objeto sea paralela al eje  $x$  o al eje  $y$  o al eje  $z$ . La restricción (5) asegura que solo el largo o ancho o altura de cada objeto sea paralelo al eje  $x$ . La restricción (6) asegura que solo el largo o ancho o altura de cada objeto sea paralelo al eje  $y$ . La restricción (7) asegura que solo el largo o ancho o altura de cada objeto sea paralelo al eje  $z$ . Las restricciones (2)-(7) determinan la orientación del objeto dentro del contenedor. Las restricciones (8)-(11) garantizan que un objeto se ubique a la izquierda o derecha de otro, detrás o delante de otro, o por debajo o por encima de otro. Las restricciones (12)-(14) evitan que dos objetos se superpongan entre sí. Las restricciones (15)-(17) aseguran que los objetos se ubiquen dentro de los límites del contenedor. La restricción (18) determina la profundidad cada objeto respecto al eje  $x$ . La restricción (19) determina la profundidad cada objeto respecto al eje  $z$ . La restricción (20) determina la profundidad promedio de los objetos asociados a cada cliente respecto al eje  $x$ . La restricción (21) determina la profundidad promedio de los objetos asociados a cada cliente respecto al eje  $z$ . Las restricciones (22) y (23) determinan las holguras y los excesos en la profundidad promedio de los objetos correspondientes a dos clientes consecutivos, de acuerdo con el orden de entrega. Las restricciones (24)-(28) definen el dominio de las variables de decisión.

En los experimentos realizados con MP, se observaron situaciones en los que ciertos objetos quedan suspendidos en el espacio sin un soporte adecuado, lo cual no representa un escenario realista. Para abordar esta limitación, se desarrolló un segundo modelo matemático, denominado MA, que ajusta las coordenadas de los objetos obtenidas con MP. Este nuevo modelo garantiza una disposición físicamente coherente, asegurando que todos los objetos estén correctamente posicionados y soportados dentro del contenedor.

MA se resuelve inmediatamente después de MP, en secuencia. MA utiliza como datos de entrada la orientación de cada objeto dentro del contenedor y su disposición relativa respecto a otros, ambos determinados previamente por MP. Las dimensiones ajustadas de cada objeto  $m$  respecto a los ejes  $x$ ,  $y$ ,  $z$  se denota como  $(p'_m, q'_m, r'_m)$ , mientras que las disposiciones relativas entre objetos se denotan por  $a'_{mn}$ ,  $b'_{mn}$  y  $c'_{mn}$ . Estos datos de entrada se calculan en función de los valores óptimos de las variables obtenidas en MP, según las siguientes expresiones:

$$p'_m = p_m l_m^{x*} + q_m w_m^{x*} + r_m h_m^{x*} \quad \forall m \quad (29)$$

$$q'_m = p_m l_m^{y*} + q_m w_m^{y*} + r_m h_m^{y*} \quad \forall m \quad (30)$$

$$r'_m = p_m l_m^{z*} + q_m w_m^{z*} + r_m h_m^{z*} \quad \forall m \quad (31)$$

$$a'_{mn} = a_{mn}^* \quad \forall m, n|m \neq n \quad (32)$$

$$b'_{mn} = b_{mn}^* \quad \forall m, n|m \neq n \quad (33)$$

$$c'_{mn} = c_{mn}^* \quad \forall m, n|m \neq n \quad (34)$$

En estas ecuaciones, los valores  $l_m^{x*}, l_m^{y*}, l_m^{z*}, w_m^{x*}, w_m^{y*}, w_m^{z*}, h_m^{x*}, h_m^{y*}, h_m^{z*}, a_{mn}^*, b_{mn}^*$  y  $c_{mn}^*$  son las soluciones óptimas de MP.

A continuación, se presenta la formulación de MA:

$$(MA) \text{ Min } \sum_{m=1}^N (X_m + Y_m + Z_m) \quad (35)$$

Sujeto a:

$$X_m + p'_m \leq X_n + K(1 - a'_{mn}) \quad \forall m, n|m \neq n \quad (36)$$

$$Y_m + q'_m \leq Y_n + K(1 - b'_{mn}) \quad \forall m, n|m \neq n \quad (37)$$

$$Z_m + r'_m \leq Z_n + K(1 - c'_{mn}) \quad \forall m, n|m \neq n \quad (38)$$

$$X_m, Y_m, Z_m \geq 0 \quad \forall m \quad (39)$$

En este modelo matemático, la función objetivo (35) busca ubicar los objetos lo más cerca posible a la coordenada  $(0, 0, 0)$  del contenedor. Las restricciones (36)-(38) colocan los objetos dentro del contenedor según el orden hallado en MP. La restricción (39) define el dominio de las variables de decisión.

## V. EXPERIMENTOS COMPUTACIONES

Para evaluar el desempeño de MP y MA en la resolución de este tipo de problemas, se consideraron dos casos. Ambos modelos matemáticos fueron implementados utilizando el lenguaje AMPL, integrándose con la plataforma Python Colab para su ejecución y análisis.

### A. Caso 1

El Caso 1 analiza un conjunto de 4 clientes a visitar, con 7 objetos a entregar. Las pertenencias y dimensiones de los objetos se presentan en la Tabla I. El contenedor tiene dimensiones de  $L = 32, W = 24$  y  $H = 20$ .

TABLA I  
Datos del Caso 1

| Cliente | Objeto | Dimensiones |     |     |
|---------|--------|-------------|-----|-----|
|         |        | $p$         | $q$ | $r$ |
| 1       | 1      | 19          | 10  | 7   |
|         | 2      | 18          | 11  | 9   |
| 2       | 3      | 18          | 11  | 9   |
|         | 4      | 18          | 12  | 8   |
| 3       | 5      | 18          | 12  | 8   |
|         | 6      | 21          | 13  | 8   |
| 4       | 7      | 21          | 13  | 8   |

La Fig. 1 ilustra la configuración espacial resultante tras la ejecución secuencial de los modelos MP y MA para el Caso 1. La disposición obtenida no es aleatoria, sino que refleja el cumplimiento estricto de la jerarquía de entrega establecida. Como se aprecia en la visualización, los objetos destinados al Cliente 4 se ubican en la zona más profunda del contenedor, actuando como base de la estructura de carga. Por el contrario, los artículos pertenecientes a los Clientes 1, 2 y 3 se distribuyen estratégicamente en las proximidades de la puerta. Este ordenamiento garantiza el cumplimiento de la restricción *last-in, first-out* (LIFO), permitiendo que los operarios accedan a la mercancía del primer cliente sin necesidad de desplazar o reordenar el inventario restante, lo que optimiza los tiempos de maniobra en los puntos de descarga. Los detalles cuantitativos de esta disposición final, incluyendo las coordenadas y las dimensiones de cada objeto se detallan en la Tabla II.

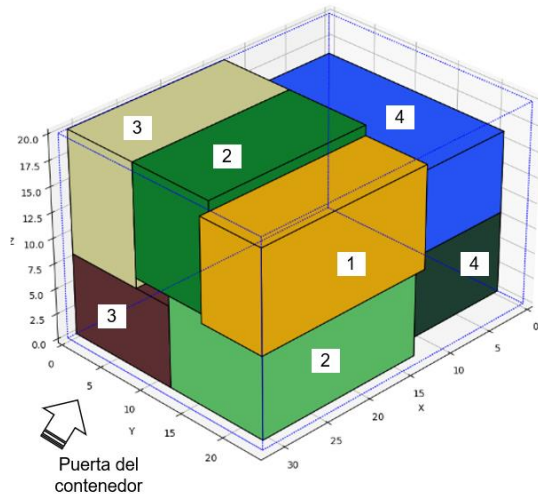


Fig. 1 Representación gráfica de los objetos en el contenedor del Caso 1

TABLA II  
Resultados del Caso 1

| Cliente | Objeto | Coordenadas |     |     | Dimensiones ajustadas |      |      |
|---------|--------|-------------|-----|-----|-----------------------|------|------|
|         |        | $X$         | $Y$ | $Z$ | $p'$                  | $q'$ | $r'$ |
| 1       | 1      | 13          | 17  | 9   | 19                    | 7    | 10   |
|         | 2      | 13          | 8   | 9   | 18                    | 9    | 11   |
| 2       | 3      | 13          | 12  | 0   | 18                    | 11   | 9    |
|         | 4      | 13          | 0   | 0   | 18                    | 12   | 8    |
| 3       | 5      | 13          | 0   | 8   | 18                    | 8    | 12   |
|         | 6      | 0           | 0   | 0   | 13                    | 21   | 8    |
| 4       | 7      | 0           | 0   | 8   | 13                    | 21   | 8    |

## B. Caso 2

El Caso 2 analiza un conjunto de 4 clientes a visitar, con 6 objetos a entregar. Las pertenencias y dimensiones de los objetos se presentan en la Tabla III. El contenedor tiene dimensiones de  $L = 35$ ,  $W = 20$  y  $H = 10$ .

TABLA III  
Datos del Caso 2

| Cliente | Objeto | Dimensiones |     |     |
|---------|--------|-------------|-----|-----|
|         |        | $p$         | $q$ | $r$ |
| 1       | 1      | 25          | 8   | 6   |
|         | 2      | 20          | 10  | 5   |
| 2       | 3      | 16          | 7   | 3   |
|         | 4      | 15          | 12  | 6   |
| 3       | 5      | 22          | 8   | 3   |
|         | 6      | 20          | 10  | 4   |

La Fig. 2 presenta la configuración espacial resultante para el Caso 2. Se observa que los objetos correspondientes al Cliente 4 se mantienen en la zona de mayor profundidad, asegurando que los productos con la última prioridad de entrega no interfieran con las paradas previas. Por otro lado, la disposición en la zona frontal y media del contenedor revela una organización lógica: el objeto del Cliente 2 ocupa la sección inferior izquierda, mientras que la carga del Cliente 3 se distribuye en el flanco derecho, aprovechando tanto la parte superior como inferior. Finalmente, los artículos del Cliente 1 se posicionan en la parte superior, cercanos a la puerta. Esta zonificación no solo respeta la secuencia LIFO, sino que maximiza el uso del volumen vertical disponible.

Los resultados derivados de esta optimización, se detallan en la Tabla IV.

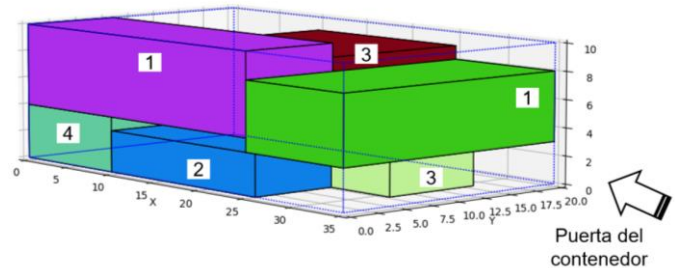


Fig. 2 Representación gráfica de los objetos en el contenedor del Caso 2

TABLA IV  
Resultados del Caso 2

| Cliente | Objeto | Coordenadas |     |     | Dimensiones ajustadas |      |      |
|---------|--------|-------------|-----|-----|-----------------------|------|------|
|         |        | $X$         | $Y$ | $Z$ | $p'$                  | $q'$ | $r'$ |
| 1       | 1      | 0           | 0   | 4   | 25                    | 8    | 6    |
|         | 2      | 25          | 0   | 3   | 10                    | 20   | 5    |
| 2       | 3      | 10          | 0   | 0   | 16                    | 7    | 3    |
|         | 4      | 10          | 8   | 3   | 15                    | 12   | 6    |
| 3       | 5      | 10          | 7   | 0   | 22                    | 8    | 3    |
|         | 6      | 0           | 0   | 0   | 10                    | 20   | 4    |

Tras la ejecución del modelo MP, se verifica que el modelo MA ajusta las coordenadas verticales y longitudinales de los objetos con el objetivo de eliminar espacios vacíos subyacentes

presentes en la solución inicial. Los resultados obtenidos confirman que el enfoque propuesto no solo maximiza el aprovechamiento del volumen disponible, sino que también garantiza una disposición físicamente coherente, preservando la integridad estructural de la carga durante el proceso de distribución con múltiples clientes.

## VI. CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS

A través de este estudio, se ha abordado con éxito el problema de carga de contenedores con entregas múltiples (*Multi-Drop Container Loading Problem*). El principal aporte del modelo propuesto radica en su capacidad para minimizar la necesidad de reordenamiento de la carga en los puntos de parada intermedios, lo que se traduce en una reducción directa de los tiempos de descarga y en una mejora sustancial de la eficiencia operativa. Asimismo, la incorporación de un modelo auxiliar garantiza que la solución obtenida no solo sea óptima desde un punto de vista geométrico, sino también viable desde una perspectiva física, asegurando una disposición coherente y estable de la carga durante el trayecto.

La validación de ambos modelos mediante casos prácticos implementados en AMPL y Python Colab permite evidenciar mejoras tangibles en la productividad logística, lo que posiciona al enfoque propuesto como una herramienta robusta y adaptable a escenarios industriales reales.

Este trabajo sienta las bases para futuras investigaciones orientadas a ampliar y enriquecer la aplicabilidad de los modelos desarrollados. En primer lugar, se propone la incorporación de parámetros adicionales de la carga, tales como el peso y la fragilidad de los objetos, así como la consideración de restricciones relacionadas con el balance de carga por ejes y el cumplimiento de normativas de seguridad vial. De igual manera, resulta de gran interés extender el alcance de la optimización hacia la gestión simultánea de múltiples contenedores, con el fin de apoyar la planificación integral de flotas completas.

Dada la naturaleza combinatoria del problema, otra línea de investigación relevante consiste en la adaptación del modelo para el uso de metaheurísticas y algoritmos híbridos, lo que permitiría abordar instancias de gran escala en las que el volumen de datos y la cantidad de objetos superan la capacidad de los métodos exactos. Este enfoque facilitaría la obtención de soluciones de alta calidad en tiempos computacionales reducidos.

Finalmente, se identifica una oportunidad estratégica en la integración de tecnologías de visión computacional para automatizar la captura de dimensiones de los objetos en tiempo real. Esta automatización, combinada con la capacidad de los modelos aquí presentados, permitiría acelerar los ciclos de planificación y carga, impulsando a la industria hacia sistemas logísticos más inteligentes, automatizados y escalables.

## REFERENCIAS

- [1] J. Gu, M. Goetschalckx, L. F. McGinnis, "Research on warehouse operation: A comprehensive review," *European Journal of Operational Research*, vol. 177, no. 1, pp. 1-21, 2007.
- [2] E. E. Bischoff, M. S. W. Ratcliff, "Issues in the development of approaches to container loading," *Omega*, vol. 23, no. 4, pp. 377-390, 1995.
- [3] A. Bortfeldt, G. Wäscher, "Constraints in container loading – A state-of-the-art review," *European Journal of Operational Research*, vol. 229, no. 1, pp. 1-20, 2013.
- [4] A. Lim and X. Zhang, "The container loading problem," *ACM Transactions on Algorithms*, vol. 2, no. 2, pp. 260-277, 2006.
- [5] C. S. Chen, S. M. Lee, Q. S. Shen, "An analytical model for the container loading problem," *European Journal of Operational Research*, vol. 80, pp. 68-76, 1995.
- [6] A. P. Davies, E. E. Bischoff, "Weight distribution considerations in container loading," *European Journal of Operational Research*, vol. 114, no. 3, pp. 509-527, 1999.
- [7] D. Pisinger, "Heuristics for the container loading problem," *European journal of operational research*, vol. 141, no. 2, pp. 382-392, 2002.
- [8] M. T. Alonso, R. Alvarez-Valdes, M. Iori, F. Parreño, J. M. Tamarit, "Mathematical models for multicontainer loading problems," *Omega*, vol. 66, pp. 106-117, 2017.
- [9] D. Zhang, C. Gu, H. Fang, C. Ji, X. Zhang, "Multi-strategy hybrid heuristic algorithm for single container weakly heterogeneous loading problem," *Computers & Industrial Engineering*, vol. 170, 108302, 2022.
- [10] G. B. Filella, A. Trivella, F. Corman, "Modeling soft unloading constraints in the multi-drop container loading problem," *European Journal of Operational Research*, vol. 308, no. 1, pp. 336-352, 2023.
- [11] X. Zhao, J. A. Bennell, T. Bektaş, and K. Dowsland, "A comparative review of 3D container loading algorithms," *International Transactions in Operational Research*, vol. 23, no. 1-2, pp. 287-320, 2016.
- [12] D. Mack and A. Bortfeldt, "A heuristic for solving large bin packing problems in two and three dimensions," *Central European Journal of Operations Research*, vol. 20, no. 2, pp. 337-354, 2012.
- [13] F. Leung, K. Zhang, and D. Zhang, "A two-dimensional heuristic decomposition approach to a three-dimensional multiple container loading problem," *European Journal of Operational Research*, vol. 257, no. 2, pp. 526-538, 2017.
- [14] S. Liu, Y. Liu, and X. Wang, "Heuristic algorithm for the container loading problem with multiple constraints," *Computers & Industrial Engineering*, vol. 108, pp. 149-164, 2017.
- [15] K. W. Wong, T. S. Lee, and K. L. Mak, "Development of a stochastic optimisation tool for solving the multiple container packing problems," *International Journal of Production Economics*, vol. 140, no. 2, pp. 737-748, 2012.
- [16] R. García-Cáceres, C. Vega-Mejía, and J. Caballero-Villalobos, "Integral optimization of the container loading problem," in *Stochastic Optimization*, IntechOpen, 2011.
- [17] V. Galle, S. B. Boroujeni, V. H. Manshadi, C. Barnhart, and P. Jaillet, "The stochastic container relocation problem," arXiv preprint arXiv:1703.04769, 2017.
- [18] P. B. Castellucci, F. M. Toledo, and A. M. Costa, "Output maximization container loading problem with time availability constraints," *Operations Research Perspectives*, vol. 6, 100126, 2019.