The Seifert–van Kampen Theorem in Algebraic Topology and its Applications in Engineering

Raphael Santiago Mendoza Delgado, Est.[1] [https://orcid.org/0009-0003-3679-0809], Marisol Paola Delgado Baltazar, Mg.[1] [https://orcid.org/0000-0002-0278-9557], Ruben Dario Mendoza Arenas, Dr.[1] [https://orcid.org/0000-0002-7861-7946], Hernán Oscar Cortez Gutierrez, Dr.[1] [https://orcid.org/0000-0002-1516-5583], Milton Milciades Cortez Gutierrez, Dr.[2] [https://orcid.org/0000-0003-4939-7734], José Antonio Farfán Aguilar, Dr.[1] [https://orcid.org/0000-0003-1615-5608], Ana María Holgado Quispe, Dra.[3] [https://orcid.org/0000-0002-7510-9188] [1]Universidad Nacional del Callao, Perú, rsmendozad@unac.edu.pe, mpdelgadob@unac.edu.pe, rdmendozaa@unac.edu.pe, hocortezg@unac.edu.pe, jafarfana@unac.edu.pe
[2]Univerdad Nacional de Trujillo, Perú, mcortezgutierrez@yahoo.es
[3]Universidad Nacional Federico Villarreal, Perú, aholgado@unfv.edu.pe.

Abstract-The Seifert–van Kampen theorem is a fundamental tool in algebraic topology that allows calculating the fundamental group of a topological space by decomposing it into simpler subspaces. In this article, we explore the mathematical principles of the theorem, its formal formulation, and its relevance to engineering problems. Applications in the modeling of complex structures, analysis of mechanical systems and electrical circuits are presented, highlighting the usefulness of the theorem to address connectivity and stability problems. The article seeks to promote the use of topological tools in modern engineering contexts.

Keywords: Seifert-van Kampen theorem, algebraic topology, fundamental group, electrical networks, structural connections

El Teorema de Seifert–van Kampen en Topología Algebraica y sus Aplicaciones en la Ingeniería

Raphael Santiago Mendoza Delgado, Est.[1] [https://orcid.org/0009-0003-3679-0809], Marisol Paola Delgado Baltazar, Mg.[1] [https://orcid.org/0000-0002-0278-9557], Ruben Dario Mendoza Arenas, Dr.[1] [https://orcid.org/0000-0002-7861-7946], Hernán Oscar Cortez Gutierrez, Dr.[1] [https://orcid.org/0000-0002-1516-5583], Milton Milciades Cortez Gutierrez, Dr.[2] [https://orcid.org/0000-0003-4939-7734], José Antonio Farfán Aguilar, Dr.[1] [https://orcid.org/0000-0003-1615-5608], Ana María Holgado Quispe, Dra.[3] [https://orcid.org/0000-0002-7510-9188] [1]Universidad Nacional del Callao, Perú, rsmendozad@unac.edu.pe, mpdelgadob@unac.edu.pe, rdmendozaa@unac.edu.pe, hocortezg@unac.edu.pe, jafarfana@unac.edu.pe
[2]Univerdad Nacional de Trujillo, Perú, mcortezgutierrez@yahoo.es
[3]Universidad Nacional Federico Villarreal, Perú, aholgado@unfv.edu.pe.

***Resumen*-El teorema de Seifert–van Kampen es una herramienta fundamental en la topología algebraica que permite calcular el grupo fundamental de un espacio topológico mediante su descomposición en subespacios más simples. En este artículo, exploramos los principios matemáticos del teorema, su formulación formal y su relevancia en problemas de ingeniería. Se presentan aplicaciones en la modelación de estructuras complejas, análisis de sistemas mecánicos y circuitos eléctricos, destacando la utilidad del teorema para abordar problemas de conectividad y estabilidad. El artículo busca promover el uso de herramientas topológicas en contextos de ingeniería moderna.**

Palabras clave: Teorema de Seifert-van Kampen, topología algebraica, grupo fundamental, redes eléctricas, conexiones estructurales

I. INTRODUCCIÓN

La topología algebraica es una rama de las matemáticas que estudia propiedades cualitativas de los espacios a través de herramientas algebraicas. Dentro de este campo, el grupo fundamental es un concepto clave para caracterizar la conectividad de un espacio topológico. El teorema de Seifert–van Kampen permite calcular este grupo fundamental dividiendo un espacio complejo en regiones más simples, ofreciendo una técnica poderosa para el estudio de estructuras que surgen en ciencias e ingeniería [1, 2, 3, 4, 10].

En ingeniería, los principios de conectividad y comportamiento global de sistemas complejos son esenciales en diseños estructurales, análisis de redes y modelado de sistemas mecánicos [5, 6, 7, 8, 9, 11]. Este artículo explora el teorema de Seifert–van Kampen y su aplicación en dichos contextos.

II. PROBLEMÁTICA

En el estudio de sistemas complejos, como estructuras ingenieriles, redes de transporte, o sistemas eléctricos, se presenta un reto fundamental: cómo analizar la conectividad global de un sistema basado en la información de sus componentes individuales. Por ejemplo:

- En diseño estructural, es crucial garantizar la estabilidad global a partir de las conexiones entre elementos.
- En redes eléctricas, se requiere garantizar que todas las partes del sistema estén interconectadas para un funcionamiento eficiente [9].
- En el análisis de sistemas mecánicos o de comunicación, comprender la conectividad y el comportamiento global puede ser computacionalmente costoso sin una metodología sistemática.

El teorema de Seifert–van Kampen proporciona una solución elegante para abordar estos problemas al permitir calcular propiedades globales (como la conectividad) de un sistema complejo a partir de sus partes más simples [8].

III. OBJETIVOS

A. Objetivo General

Explorar y demostrar el teorema de Seifert–van Kampen, destacando su utilidad en el cálculo del grupo fundamental y sus aplicaciones en problemas de ingeniería.

B. Objetivos Específicos

1. Presentar una demostración rigurosa y detallada del teorema de Seifert–van Kampen.
2. Analizar la relación entre la topología algebraica y su aplicación en sistemas ingenieriles.
3. Proporcionar ejemplos prácticos que ilustren la aplicación del teorema en problemas como diseño estructural, circuitos eléctricos y redes de transporte.

IV. MATERIALES Y MÉTODOS

El teorema de Seifert-van Kampen es una herramienta fundamental en topología algebraica que permite determinar el grupo fundamental de un espacio topológico complejo a partir de la información de sus subespacios más simples. Este teorema es especialmente útil en el análisis de sistemas complejos en ingeniería, ya que facilita la comprensión de la conectividad global basándose en las propiedades de sus componentes individuales [1, 2, 3].

V. MARCO TEÓRICO

Teorema V.1. *Sea f un camino en X y sean $a_0, \ldots, a_n$ números tales que $0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = 1$. Sea $f_i : I \to X$ el camino igual a la aplicación lineal positiva de I en $[a_{i-1}, a_i]$ compuesta con f. Entonces*

$$[f] = [f_1] * \cdots * [f_n].$$

A. El grupo fundamental de S^n

La esfera, el toro y el doble toro son superficies topológicamente distintas. Comenzamos con la esfera; vamos a demostrar que S^n es simplemente conexa, para $n \geq 2$. El resultado clave que necesitamos queda establecido en el siguiente teorema.

Teorema V.2. *Supongamos que $X = U \cup V$, donde U y V son conjuntos abiertos de X. Supongamos que $U \cap V$ es conexo por caminos y que $x_0 \in U \cap V$. Sean i y j las aplicaciones inclusión de U y V, respectivamente, en X. Entonces las imágenes de los homomorfismos inducidos*

$$i_* : \pi_1(U, x_0) \to \pi_1(X, x_0) \quad y \quad j_* : \pi_1(V, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$$

generan $\pi_1(X, x_0)$.

Demostración. Este teorema establece que, dado un lazo f en X basado en x_0, éste es homotópico por caminos a un producto de la forma $(g_1 * (g_2 * (\cdots * g_n)))$, donde cada g_i es un lazo en X basado en x_0 enteramente contenido en U o en V.

Paso 1. Probamos que existe una subdivisión $a_0 < a_1 < \cdots a_n$ del intervalo unidad tal que $f(a_i) \in U \cap V$ y $f([a_{i-1}, a_i])$ está contenido en U o V, para cada i, el conjunto $f([b_{i-1}, b_i])$ esté contenido en U o V (utilizando el teorema del número de Lebesgue). Si $f(b_i)$ pertenece a $U \cap V$, para cada i, habremos terminado. Si no es así, sea i un índice tal que $f(b_i) \notin U \cap V$. Cada uno de los conjuntos $f([b_{i-1}, b_i])$ y $f([b_i, b_{i+1}])$ está contenido en U o en V. Si $f(b_i) \in U$, entonces ambos conjuntos deben estar en U; si $f(b_i) \in V$, ambos conjuntos deben estar en V. En cualquier caso, podemos suprimir b_i, obteniendo una nueva subdivisión $c_0, \ldots, c_{m-1}$ que sigue satisfaciendo la condición de que $f([c_{i-1}, c_i])$ esté contenido en U o en V, para cada i.

Un número finito de repeticiones de este proceso nos permite conseguir la subdivisión deseada.

Paso 2. Probemos el teorema. Dado f, sea $a_0, \ldots, a_n$ la subdivisión construida en el Paso 1. Definamos f_i como el camino en X igual a la aplicación lineal positiva de $[0, 1]$ en $[a_{i-1}, a_i]$ compuesta con f. Entonces f_i es un camino que está contenido en U o en V, y por el Teorema V.1,

$$[f] = [f_1] * [f_2] * \cdots * [f_n].$$

Para cada i, elijamos un camino α_i en $U \cap V$ de x_0 a $f(a_i)$ (aquí utilizamos el hecho de que $U \cap V$ es conexo por caminos). Dado que $f(a_0) = f(a_n) = x_0$, podemos escoger que α_0 y α_n sean ambos el constante en x_0 (Véase la Figura 1).

Ponemos ahora

$$g_i = (\alpha_{i-1} * f_i) * \overline{\alpha_i}$$

para cada i. Entonces g_i es un lazo en X basado en x_0 cuya imagen está contenida en U o en V. Mediante un cálculo directo se comprueba que

$$[g_1] * [g_2] * \cdots * [g_n] = [f_1] * [f_2] * \cdots * [f_n]$$

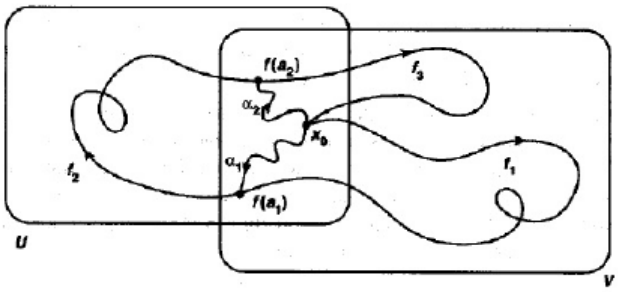

Figura 1: Descripción gráfica

■

Corolario V.3. *Supongamos que $X = U \cup V$, donde U y V son conjuntos abiertos de X y que $U \cap V$ es conexo por caminos y no vacío. Si U y V son simplemente conexos entonces X es simplemente conexo.*

Teorema V.4. *Si $n \geq 2$, la n-esfera S^n es simplemente conexa.*

Demostración. Sean $p = (0, 0, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$ y $q = (0, 0, \ldots, -1)$ el "polo norte" y el "polo sur" de S^n, respectivamente.

Paso 1. Probemos que, para $n \geq 1$, la *esfera agujereada* $S^n - p$ es homeomorfa a $\mathbb{R}^n$.

Definamos $f : (S^n - p) \to \mathbb{R}^n$ por la ecuación

$$f(x) = f(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \frac{\not\Vdash}{1 - x_{n+1}}(x_1, \ldots, x_n).$$

La aplicación f se denomina *proyección estereográfica*. (Si cogemos la recta en $\mathbb{R}^{n+1}$ que pasa por el polo norte p y el punto x de $S^n - p$, entonces esta recta interseca al n-plano $\mathbb{R}^n \times 0 \subset \mathbb{R}^{n+1}$ en el punto $f(x) \times 0$. Se comprueba que f es un homeomorfismo viendo que la aplicación $g : \mathbb{R}^n \to (S^n - p)$ dada por

$$g(y) = g(y_1, \ldots, y_n) = (t(y) \cdot y_1, \ldots, t(y))$$

donde $t(t) = {}^2/_{(1 + \|y\|^2)}$, es la inversa por la derecha y por la izquierda de f.

Observemos que la aplicación reflexión $(x_1, \ldots, x_{n+1}) \to (x_1, \ldots, x_n, -x_{n+1})$ define un homeomorfismo entre $S^n - p$ y $S^n - q$, de manera que el último espacio también es homeomorfo a $\mathbb{R}^n$.

Paso 2. Probemos el teorema. Sean U y V los conjuntos abiertos $U = S^n - p$ y $V = S^n - q$ de S^n.

Observemos primero que, para $n \geq 1$, la esfera S^n es conexa por caminos. Esto se deduce del hecho de que U y V son conexos por caminos (al ser homeomorfos a $\mathbb{R}^n$) y tienen en común el punto $(1, 0, \ldots, 0)$ de S^n.

Probemos ahora que, para $n \geq 2$, la esfera S^n es simplemente conexa. Los espacios U y V son simplemente conexos, al ser homeomorfos a $\mathbb{R}^n$. su intersección es igual a $S^n - p - q$, que es homeomorfo bajo la proyección estereográfica a $\mathbb{R}^n - 0$. El último espacio es conexo por caminos, ya que todo punto de $\mathbb{R}^n - 0$ puede unirse con un punto de S^{n-1} por un segmento de recta y S^{n-1} es conexo por caminos si $n \geq 2$. Entonces se aplica el corolario anterior, y así la n-esfera S^n es simplemente conexa. ■

Veamos ahora la versión de la demostración del Teorema de Seifert Van Kampen dada en [3].

B. El teorema de Seifert-van Kampen

Determinaremos el grupo fundamental de un espacio X que puede escribirse como la unión de dos subconjuntos abiertos U y V que tienen intersección conexa por caminos. Se ha probado que si $x_0 \in U \cap V$, las imágenes de los grupos $\pi_1(U, x_0)$ y $\pi_1(V, x_0)$ en $\pi_1(X, x_0)$, bajo los homomorfismos inducidos por la inclusión, generan el último grupo. En esta sección probaremos que $\pi_1(X; x_0)$ está, de hecho, completamente determinado por estos dos subgrupos, el grupo $\pi_1(U \cap V, x_0)$ y los homomorfismos entre estos subgrupos inducidos por la inclusión. Éste es un resultado básico acerca de grupos fundamentales. Nos permitirá calcular los grupos fundamentales de numerosos espacios, incluyendo las variedades compactas de dimensión dos.

Teorema V.5 (Teorema de Seifert-van Kampen). *Sea $X = U \cup V$, donde U y V son abiertos en X; supongamos que U, V y $U \cap V$ son conexos por caminos; sea $x_0 \in U \cap V$. Sea H un grupo y sean*

$$\phi_1 : \pi_1(U, x_0) \to H \qquad y \qquad \phi_2 : \pi_1(V, x_0) \to H$$

homomorfismos. Sean i_1, i_2, j_1, j_2 los homomorfismos indicados en el siguiente diagrama, cada uno de ellos inducido por la inclusión.

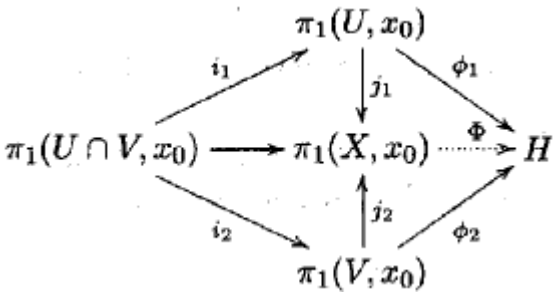

Figura 2: Diagrama

Si $\phi_1 \circ i_1 = \phi_2 \circ i_2$, entonces existe un único homomorfismo $\Phi : \pi_1(X, x_0) \to H$ tal que $\Phi \circ j_1 = \phi_1$ y $\Phi \circ j_2 = \phi_2$.

Este teorema afirma que si ϕ_1 y ϕ_2 son homomorfismos arbitrarios que son "compatibles sobre $U \cap V$", entonces inducen un homomorfismo de $\pi_1(X, x_0)$ en H.

Demostración. La unicidad es fácil. El Teorema V.2 afirma que $\pi_1(X, x_0)$ está generado por las imágenes de j_1 y j_2. El valor de Φ sobre el generador $j_1(g_1)$ debe ser igual a $\phi_1(g_1)$, y su valor sobre $j_2(g_2)$ debe coincidir con $\phi_2(g_2)$. Entonces Φ está completamente determinado por ϕ_1 y ϕ_2. La demostración de que Φ existe es un caso aparte.

Por comodidad introduciremos la siguiente notación: dado un camino f en X, escribiremos $[f]$ para denotar su clase de homotopía de caminos en X. Si f está en U, entonces $[f]_U$ denotará su clase de homotopía de caminos en U. Las notaciones $[f]_V$ y $[f]_{U \cap V}$ se definen de modo similar.

Paso 1. Comenzamos definiendo una aplicación ρ que asigna a cada lazo f basado en x_0, contenido en U o en V, un elemento de H. Definimos

$$\rho(f) = \phi_1([f]_U) \text{ si } f \text{ está en } U,$$
$$\rho(f) = \phi_2([f]_V) \text{ si } f \text{ está en } V.$$

Entonces ρ está bien definida, ya que si f está en la intersección de U y V, entonces

$$\phi_1([f]_U) = \phi_1 i_1([f]_{U \cap V}) \quad \text{y} \quad \phi_2([f]_V) = \phi_2 i_2([f]_{U \cap V}),$$

y estos dos elementos de H son iguales por hipótesis. La aplicación ρ satisface las siguientes condiciones:

(1) Si $[f]_U = [g]_U$, o si $[f]_V = [g]_V$, entonces $\rho(f) = \rho(g)$.

(2) Si f y g están en U, o si ambas están en V, entonces $\rho(f * g) = \rho(f) \cdots \rho(g)$.

La primera afirmación se satisface por definición, y la segunda porque tanto ϕ_1 como ϕ_2 son homomorfismos.

Paso 2. Ahora vamos a extender ρ a una aplicación σ que asigna a cada camino f contenido en U o en V, un elemento de H, tal que la aplicación σ satisface la condición (1) del Paso 1, y satisface la condición (2) cuando $f * g$ está definido.

Para comenzar elegimos, para cada $x \in X$, un camino α_x desde x_0 hasta x como sigue: si $x = x_0$, sea α_x el camino constante en x_0. Si $x \in U \cap V$, sea α_x un camino en U o en V, respectivamente.

Entonces para cualquier camino f en U o en V, definimos un lazo $L(f)$ en U o en V, respectivamente, basado en x_0 por la ecuación

$$L(f) = \alpha_x * (f * \overline{\alpha}_y)$$

donde x es el punto inicial de f e y es el punto final de f (véase figura 3. Finalmente, definimos

$$\sigma(f) = \rho(L(f)).$$

Probemos que σ es una extensión de ρ. Si f es un lazo basado en x_0 que está en U o en V, entonces

$$L(f) = e_{x_0} * (f * e_{x_0})$$

ya que α_{x_0} es el camino constante en x_0. Entonces $L(f)$ es homotópica por caminos a f en U o en V, de modo que $\rho(L(f)) = \rho(f)$ por la condición (1) para ρ. Por tanto, $\sigma(f) = \rho(f)$.

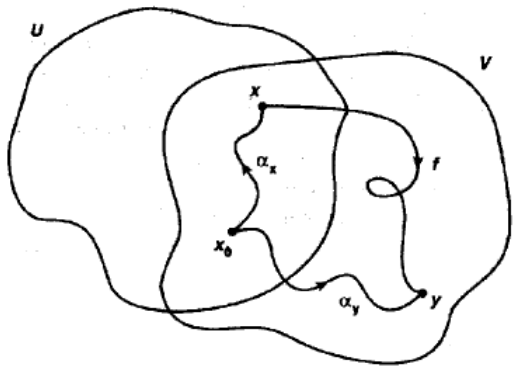

Figura 3: Descripción gráfica

Para comprobar la condición (1), sean f y g caminos homotópicos en U o en V. Entonces los lazos $L(f)$ y $L(g)$ son también homotópicos por caminos en U o en V, de modo que la condición (1) para ρ se aplica. Para comprobar (2), sean f y g caminos arbitrarios en U o en V tales que $f(1) = g(0)$. Tenemos

$$L(f) * L(g) = (\alpha_x * (f * \overline{\alpha}_y)) * (\alpha_y * (g * \overline{\alpha}_z))$$

para puntos adecuados x, y, z; este lazo es homotópico por caminos en U o en V a $L(f * g)$, por lo que

$$\rho(L(f * g)) = \rho(L(f) * L(g)) = \rho(L(f)) \cdot \rho(L(g))$$

por las condiciones (1) y (2) para ρ. Por tanto, $\sigma(f * g) = \sigma(f) \cdot \sigma(g)$.

Paso 3. Finalmente, extendemos la aplicación σ a una aplicación τ que lleva un camino arbitrario f a un elemento de H. Dicha aplicación satisfará las siguientes condiciones:

(1) Si $[f] = [g]$ entonces $\tau(f) = \tau(g)$.

(2) $\tau(f * g) = \tau(f) \cdot \tau(g)$, si $f * g$ está definido.

Dado f, escogemos una partición $s_0 < \cdots < s_n$ de $[0, 1]$ tal que f aplica cada uno de los subintervalos $[s_{i-1}, s_i]$ en U o en V. Denotemos por f_i la aplicación lineal positiva del intervalo $[0, 1]$ en el intervalo $[s_{i-1}, s_i]$ compuesta con f. Entonces f_i es un camino en U o en V, y

$$[f] = [f_1] * \cdots * [f_n].$$

Si τ debe ser una extensión de σ satisfaciendo (1) y (2), debe verificarse

$$\tau(f) = \sigma(f_1) \cdot \sigma(f_2) \cdots \sigma(f_n). \tag{1}$$

De modo que utilizaremos esta ecuación como definición de τ.

Probaremos que esta definición es independiente es independiente de la elección del subintervalo. Será suficiente probar que el valor de $\tau(f)$ permanece invariable si añadimos un único punto p a la participación. Sea i el índice tal que $s_{i-1} < p < s_i$. Si calculamos $\tau(f)$ utilizando esta nueva partición, el único cambio en la fórmula (1) es que el factor $\sigma(f_i)$ desaparece y es reemplazado por el producto $\sigma(f_i') \cdot \sigma(f_i'')$, donde f_i' y f_i'' son las aplicaciones lineales positivas de $[0, 1]$ en $[s_{i-1}, p]$ y $[p, s_i]$, respectivamente, compuestas con f. Pero f_i es homotópica por caminos a $f_i' * f_i''$ en U o en V, de modo que $\sigma(f_i) = \sigma(f_i') \cdot \sigma(f_i'')$, por las condiciones (1) y (2) para σ. Por tanto, τ está bien definida.

Se deduce que τ es una extensión σ. En efecto, si f está en U o en V, podemos utilizar la partición trivial de $[0, 1]$ para definir $\tau(f)$; entonces $\tau(f) = \sigma(f)$ por definición.

Paso 4. Probemos la condición (1) para la aplicación τ. Esta parte de la demostración requiere tomar precauciones.

En primer lugar verificaremos esta condición en un caso especial. Sean f y g caminos en X desde x hasta y, y sea F una homotopía de caminos entre ellos. Supongamos la hipótesis adicional que existe una participación $s_0 < \ldots < s_n$ de $[0, 1]$ tal que F aplica cada rectángulo $R_i = [s_{i-1}, s_i] \times I$ dentro de U o de V. Probaremos en este caso que $\tau(f) = \tau(g)$.

Dado i, consideremos la aplicación lineal positiva de $[0, 1]$ en $[s_{i-1}, s_i]$ compuesta con f o con g y denominemos a estos dos caminos f_i y g_i, respectivamente. La restricción de F a cada rectángulo R_i nos proporciona una homotopía entre f_i y g_i que toma valores en U o en V pero que no es una homotopía de caminos, ya que los extremos de los caminos pueden cambiar durante la homotopía. Consideremos los caminos trazados por los extremos durante la homotopía. Definimos β_i como el camino $\beta_i(t) = F(x_i, t)$. Entonces β_i es un camino en X desde $f(s_i)$ hasta $g(s_i)$. Los caminos $\beta_i(t) = F(s_i, t)$. Entonces β_i es un camino en X desde $f(s_i)$ hasta $g(s_i)$. Los caminos β_0 y β_n son los caminos constantes en x e y, respectivamente (véase la Figura 4). Probaremos que, para cada i,

$$f_i * \beta_i \simeq_p \beta_{i-1} * g_i$$

con la homotopía de caminos tomando valores en U o en V.

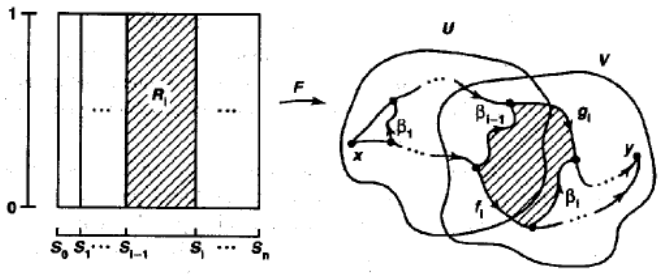

Figura 4: Descripción gráfica

En el rectángulo R_i, consideremos el camino que recorre los lados inferior y derecho de R_i, desde $s_{i-1} \times 0$ hasta $s_i \times 0$ y hasta $s_i \times 1$; si componemos este camino con la aplicación F obtenemos el camino $f_i * \beta_i$. Análogamente, si consideramos el camino que recorre los lados izquierdo y superior de R_i y lo componemos con F obtenemos el camino $\beta_{i-1} * g_i$. Como R_i es convexo, existe una homotopía de caminos en R_i entre estos dos caminos; si componemos con F obtenemos una homotopía de caminos entre $f_i * \beta_i$ y $\beta_{i-1} * g_i$ que tiene lugar en U o en V, como deseábamos.

Se deduce de las condiciones (1) y (2) que

$$\sigma(f_i) \cdot \sigma(\beta_i) = \sigma(\beta_{i-1}) \cdot \sigma(g_i)$$

de modo que

$$\sigma(f_i) = \sigma(\beta_{i-1}) \cdots \sigma(g_i) \cdot \sigma(\beta_i)^{-1}. \quad (2)$$

De manera similar se deduce que puesto que β_0 y β_n son caminos constantes, $\sigma(\beta_0) = \sigma(\beta_n) = 1$. De la igualdad $\beta_0 * \beta_0 = \beta_0$ se deduce $\sigma(\beta_0) \cdot \sigma(\beta_0) = \sigma(\beta_0)$.

Ahora calculamos τ del siguiente modo:

$$\tau(f) = \sigma(f_1) \cdot \sigma(f_2) \cdots \sigma(f_n).$$

Sustituyendo (2) en esta ecuación y simplificando, obtenemos la ecuación

$$\tau(f) = \sigma(f_1) \cdot \sigma(g_1) \cdot \sigma(\beta_2) \cdots \sigma(g_n) = \tau(g).$$

Por tanto hemos probado la condición (1) en un caso especial.

Ahora probaremos la condición (1) en el caso general. Dados f y g y una homotopía de caminos F entre ellos, consideremos subdivisiones $s_0, \ldots, s_n$ y $t_0, \ldots, t_m$ de $[0, 1]$ tales que F aplica cada rectángulo $[s_{i-1}, s_i] \times [t_{j-1}, t_j]$ en U o en V. Sea f_j el camino $f_j(s) = F(s, t_j)$; entonces $f_0 = f$ y $f_m = g$. La pareja de caminos f_{j-1} y f_j satisfacen las condiciones de nuestro caso especial, de modo que $\tau(f_{j-1}) = \tau(f_j)$ para todo j. Se deduce entonces que $\tau(f) = \tau(g)$, como deseábamos.

Paso 5. Ahora probaremos la condición (2) para la aplicación τ. Dado un camin $f * g$ en X, escojamos una subdivisión $s_0 < \ldots < s_n$ de $[0, 1]$ que contenga al punto $1/2$ como un punto de subdivisión, tal que $f * g$ aplica cada subintervalo en U o en V. Sea k el índice tal que $s_k = 1/2$.

Para $i = 1, \ldots, k$, la aplicación lineal positiva de $[0, 1]$ en $[s_{i-1}, s_i]$ compuesta con la aplicación $f * g$ coincide con la aplicación por f_i. De manera análoga, para $i = k + 1, \ldots, n$, la aplicación lineal positiva de $[0, 1]$ en $[s_{i-1}, s_i]$, compuesta también con $f * g$ coincide con la aplicación por g_{i-k}. Usando la subdivisión $s_0, \ldots, s_n$ para el dominio $f * g$ obtenemos

$$\tau(f * g) = \sigma(f_1) \cdots \sigma(g_k) \cdot \sigma(g_1) \cdots \sigma(g_{n-k}).$$

Usando la subdivisión $2_{s_0}, \ldots, 2_{s_k}$ para el camino f tenemos

$$\tau(f) = \sigma(f_1) \cdots \sigma(f_k).$$

Y utilizando la subdivisión $2_{s_k} - 1, \ldots, 2_{s_n} - 1$ para el camino g tenemos

$$\tau(g) = \sigma(g_1) \cdots \sigma(g_{n-k}).$$

Por lo tanto, la condición (2) se satisface trivialmente.

Paso 6. El teorema se obtiene ahora aplicando los pasos anteriores. Para cada lazo f en X basado en x_0, definimos

$$\Phi([f]) = \tau(f).$$

Las condiciones (1) y (2) prueban que Φ es un homomorfismo bien definido.

Probemos que $\Phi \circ j_1 = \phi_1$. Si f es un lazo en U, entonces

$$\begin{aligned} \Phi(j_1([f]_U)) &= \Phi([f]) \\ &= \tau(f) \\ &= \rho(f) = \phi_1([f]_U) \end{aligned}$$

como deseábamos. De forma similar se demuestra $\Phi \circ j_2 = \phi_2$. ■

Ejemplo: Grupo fundamental del toro T^2.

El toro T^2 puede representarse como el producto cartsiano de dos círculos $S^1 \times S^1$, o como un espacio formado al identificar los lados opuestos de un rectángulo [4].

C. Descomposición del espacio

Dividimos el toro T^2 en dos subespacios abiertos U y V.

- U: Una vecindad tubular alrededor de un meridiano del toro (una banda horizontal que envuelve el toro).
- V: Una vecindad tubular alrededor de un paralelo del toro (una banda vertical que envuelve el toro).
- $U \cap V$: Una vecindad tubular alrededor del punto donde el meridiano y el paralelo se cruzan. Esto es homeomorfo a un disco (contractil).

D. Grupos fundamentales de las partes

- $\pi_1(U)$: U es homotópico a un círculo (S^1), así que $\pi_1(U) \cong \mathbb{Z}$.
- $\pi_1(V)$: V es homotópico a un círculo (S^1), así que $\pi_1(V) \cong \mathbb{Z}$.
- $\pi_1(U \cap V)$: $U \cap V$ es homotópico a un círculo (D^2), así que $\pi_1(U \cap V) \cong 0$ (es trivial).

E. Uso del teorema

El Teorema de Seifert-van Kampen dice que:

$$\pi_1(T^2) \cong \pi_1(U) *_{\pi_1(U \cap V)} \pi_1(V).$$

Dado que $\pi_1(U \cap V)$ es trivial, el producto amalgamado se reduce al producto libre de los grupos fundamentales de U y V:

$$\pi_1(T^2) \cong \pi_1(U) * \pi_1(V).$$

Cada $\pi_1(U)$ y $\pi_1(V)$ es isomorfo a $\mathbb{Z}$, generado respectivamente por a (la clase del meridiano) y b (la clase del paralelo). Así, el grupo fundamental del toro es:

$$\pi_1(T^2) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

Esto significa que el toro tiene un grupo fundamental abeliano generado por dos elementos a y b, donde $ab = ba$.

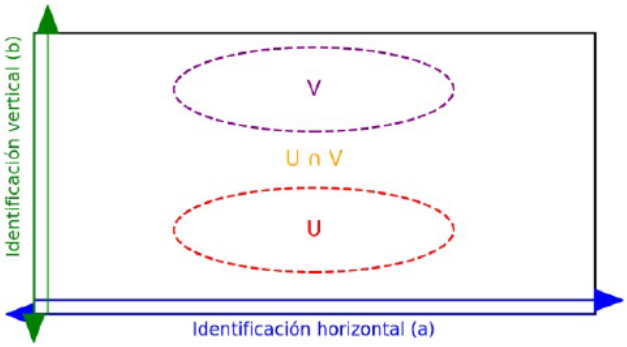

Figura 5: Descomposición del toro para aplicar el Teorema de Seifert-van Kampen

- El rectángulo representa al toro antes de identificar los lados opuestos.
- Las flechas horizontales (azules) y verticales (verdes) indican las identificaciones de los lados que generan el toro.
- Las regiones U (rojo), V (morado), y $U \cap V$ (naranja) son las parte en las que se descompone.

VI. RESULTADOS

A. Aplicaciones en la Ingeniería del Teorema de Seifert-van Kampen

El Teorema de Seifert-van Kampen, aunque es una herramienta teórica de la topología algebraica, tiene aplicaciones indirectas en diversas áreas de la ingeniería. Estas aplicaciones surgen principalmente en la modelización matemática y el análisis de sistemas complejos que involucran estructuras topológicas. Algunas de estas aplicaciones incluyen:

A.1. Análisis de Redes y Sistemas Eléctricos

- En ingeniería eléctrica, los sistemas de redes complejas, como redes de distribución de energía o circuitos electrónicos, pueden modelarse como espacios topológicos. El teorema ayuda a descompones estas redes en componentes más simples para analizar la conectividad de los sistemas y asegurar la continuidad de las corrientes o potenciales eléctricos [9].
- Aplicaciones específicas incluyen:
  - Modelización de redes de microgrids mediante grafos topológicos.
  - Verificación de conectividad en sistemas eléctricos de transmisión.

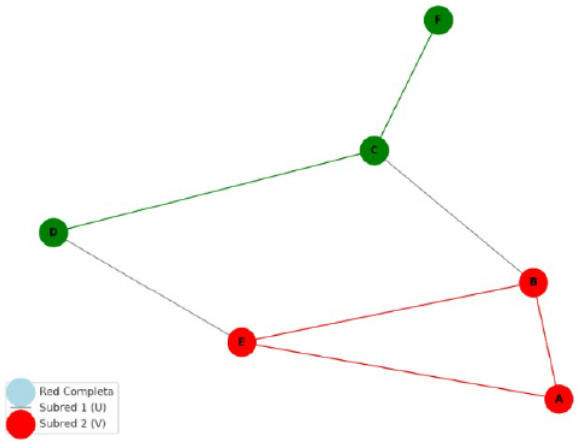

Figura 6: Representación de una red eléctrica descompuesta en subredes para aplicar el análisis de conectividad

- **Red completa (azul claro):** Representa la red eléctrica general, donde los nodos son estaciones o componentes y las aristas son conexiones.
- **Subred 1(rojo, U):** Una sección de la red que puede analizarse de manera independiente.
- **Subred 2(verde, V):** Otra sección de la red.

Esta descomposición permite verificar la conectividad global de la red usando el Teorema de Seifert-van Kampen. asegurando que las subredes se conectan correctamente para formar una red funcional.

Descomposición de la red:
La red completa G se divide en dos subredes:

- U: Representada por los nodos $\{A, B, E\}$ (rojo).
- V: Representada por los nodos $\{C, D, F\}$ (verde).
- La intersección $U \cap V$: En este caso, no hay nodos ni aristas comunes entre U y V, por lo que $U \cap V = \emptyset$.

Grupos fundamentales de U, V y $U \cap V$:

- Subred U:

  U es un grafo que forma un triángulo (circuito cerrado entre los nodos A, B y E). Su grupo fundamental es:

  $$\pi_1(U) \cong \mathbb{Z}.$$

- Subred V:

  V también es un grafo conexo que forma una línea abierta (nodos C, D y F). Dado que no tiene ciclos, su grupos fundamental es trivial:

  $$\pi_1(V) \cong 0.$$

- Intersección $U \cap V$:

  En este caso, no hay intersección ($U \cap V = \emptyset$), por lo que el grupo fundamental de la intersección es trivial:

  $$\pi_1(U \cap V) \cong 0.$$

El teorema establece que el grupo fundamental de la red completa G es el producto amalgamado de los grupos fundamentales de U y V sobre su intersección $U \cap V$:

$$\pi_1 G \cong \pi_1(U) *_{\pi_1(U \cap V)} \pi_1(V).$$

En este caso como $\pi_1(U \cap V) \cong 0$, el producto amalgamado se reduce a un producto libre de los grupos fundamentales de U y V.

$$\pi_1(G) \cong \pi_1(U) * \pi_1(V).$$

Sustituyendo los valores:

$$\pi_1(G) \cong \mathbb{Z} * 0 \cong \mathbb{Z}.$$

Esto implica que el grupo fundamental de la red completa G está denominado por el ciclo en la subred U.

Interpretación práctica en la red eléctrica:

El análisis indica que la conectividad global de la red depende exclusivamente del ciclo presente en la subred U. Esto significa que si ese ciclo se interrumpe, la red pierde su conectividad.

Este resultado puede utilizarse para identificar puntos críticos en el diseño de la red y garantizar la redundancia en los ciclos.

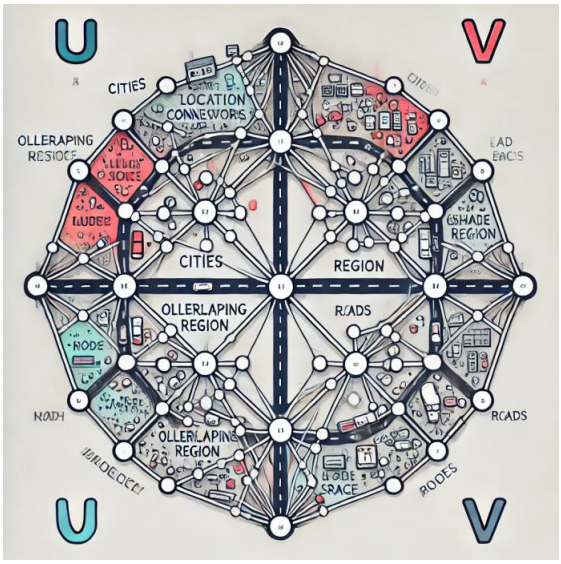

Figura 7: Red de transporte, dividida en dos regiones U y V.

En la figura 7 la conectividad se puede analizar a partir de las conexiones locales en cada región y su interacción, como ilustra el teorema de Seifert-van Kampen.

B. Diseño estructural

En ingeniería civil, garantizar la estabilidad global de una estructura es esencial. El teorema de Seifert-van Kampen permite analizar cómo las conexiones entre diferentes elementos estructurales contribuyen a la integridad total de la construcción. Al descomponer una estructura en componentes más simples, se puede estudiar su comportamiento individual y luego inferir las propiedades del conjunto.

Una aplicación directa del teorema de Seifert-van Kampen en el diseño estructural consiste en analizar la estabilidad global de una estructura compleja, como un puente o un edificio, descomponiéndola en componentes más simples, como vigas, columnas o placas.

Ejemplo: Análisis de un puente en ingeniería civil.

Problema: Un puente está compuesto de múltiples elementos estructurales (por ejemplo vigas y cables). El objetivo es garantizar la estabilidad global y la resistencia ante cargas, como el peso de vehículos y fuerzas ambientales (viento, sismos, etc) [7].

Descomposición del sistema: Aplicando el principio del teorema de Seifert-van Kampen:

- El puente se divide en componentes más simples (vigas individuales, secciones de cables, juntas)
- Cada componente se analiza individualmente en términos de sus propiedades estructurales, como rigidez, resistencia y conectividad.

Aplicación del teorema: El teorema de Seifert-van Kampen ayuda a:

- **Establecer la conectividad global:** Analiza cómo están conectadas las vigas y cables para determinar si el puente forma una estructura conectada y estable.
- **Calcular propiedades globales:** A partir de los grupos fundamentales de los componentes, se pueden calcular propiedades estructurales como la resistencia a cargas distribuidas y la estabilidad ante vibraciones.

Conclusión: La conecttividad global y las propiedades mecánicas del puente pueden reducirse a partir de la unión coherente de sus componentes, lo que garantiza que el diseño cumpla con los estándares de seguridad y funcionalidad.

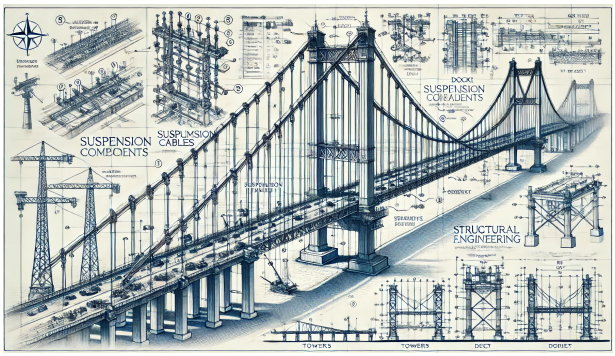

Figura 8: Puente colgante donde se destacan los componentes estructurales principales como las torres, los cables de suspensión y el tablero. Los elementos están conectados para reflejar cómo se garantiza la estabilidad global a partir de las conexiones individuales.

Ejemplo: Aplicación a una red compleja de un edificio [8].

Figura 9: Red compleja de un edificio, de una estructura de oficinas, con interconexiones entre distintos componentes o sistemas, tales como oficinas, servidores y dispositivos de red.

Análisis de redes de comunicación: Cada nodo de la red (servidores, routers, dispositivos, etc.) puede considerarse un subespacio dentro de un sistema global de conectividad.

Sistemas de intraestructura eléctrica: Los puntos de distribución eléctrica en el edificio (tableros principales, subtableros y dispositivos finales) pueden modelarse como subespacios.

Diseño de estructuras de emergencia: Los caminos de evacuación, sistemas de alarma y sensores son cruciales para la seguridad del edificio.

Optimización de infraestructura física: El edificio en sí puede descomponerse en secciones (por ejemplo, un ala o un piso).

El teorema permite evaluar si todo el sistema está conectado adecuadamente analizando los grupos fundamentales de las subredes. Esto asegura que todos los nodos estén comunicados y que no existan áreas desconectadas.

Mediante el análisis de conectividad, se puede verificar que todos los sensores y alarmas estén interconectados para actuar de manera conjunta en situaciones de emergencia.

Ayuda a garantizar que cada área del edificio tenga suministro eléctrico continuo a partir de la conectividad global de los sistemas eléctricos.

Ayuda a evaluar si las conexiones estructurales (puentes, escaleras, o zonas de soporte) garantizan la estabilidad del edificio como un todo.

VII. CONCLUSIONES

1. **Interrelación entre Topología Algebraica e Ingeniería.**

   El teorema de Sefiert-van Kampen demuestra cómo la topología algebraica proporciona herramientas matemáticas fundamentales para resolver problemas prácticos en ingeniería. Permite analizar la conectividad global de sistemas complejos al descomponerlos en componentes más simples, lo cual es aplicable a disciplinas como diseño estructural, redes eléctricas y sistemas mecánicos.

2. **Conectividad glonal desde componentes simples.**

   El teorema permite inferir propiedades globales de un sistema (como estabilidad estructural, eficiencia de redes o resistencia de sistemas) a partir del análisis de sus subestructuras. Esto proporciona una metodología sistemática que optimiza el análisis de sistemas complejos, especialmente cuando los cálculos directos serían prohibitivamente costosos.

3. **Aplicaciones prácticas en diseño estructural.**

   En ingeniería civil, el teorema facilita el diseño de estructuras como puentes, edificios y torres. La descomposición en elementos simples, como vigas y juntas, asegura que el análisis sea eficiente y confiable, garantizando la estabilidad global y el cumplimiento de los estándares de seguridad.

4. **Optimización de redes de transporte y sistemas eléctricos.**

   Las redes de transporte y las redes eléctricas se benefician de este enfoque al analizar y optimizar su conectividad. El teorema proporciona un marco para garantizar la interconexión eficiente de todos los elementos, mejorando la funcionalidad y resiliencia de los sistemas.

5. **Herramienta computacionalmente eficiente**

   Al reducir la complejidad del análisis de sistemas mediante la descomposición en partes más simples, el teorema de Seifert-van Kampen contribuye a la solución de problemas computacionalmente costosos, lo que es crucial en la simulación y el diseño asistido por computadora (CAD).

REFERENCIAS

[1] Hatcher A., *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 2002.

[2] Bredon G. E., *Topology and Geometry*, Springer-Verlag, 1993.

[3] Munkres J. R., *Topology*, Prentice Hall, 2000.

[4] Spanier E. H., *The Fundamental Group and Covering Spaces*, Annals of Mathematics, 1966.

[5] Misra S. and Others, *Connectivity in Complex Systems: Applications in Engineering*, IEEE Transactions on Systems, 2010.

[6] Dullerud G. and Paganini F., *A Course in Robust Control Theory: A Convex Approach*, Springer, 2000.

[7] Purcell E. J., *Topology and Physics in Engineering Structures*, Elsevier, 2006.

[8] Teoremas.club., *Teorema de Seifert–van Kampen sobre grupos*, Recuperado de: https://www.teoremas.club/teorema-de-seifertvan- kampen-sobre-grupos-fundamentales, 2023.

[9] SpringerLink. *Optimizing Connectivity in Electrical Grids*, Recuperado de: https://link.springer.com

[10] Van Kampen E. R., "On the conections between the fundamental groups of some related spaces", *Am. J. Math*, 55, 261-267, 1933.

[11] Mendoza et al., "Applications of simplicial complexes in the homotopy group calculation of the sphere and in systems engineering", Proceedings of the LACCEI international Multi-conference for Engineering Education and Technology.