ISBN: 978-628-96613-1-6. ISSN: 2414-6390. Digital Object Identifier: https://dx.doi.org/10.18687/LACCEI2025.1.1.374

Study of the presence and staility global attractors in Riemannian wave equations with localized damping

Marisol Paola Delgado Baltazar, Mg.[1] [https://orcid.org/0000-0002-0278-9557], Aida Nerida Falcon Cerna, Mg.[2] [https://orcid.org/0009-0008-5481-0988], Carlos Roberto Pesantes Rojas, Dr.[2] [https://orcid.org/0009-0007-8472-3044], Mónica La Chira Loli, Dra.[3] [https://orcid.org/0000-0001-6387-1151], Rosa Quispe Llamoca, Dra.[4] [https://orcid.org/0000-0003-2064-165X], César Vilchez Inga, Dr.[1] [https://orcid.org/0000-0002-5905-0649], Jesús Yuncar Alvaron, Dr.[1] [https://orcid.org/0000-0002-1309-3395] [1]Universidad Nacional del Callao, Perú, mpdelgadob@unac.edu.pe, cvilchezi@unac.edu.pe, jyuncara@unac.edu.pe [2]Universidad Nacional José Faustino Sanchéz, Perú, afalcon@unjfsc.edu.pe, cpesantes@unjfsc.edu.pe [3]Universidad Autónoma del Perú, Perú, monica.lachira@autonoma.pe [4]Universidad de Lima, Perú, roquispe@ulima.edu.pe

Abstract-This work addresses the existence and continuity of global attractors for wave equations in Riemannian manifolds, considering the effect of localized damping. Wave equations with localized dissipation represent a relevant model in physical problems, such as wave propagation in media with partial dampers. We have the following questions: Are there exponential global attractors for this type of systems?

Is it possible to ensure the continuity of these attractors in the face of external disturbances in the system? The methodology of functional analysis techniques and semigroup theory was used and the existence of a global attractor compact global attractor $\mathcal{A}$ in the Hilbert space $\mathcal{H}$. The system, due to the energy dissipation generated by localized damping, meets the necessary conditions of compactness and invariance.

It is verified that the energy of the system decreases exponentially:

$$\frac{dE(t)}{dt} = -\int_{\Gamma} a(x)|u_t|^2 d\mu_g \leq 0\,,\ \forall t \geq 0.$$

As a result, the trajectories of the system converge asymptotically towards $\mathcal{A}$

It is shown that the global attractor $\mathcal{A}_\varepsilon$ associated with a system perturbed by a small variation ε in which the damping coefficient $a_\varepsilon(x)$ converges to the original attractor $\mathcal{A}$.

The Hausdorff metric d_H between A_ε and $\mathcal{A}$ satisfies:

$$d_H(\mathcal{A}_\varepsilon, \mathcal{A}) \to 0 \ \text{ cuando } \varepsilon \to 0.$$

Keywords: Riemannian wave equations, Global Attractors, ε-sets controllable in measure.

Estudio de la presencia y estabilidad de atractores globales en ecuaciones de onda Riemannianas con amortiguamiento localizado

Marisol Paola Delgado Baltazar, Mg.[1] [https://orcid.org/0000-0002-0278-9557], Aida Nerida Falcon Cerna, Mg.[2] [https://orcid.org/0009-0008-5481-0988], Carlos Roberto Pesantes Rojas, Mg.[2] [https://orcid.org/0009-0007-8472-3044], Mónica La Chira Loli, Dra.[3] [https://orcid.org/0000-0001-6387-1151], Rosa Quispe Llamoca, Dra.[4] [https://orcid.org/0000-0003-2064-165X], César Vilchez Inga, Dr.[1] [https://orcid.org/0000-0002-5905-0649], Jesús Yuncar Alvaron, Dr.[1] [https://orcid.org/0000-0002-1309-3395] [1]Universidad Nacional del Callao, Perú, mpdelgadob@unac.edu.pe, cvilchezi@unac.edu.pe, jyuncara@unac.edu.pe [2]Universidad Nacional José Faustino Sanchéz, Perú, afalcon@unjfsc.edu.pe, cpesantes@unjfsc.edu.pe [3]Universidad Autónoma del Perú, Perú, monica.lachira@autonoma.pe [4]Universidad de Lima, Perú, roquispe@ulima.edu.pe

Resumen-Este trabajo aborda la existencia y continuidad de atractores globales para ecuaciones de onda en variedades riemannianas, considerando el efecto de un amortiguamiento localizado. Las ecuaciones de onda con disipación localizada representan un modelo relevante en problemas físicos, como la propagación de ondas en medios con amortiguadores parciales. Tenemos las siguientes interrogantes: ¿Existen atractores globales exponenciales para este tipo de sistemas?

¿Es posible asegurar la continuidad de dichos atractores frente a perturbaciones externas en el sistema?. Se usó la metodología de técnicas de análisis funcional y teoría de semigrupos y se demuestra la existencia de un atractor global compacto $\mathcal{A}$ en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. El sistema, debido a la disipación de energía generada por el amortiguamiento localizado, cumple con las condiciones necesarias de compacidad e invarianza

Se verifica que la energía del sistema decrece exponencialmente:

$$\frac{dE(t)}{dt} = -\int_{\Gamma} a(x)|u_t|^2 d\mu_g \leq 0\,,\ \forall t \geq 0.$$

Como resultado, las trayectorias del sistema convergen asintóticamente hacia $\mathcal{A}$

Se demuestra que el atractor global $\mathcal{A}_\varepsilon$ asociada a un sistema perturbado por una pequeña variación ε en el coeficiente de amortiguamiento $a_\varepsilon(x)$ converge al atractor original $\mathcal{A}$.

La métrica de Hausdorff d_H entre A_ε y $\mathcal{A}$ satisface:

$$d_H(\mathcal{A}_\varepsilon, \mathcal{A}) \to 0 \ \text{ cuando } \varepsilon \to 0.$$

Palabras clave: Ecuaciones de onda Riemannianas, Atractores Globales, Conjuntos ε-controlables en medida.

I. INTRODUCCIÓN

El análisis de los atractores globales en ecuaciones de onda se ha vuelto esencial para modelar fenómenos físicos y estructurales complejos. Un ejemplo icónico que resalta esta necesidad es el colapso del puente Tacoma Narrows en 1940, provocado por una resonancia generada por el viento. Este evento demostró la vulnerabilidad de estructuras curvas frente a interacciones dinámicas externas, subrayando la importancia de un estudio detallado de sistemas vibratorios con amortiguamiento localizado.

Figura 1: Representación dramática del colapso del Puente Tacoma Narrows en 1940, mostrando el momento en que la estructura se retuerce y cae en el agua debido a la resonancia inducida por el viento.

En el ámbito de las ecuaciones de onda definidas en variedades Riemannianas, como puentes u otras estructuras con geometrías curvas, los atractores globales tienen un rol fundamental al describir los estados finales hacia los que tienden las soluciones dinámicas. Estos atractores no solo permiten evaluar la estabilidad de las soluciones, sino también cómo estas reaccionan ante perturbaciones o cambios en las condiciones iniciales y externas del sistema.

Investigaciones recientes han abordado la existencia de atractores globales exponenciales y su continuidad, utilizando herramientas matemáticas como las métricas de Hausdorff y los efectos del amortiguamiento localizado [1]. Estos avances no solo han profundizado en la teoría de sistemas dinámicos, sino que también han contribuido a mejorar el diseño y la estabilidad de estructuras ingenieriles.

Por lo tanto, el presente estudio tiene como objetivo demostrar la existencia y continuidad de atractores globales en ecuaciones de onda dentro de dominios curvados, considerando las propiedades geométricas de las variedades Riemannianas y el impacto del amortiguamiento localizado. Este enfoque no solo amplía los fundamentos teóricos, sino que también tiene aplicaciones directas en el análisis y diseño de infraestructuras modernas, como puentes, edificios y vehículos.

II. MATERIALES Y MÉTODOS

A. Planteamiento del problema

La investigacion tiene como Problema general:

¿Cómo garantizar la existencia y continuidad de atractores globales en ecuaciones de onda Riemannianas con amortiguamiento localizado?

Sus Problemas específicos son:

1. ¿Existen atractores globales exponenciales?
2. ¿Es posible asegurar su continuidad frente a variaciones externas?

El Objetivo general es:

Demostrar la existencia y continuidad de atractores globales para las ecuaciones planteadas.

Tenemos como Objetivos específicos:

1. Probar la existencia de atractores globales uniformemente acotados.
2. Analizar su continuidad usando métricas de Hausdorff.

La investigación se justifica de manera teórica porque extiende la teoría de atractores globales a métricas no euclidianas, optimiza el uso de regiones de control mediante ε-controlabilidad. El impacto práctico se da en las aplicaciones en dinámica estructural e ingeniería (puentes, edificaciones) y en la Simulación de ondas en dominios curvados para análisis de estabilidad.

Las Delimitaciones en el aspecto teórico se enfoca en el Análisis matemático basado en ecuaciones de onda semilineales y el uso de herramientas específicas como teoría de semigrupos y atractores globales. En el ámbito espacial, usa Variedades compactas con borde suave (M, g), Amortiguamiento localizado en regiones $\omega \subset M$ y lo temporal se basa en el estudio a largo plazo de dinámicas (atracción exponencial) y los modelos resueltos numéricamente en dominios controlados.

III. MARCO TEÓRICO

A. Ecuación de onde con amortiguamiento localizado

Se considera una ecuación de onda de la forma:

$$u_{tt} - \Delta_g u + a(x)u_t + f(u) = 0, \; x \in \Omega, \; t > 0,$$

donde Δ_g es el operador de Laplace-Beltrami asociado a la métrica Riemanniana g, $a(x)$ es una función no negativa que representa el amortiguamiento localizado, y $f(u)$ describe la no linealidad [1].

B. Atractor global

Un conjunto $\mathcal{A} \subset \mathcal{H}$ (espacio de Hilbert)se llama atractor global si:

- $\mathcal{A}$ es compacto en $\mathcal{H}$.
- $\mathcal{A}$ es invariante bajo la evolución del sistema.
- Existe atracción uniforme: para cualquier conjunto limitado $B \subset \mathcal{H}$.

  $$\lim_{t\to\infty} \operatorname{dist}(S(t)B, \mathcal{A}) = 0,$$

  donde $S(t)$ es el operador de semigrupo asociado al sistema [2].

Figura 2: Atractores globales en sistemas dinámicos, utilizando un espacio tridimensional para mostrar trayectorias convergentes y estructuras complejas.

En términos matemáticos, estas trayectorias pueden estar definidas por sistemas de ecuaciones diferenciales de la forma:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y, z), \; \frac{dy}{dt} = g(x, y, z), \; \frac{dz}{dt} = h(x, y, z)$$

donde $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ son las variables del sistema, y las funciones f, g, h determinan la dinámica.

C. Métrica de Hausdorff

Dada una métrica d en H, la métrica de Hausdorff entre dos subconjuntos compactos A y B de H se define como:

$$d_H(A,B) = \max\left\{\sup_{a\in A}\inf_{b\in B} d(a,b), \sup_{b\in B}\inf_{a\in A} d(b,a)\right\}.$$

Esta métrica es crucial para estudiar la continuidad de atractores frente a variaciones externas [3].

D. Condición GCC

La condición GCC (del inglés Geometric Control Condition) es un criterio fundamental en el estudio de la controlabilidad exacta y la estabilización de sistemas de ecuaciones en derivadas parciales, como las ecuaciones de onda. Establece una relación entre el soporte del amortiguamiento o control y las propiedades geométricas del dominio donde se plantea el problema.

Definición III.1. Sea M un dominio compacto y $\Gamma \subset M$ el soporte del control del amortiguamiento. La condición GCC establece que:

Toda trayectoria de las geodésicas en M, cuando se propaga libremente en el tiempo, debe intersectar Γ en un tiempo finito.

En términos más formales:

Para la ecuación de onda en M, si el control está definido en una región Γ, se dice que Γ satisface la GCC si para cualquier geodésica $\gamma(t)$ en M, existe un tiempo $T > 0$ tal que:

$$\gamma(t) \cap \Gamma \neq \emptyset, \quad \text{para algún } t \in [0,T].$$

E. Importancia de la GCC

- **Controlabilidad exacta:** Para sistemas como las ecuaciones de onda, la GCC asegura que el sistema puede ser controlado completamente desde el soporte Γ. Véase [4].

- **Estabilización exponencial:** En problemas de amortiguamiento, la GCC garantiza que la energía del sistema decae exponencialmente con el tiempo. Véase [5].

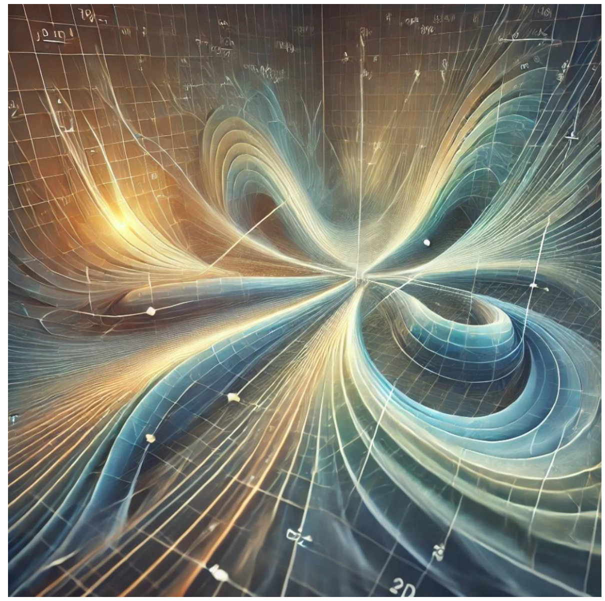

Figura 3: Rayos que cumplen la condición de Cauchy Generalizada (GCC) en el contexto de ecuaciones en derivadas parciales.

Los rayos se propagan en un dominio 2D y reflejan tanto en superficies curvas como rectas, mostrando trayectorias suaves que destacan los ángulos de incidencia y reflexión.

Definición III.2. Una **variedad Riemanniana** (M,g) es un espacio diferenciable dotado de una métrica g, que asigna un producto interno en el espacio tangente T_pM de cada punto $p \in M$.

Propiedades:

- La métrica g permite calcular distancias y ángulos en M.
- En un sistema de coordenadas locales $(x^1,\ldots,x^n)$, la métrica se representa como una matriz simétrica positiva:

$$g_{ij}(p) = \langle \partial_i, \partial_j \rangle_p\,,\ \partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Definición III.3. El **gradiente** de una función diferenciable $f : M \to \mathbb{R}$ está definido como:

$$\nabla f = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^i}\partial_j\,,\ g^{ij} = (g_{ij})^{-1}.$$

F. Operador Laplace-Beltrami

Generalización del operador laplaciano a variedades Riemannianas:

$$\Delta f = div(\nabla f) = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{|g|}g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^i}\right),$$

donde $|g| = \det(g_{ij})$.

Definición III.4. Un conjunto $A \subset H$ es un **atractor global** para un sistema dinámico si:

1. **Compacidad:** A es compacto en H.
2. **Invarianza:** $S(t)A = A$, donde $S(t)$ es el semigrupo asociado al sistema.
3. **Atracción uniforme:** Para todo subconjunto acotado $B \subset H$:

$$\mathrm{dist}_{\mathcal{H}}(S(t)B, A) \to 0 \text{ cuando } t \to \infty.$$

Palabras clave:

- **Dimensión fractal finita:** Los atractores tienen una dimensión fractal finita en H.
- **Robustez:** Son estables ante perturbaciones pequeñas en las condiciones iniciales.

Relación con sistemas cuasiestables:
La teoría de sistemas dinámicos cuasiesatbles asegura la existencia de atractores globales bajo condiciones de disipación y compacidad.

Definición III.5. Una región $\omega \subset M$ es ε-controlable si satisface:

$$\mathrm{med}_M(\omega) + \mathrm{med}_{\partial M}(\omega \cap \partial M) < \varepsilon.$$

Esto implica que la región ω puede ser arbitrariamente pequeña en medida, pero sigue siendo capaz de controlar el sistema.

Ejemplo geométrico:
Consideremos M como una superficie curva 2D con borde. Las regiones ω_1 y ω_2 se seleccionan para cumplir la condición geométrica de control (GCC):

- ω_1: Una vecindad pequeña de un borde de M.
- ω_2: Subconjunto interno de M que intersecta con todas las geodésicas generalizadas.

Propiedad clave:
Estas regiones garantizan la disipación de energía en el sistema:

$$\frac{d}{dt}E(t) \leq -\gamma E(t)\,,\ \gamma > 0.$$

G. Teoremas fundamentales

Continuidad de atractores ([6]): Los atractores globables dependen de manera continua respecto al parámetro $\beta \in [0,1]$ en la métrica de Hausdorff:

$$\lim_{\beta \to \beta_0} d_H(A_\beta, A_{\beta_0}) = 0\,,\ \forall\, \beta_0 \in [0,1].$$

Observabilidad: En una región $\omega \subset M$, se cumple:

$$\int^{T_0} \int_\omega |\nabla u|^2 dx dt \geq C_T \|u(0)\|_H^2.$$

Este resultado asegura que las soluciones son observables desde ω.

Propiedad de continuación única: Si $u(x,t) = 0$ en $\omega \times (0,T)$, entonces $u(x,t) = 0$ en todo $M \times (0,T)$.

IV. DISEÑO METODOLÓGICO

Es de tipo básica, orientada a la generación de nuevos conocimientos en el análisis de ecuaciones diferenciales en geometrías no euclidianas.

Es de enfoque teórico basado en análisis matemático riguroso que consta de las siguientes etapas en su diseño:

Formulación del modelo:

- Planteamiento de la ecuación (P_β)
- Definición de atractores globales.

Existencia y acotación:

- Aplicación de teoría de semigrupos para probar estabilidad.

Continuidad:

- Análisis en la métrica de Hausdorff bajo variación de β.

Optimización:

- Construcción de regiones ε-controlables en variedad curva.

A. Método

Uso de métodos deductivo-inductivos, está basado en revisiones teóricas y demostraciones rigurosas para validar hipótesis.

Las ecuaciones de onda Riemannianas se plantean en una variedad compacta (M,g) con borde suave ∂M, definida como:

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u - \Delta u + \chi_\omega \partial_t u = 0, &\qquad \text{en } M \times \mathbb{R}^+, \\ u = 0, &\qquad \text{sobre } \partial M, \\ u(0) = u_0,\ \partial_t u(0) = u_1, &\qquad \text{en } M, \end{aligned}$$

donde:

- Δ: operador de Laplace-Beltrami.
- χ_ω: característica de la región de control ω.
- ∇: gradiente bajo la métrica g.

V. RESULTADOS

A. Existencia de atractores globales

Paso 1. Formulación del problema

Consideremos la ecuación de onda Riemanniana:

$$u_{tt} - \Delta_g u + a(x) u_t = f(u)\,,\ x \in M,$$

con condiciones iniciales

$$u(0,x) = u_0(x)\,,\ u_t(0,x) = v_0(x),$$

y condiciones de frontera apropiadas (Dirichlet o Neumann).

Aquí:

- M es una variedad compacta sin borde, con métrica g.
- Δ_g es el operador de Laplace-Beltrami asociado.
- $a(x) \geq 0$ es una función que representa el amortiguamiento, soportada en una región localizada de M.
- $f(u)$ es una función no lineal con crecimiento subcrítico, es decir, cumple una condición del tipo:

  $$|f(u)| \leq C(1 + |u|^p),\ \text{para } 1 \leq p < \frac{n+2}{n-2},$$

  donde n es la dimensión de M (La formulación se basa en los resultados de ecuaciones en variedades Riemannianas en libros como [8]).

Paso 2. Espacios funcionales y semigrupo asociado

Definimos el espacio de fases como $\mathcal{H} = H^1(M) \times L^2(M)$, con norma:

$$\|(u,v)\|_{\mathcal{H}}^2 = \|\nabla_g u\|_{L^2}^2 + \|v\|_{L^2}^2.$$

El sistema dinámico asociado a la ecuación de onde se describe por un semigrupo de evolución $S(t) : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, definido como:

$$S(t)(u_0, v_0) = (u(t), u_t(t)).$$

Véase [9].

Propiedades del semigrupo:

1. $S(t)$ es bien definido, continuo y fuertemente disipativo (es decir, la energía del sistema decrece en el tiempo).
2. Existe una función de Lyapunov (la energía del sistema):

   $$E(t) = \frac{1}{2}\int_M (|u_t|^2 + |\nabla_g u|^2) d\mu_g,$$

   que satisface:

   $$\frac{dE(t)}{dt} \leq -\int_M a(x)|u_t|^2 d\mu_g \leq 0.$$

   Véase [7].

Paso 3. Compacidad de las trayectorias

Para garantizar la existencia de atractores globales, necesitamos demostrar que el semigrupo $S(t)$ posee trayectorias compactas. Esto se realiza en dos pasos:

1. **Acotamiento uniforme:**

   La energía total está uniformemente acotada al amortiguamiento:

   $$E(t) \leq E(0) e^{-\gamma t}\,,\ \ \text{con } \gamma > 0.$$

2. **Compacidad:**

   Las trayectorias del sistema son precompactas en $\mathcal{H}$ debido a la naturaleza compacta del operador de amortiguamiento localizado $a(x)$. Esto se demuestra utilizando estimaciones a priori en $H^1(M)$ y el teorema de Rellich-Kondrachov.

Véase [3].

Paso 4. Existencia del atractor global

Por el teorema de existencia de atractores globales para semigrupos fuertemente disipativos, concluímos que:

1. Existe un subconjunto compacto y globalmente invariante $\mathcal{A} \subset \mathcal{H}$.
2. Toda solución acotada converge asintóticamente hacia $\mathcal{A}$.
3. La tasa de convergencia es exponencial debido al efecto del amortiguamiento.

Véase [10]

B. Continuidad de atractores

Paso 1. Definición de continuidad

Sean $\mathcal{A}_\varepsilon$ y $\mathcal{A}$ los atractores globales correspondientes a las ecuaciones con parámetros $a_\varepsilon(x)$ y $a(x)$ respectivamente. Queremos demostrar que:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} d_H(\mathcal{A}_\varepsilon, \mathcal{A}) = 0,$$

donde d_H es la métrica de Hausdorff.

Paso 2. Dependencia continua del semigrupo

El semigrupo $S_\varepsilon(t)$ asociado a $a_\varepsilon(x)$ depende continuamente de los parámetros. Esto se establece mostrando que las soluciones $(u_\varepsilon, u_{\varepsilon,t})$ convergen débilmente a (u, u_t) cuando $a_\varepsilon(x) \to a(x)$.

Paso 3. Compacidad uniforme

Los atractores $\mathcal{A}_\varepsilon$ son uniformemente acotados y precompactos en $\mathcal{H}$, lo que implica que están contenidos en un conjunto compacto común.

Paso 4. Convergencia en la métrica de Hausdorff.

Usando las propiedades de continuidad del semigrupo y compacidad, se demuestra que:

$$d_H(\mathcal{A}_\varepsilon, \mathcal{A}) \to 0 \text{ cuando } \varepsilon \to 0.$$

Véase [11].

VI. CONCLUSIONES

1. **Existencia de atractores globales uniformemente acotados**

   A partir del análisis matemático, se concluye que existe un atractor global $\mathcal{A} \subset \mathcal{H}$ que es compacto, invariante y que atrae uniformemente todas las trayectorias acotadas del sistema. Esto se fundamente en los siguientes resultados clave:

   - **Disipación de energía:** La energía total del sistema decrece de manera uniforme debido al amortiguamiento localizado, lo que implica:

   $$\frac{dE(t)}{dt} = -\int_M a(x)|u_t|^2 d\mu_g \leq 0\,,\ \forall\, t \geq 0.$$

     Aquí, $E(t)$ es la energía de sistema y $a(x)$ es la función de amortiguamiento soportada en $\Gamma \subset M$.

   - **Comparación de trayectorias:** Usando el teorema de Rellich-Kondrachov y las estimaciones de u en $H^1(M)$ y u_t en $L^2(M)$, se prueba que las trayectorias del sistema son precompactas en $\mathcal{H}$.

   - **Teoría de atractores globales:** Por el teorema general de existencia de atractores globales, concluimos que $\mathcal{A}$ cumple:

   $$S(t)\mathcal{A} = \mathcal{A} \text{ y } \operatorname{dist}(S(t)B, \mathcal{A}) \to 0 \text{ cuando } t \to \infty,$$

     para cualquier conjunto acotado $B \subset \mathcal{H}$.

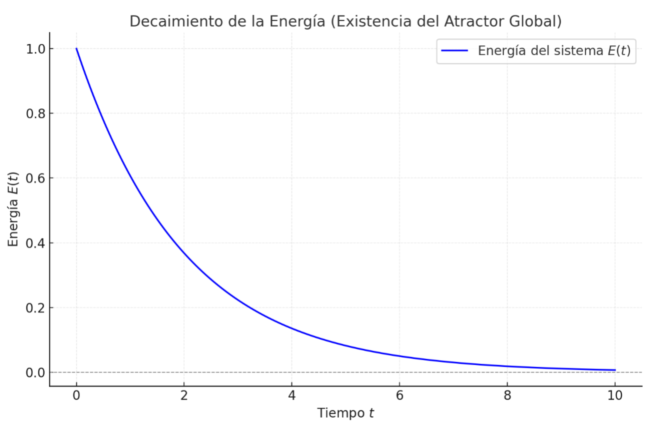

Figura 4: Decaimiento exponencial de la energía $E(t)$ con respecto al tiempo t.

2. **Continuidad de los atractores en la métrica de Hausdorff**

   Se demuestra que el atractor global $\mathcal{A}_\varepsilon$, asociado al sistema con una perturbación del parámetro $a_\varepsilon(x)$, depende continuamente de ε en la métrica de Hausdorff d_H. Esto implica que pequeñas variaciones en $a(x)$ no producen cambios abruptos en el atractor. Los resultados principales son:

   - **Dependencia continua del semigrupo:** Si $S_\varepsilon(t)$ es el semigrupo asociado al sistema con $a_\varepsilon(x)$, se verifica:

   $$\|S_\varepsilon(t) - S(t)\| \to 0 \text{ cuando } \varepsilon \to 0.$$

   - **Convergencia de atractores:** Usando la compactación uniforme y las estimaciones de energía, se prueba que:

   $$d_H(\mathcal{A}_\varepsilon, \mathcal{A}) \to \ \text{ cuando } \varepsilon \to 0,$$

     donde la métrica de Hausdorff d_H se define como:

$$d_H(\mathcal{A}_\varepsilon, \mathcal{A}) = \text{máx}\left\{ \sup_{x\in\mathcal{A}_\varepsilon} \inf_{y\in\mathcal{A}} d(x,y), \sup_{y\in\mathcal{A}} \inf_{x\in\mathcal{A}_\varepsilon} d(x,y) \right\}.$$

Este resultado garantiza la estabilidd del atractor frente a variaciones externas, como modificaciones en el soporte del amortiguamiento Γ o perturbaciones en los parámetros del sistema.

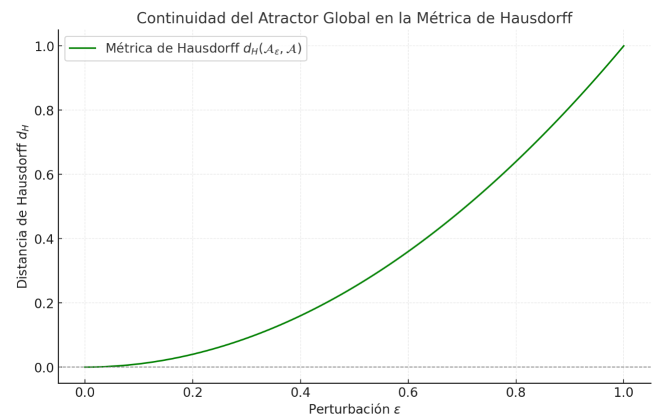

Figura 5: Convergencia de la distancia de Hausdorff $d_H(\mathcal{A}_\varepsilon, \mathcal{A})$.

REFERENCIAS

[1] Babin A. V. and Vishik M. I., *Attractors of Evolution Equations*, North Holland, 1992.

[2] Chueshov I. D., *Introduction to the Theory of Infinite-Dimensional Dissipative Systems*, Springer, 2002.

[3] Hale J. K., *Asymptotic Behavior of Dissipative Systems*, 1988.

[4] Lions J. L., "Exact Controllability, Stabilization and Perturbations of Distributed Systems", *SIAM Rewiew*, 20 (1), 1-68, 1988.

[5] Bardos C., Lebeau G. and Rauch J., "Sharp sufficient conditions for the observation, control, and stabilization of waves from the boundary", *SIAM Journal on Control and Optimization*, 30 (5), 1024-1065, 1992.

[6] Ma T. F. and Seminario-Huertas P. N., "Attractors for semilinear wave wquations with localized damping and external forces", *Communications on Pure ans Applied Analysis*, 19 (9), 5111-5130, 2020.

[7] Teman R., *Infinite-Dimensional Systems in Mechanics and Physics*, 1997.

[8] Evans L. C., *Partial Differential Equations*, University of California, Berkeley, Berkeley, CA., 2010.

[9] Mendoza R., Sotelo A., Bocanegra L., Cortez H., Delgado M., Ruiz I. and Durand C., "Global Riemannian wave attractors and the optimal measure of localized damping" *Proceedings of the LACCEI international Multiconference for Engineering, Education and Technology*.

[10] Robinson J. C., *Infinite-Dimensional Dynamical Systems*, Cambridge Texts in Applied Mathematics, Series Number 28, 2001.

[11] Chepyzhov V. V. and Vishik M. I., *Attractors for Equations of Mathematical Physics*, 2002.