

# Design method for a three-phase single squirrel cage induction motor using geometric interpretation

Steve Dustin Núñez Escobar<sup>1</sup>; Juan Rodolfo Núñez Chávez<sup>2</sup>; Geryk Rodolfo Núñez Escobar<sup>3</sup>

<sup>1,3</sup> Universidad Tecnológica del Perú, Perú. Universidad Dr. José Gregorio Hernández, Venezuela, [snuneze@utp.edu.pe](mailto:snuneze@utp.edu.pe), [geryk.nunez@ujgh.edu.ve](mailto:geryk.nunez@ujgh.edu.ve)

<sup>2</sup> Universidad Nacional de Ingeniería, Perú, [jnunezc@uni.edu.pe](mailto:jnunezc@uni.edu.pe)

*Abstract– The three-phase single squirrel cage induction motor has many applications in their industrial development, and their design, has been based in test and error. Today, we have other methods, as geometric interpretation, what allows using many restrains, which make the motor with the advantages to satisfy all the restrains imposed.*

*The restrains used in the present work are starting current, starting torque, maximum torque, and maximum power or overload capacity, nominal power to nominal slip, maximum efficiency and power factor and minimum current density in the rotor bars.*

*The developed method provided technical benefits such as optimizing the starting current and torque, achieving a high maximum torque, and ensuring adequate slip according to the rated power. Additionally, it enhances the motor's overload capacity, ensuring better operational performance. From an economic perspective, efficiency is improved, optimizing energy consumption and by enhancing the power factor, penalty charges can be avoided.*

*Keywords-- Design, three-phase, single squirrel cage induction motor, geometric interpretation, constraints.*

# Método de diseño de motor de inducción trifásico de jaula simple mediante interpretación geométrica

Steve Dustin Núñez Escobar<sup>1</sup>; Juan Rodolfo Núñez Chávez<sup>2</sup>; Geryk Rodolfo Núñez Escobar<sup>3</sup>

<sup>1,3</sup>Universidad Tecnológica del Perú, Perú. Universidad Dr. José Gregorio Hernández, Venezuela, snuneze@utp.edu.pe, geryk.nunez@ujgh.edu.ve

<sup>2</sup>Universidad Nacional de Ingeniería, Perú, jnunezc@uni.edu.pe

**Resumen**– El motor de inducción trifásico de jaula simple, tiene muchas aplicaciones en el desarrollo industrial y su diseño ha estado basado en el método de prueba y error. Hoy día se tiene más recursos, como la interpretación geométrica que permite involucrar una cantidad de restricciones, que hagan que el motor presente un comportamiento con las ventajas de satisfacer cada una de las restricciones impuestas.

Las restricciones que se utilizarán en el presente trabajo serán: Corriente de arranque, Torque de arranque, Torque máximo. Potencia máxima o capacidad de sobrecarga, Potencia nominal a deslizamiento nominal, Eficiencia máxima, factor de potencia y Mínima densidad de corriente en las barras de la jaula.

El método desarrollado aportó beneficios técnicos tales como: optimizar la corriente y el par de arranque, alcanzar un alto torque máximo además de garantizar un deslizamiento adecuado en función de la potencia nominal. Así mismo, mejora la capacidad de sobrecarga del motor, asegurando un mejor desempeño operativo. Por su parte en cuanto al aspecto económico se mejora la eficiencia con lo cual se optima el consumo energético, así como también al mejorar el factor de potencia, se pueden evitar penalizaciones.

**Palabras clave**-- Diseño, Motor de inducción trifásico jaula simple, Interpretación geométrica, Restricciones.

## I. INTRODUCCIÓN

El método de interpretación geométrica consiste en utilizar inecuaciones en vez de ecuaciones. Cada inecuación presenta dos regiones, una de aceptación de la restricción y la otra de negación en un plano de dos variables. La superposición de las restricciones nos permitirá encontrar una zona en la que todas las restricciones se satisfacen, donde podremos encontrar las dos variables que den la solución buscada, pero además se podrá seleccionar la solución más económica, donde la variable de resistencia sea la más grande y donde el volumen sea el menor y por tanto el más económico [1], [2], [3], [4].

## II. DESARROLLO DEL MÉTODO

### A. Circuito equivalente de la máquina de inducción trifásica

Primero hay que suponer que el hierro no necesita le transfieran energía para satisfacer las pérdidas en el núcleo

magnético. La frecuencia de las corrientes en el estator es  $\omega_s$ , mientras que la frecuencia de las corrientes en el rotor es  $\omega_r$ , por ser una máquina asincrónica.

Las corrientes en el estator forman un campo magnético giratorio de una velocidad  $\omega_s/p$ , mientras que, en el rotor, las corrientes trifásicas generan un campo magnético giratorio de una velocidad,  $\omega_r/p$  respecto del eje referencial del rotor. Este campo magnético giratorio, con ayuda de la velocidad mecánica del rotor alcanza a la velocidad del campo magnético del estator.  $\omega_s/p = \omega_r/p + \omega_m$  y por lo tanto la velocidad del rotor será:

$$\omega_m = \omega_s/p - \omega_r/p \quad (1)$$

donde:  $\omega_r$  es la frecuencia de la corriente del rotor en rad/seg.  $\omega_s$  es la frecuencia de la corriente del estator en rad/seg.  $\omega_m$  es la velocidad del rotor en rad/seg.  $p$  es el número de pares de polos.  $g$  es la longitud del entrehierro.

El campo de cada una de las fases del rotor será:

$$B_{gar} = (4/\pi) \mu_0 (Nr Kw/p) (iar/ar)/(2 g) \cos(p \psi r) \quad (2)$$

$$B_{gbr} = (4/\pi) \mu_0 (Nr Kw/p) (ibr/ar)/(2 g) \cos(p \psi r - 2\pi/3) \quad (3)$$

$$B_{gcr} = (4/\pi) \mu_0 (Nr Kw/p) (icr/ar)/(2 g) \cos(p \psi r - 4\pi/3) \quad (4)$$

$$B_{gmr} = B_{gar} + B_{gbr} + B_{gcr} \quad (5)$$

$$B_{gmr} = ((4/\pi) \mu_0 (Nr Kw/p ar)/(2 g))^2 \sqrt{2} \sqrt{3/2} \cos((p \psi r - \omega st)) \quad (6)$$

Y en el estator es:

$$B_{gms} = ((4/\pi) \mu_0 (Ns Kw/p as)/(2g))^2 \sqrt{2} \sqrt{3/2} \cos(p \psi s - \omega st) \quad (7)$$

El campo que genera el flujo de magnetización, que es el que permite la transferencia de energía por vía electromagnética y el que permite la conversión de energía, es la diferencia de esos dos campos.

$$B_{mag} = B_{gms} - B_{gmr} \quad (8)$$

$$B_{mag} = (4/\pi)(3/2)(\mu_0/2g p)(N_s K_w s/as)[\sqrt{2}(I_s - I_r/n) \cos(p \psi s - \omega s t)] \quad (9)$$

Donde (10) es la relación de transformación para rotor bobinado y (11) es la relación de transformación para la jaula de ardilla, o mejor

$$n = (N_s K_w s/as)/(N_r K_w r/ar) \quad (10)$$

$$n = (N_s K_w s/as)/(1/2) \quad (11)$$

$$n = (3/S_2) (N_s K_w s/as)/(1/2) \quad (12)$$

para reflejar en forma completa con 3 fases en el estator y S2 fases en el rotor.

Ns es el número de vueltas de una fase del devanado del estator. Kws es el factor de arrollamiento del devanado del estator. Kwr es el factor de arrollamiento del devanado del rotor cuando es de rotor bobinado. as es el número de circuitos en paralelo del devanado del estator.

$$I_m = I_s - I_r/n \text{ que es la corriente de magnetización.} \quad (13)$$

$$e_{mar} = B_{mag}(N_r K_w r/ar) L_n R (\omega s/p - \omega m) \quad (14)$$

es la fuerza electromotriz de la fase a del rotor. Bmag es la densidad de flujo de magnetización. Ln es la longitud del núcleo. R es el radio del rotor.

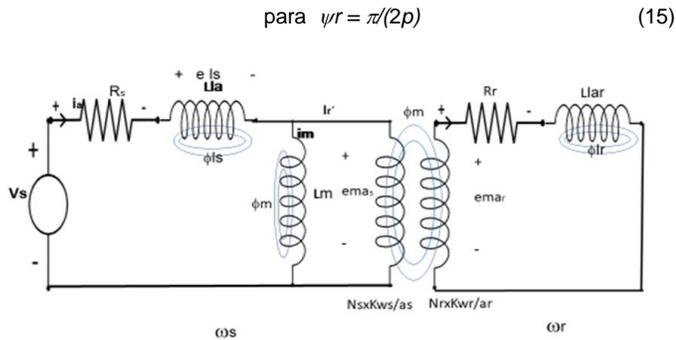


Fig. 1 Circuito equivalente de una fase del motor de inducción sin pérdidas en el núcleo.

$$e_{mar} = B_{mag} (N_r K_w r/ar) L_n R x(\omega s/p - \omega m) \quad (16)$$

$$\text{para } \psi r = \pi/(2p) \quad (17)$$

$$e_{mar} = (4/\pi) (3/2) (\mu_0/2g p) (N_s K_w/as) [\sqrt{2}(I_s - I_r/n) \cos(p \psi s - \omega s t)] (N_r K_w r/ar) L_n R (\omega s/p - \omega m) \quad (18)$$

$$\text{para } \psi r = \pi/(2p) \quad (19)$$

$$\text{pero como } \psi s = \psi r + \theta = \psi r + \omega m t \quad (20)$$

$$\text{donde } t = \text{tiempo en segundos} \quad (21)$$

$$\Rightarrow e_{mar} = (4/\pi) (3/2) (\mu_0/2g p) (N_s K_w/as) [\sqrt{2}(I_s - I_r/n) \cos(p (\psi r + \omega m t) - \omega s t)] (N_r K_w r/ar) L_n R (\omega s/p - \omega m) \quad (22)$$

$$\text{para } \psi r = \pi/(2p) \quad (23)$$

$$e_{mar} = (4/\pi) (3/2) (\mu_0/2g p) (N_s K_w/as) [\sqrt{2}(I_s - I_r/n) \cos(p \psi r - \omega r t)] (N_r K_w r/ar) L_n R (\omega r/p) \quad (24)$$

$$\text{para } \psi r = \pi/(2p) \quad (25)$$

$$\psi r = (8/\pi^2)(3/2) (\mu_0 L_n \pi R/2g) ((N_s K_w/as p)^2/n) \omega r \cos(\pi/2 - \omega r t) \sqrt{2} I_m \quad (26)$$

$$e_{mar} = L_m 3 \omega r \sqrt{2} I_m \sin(\omega r t) = (L_m 3 \text{ dima}/dt)/n. \quad (27)$$

Esta tensión es aplicada a la resistencia del devanado del rotor y a la inductancia de dispersión y se forma el circuito equivalente.

Lo que hay que tener claro es que no se ha considerado la energía que requiere el núcleo para el trabajo de magnetización en el que los dipolos magnéticos estarán cambiando de orientación con la velocidad de la corriente alterna.

Esa energía es transferida al núcleo por vía electromagnética y por lo tanto la resistencia que represente a las pérdidas en el núcleo quedará en paralelo con la inductancia de magnetización.

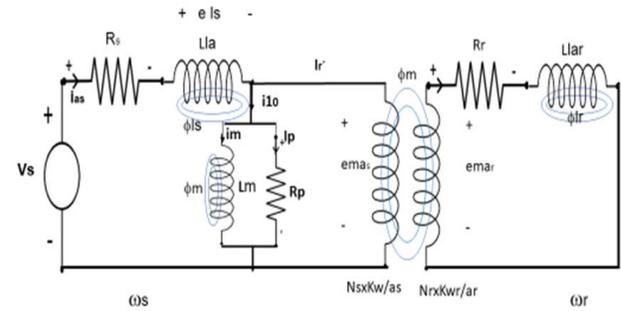
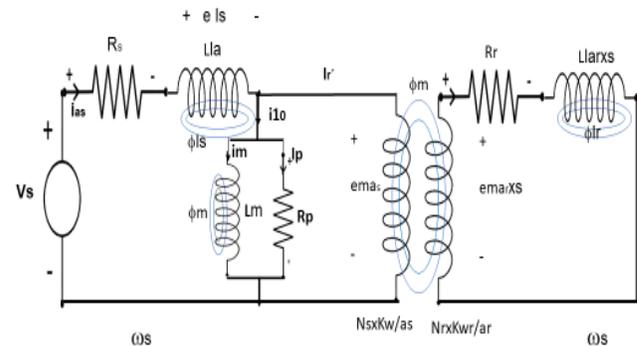


Fig. 2 Circuito equivalente de una fase del motor de inducción con pérdidas en el núcleo, con el circuito del rotor referido a su propia frecuencia  $\omega r$ . Fuente: Adaptado de [5].

Si se refiere todo el circuito equivalente a la frecuencia de la fuente, se tendrá:  $\omega r = (\omega r/\omega s)\omega s = s \omega s$  donde s se denominará deslizamiento, con lo que se tendría:  $e_{mar}$  a la frecuencia de la fuente, sería  $s e_{mar}$  y la inductancia de dispersión del devanado del rotor sería  $s L_{lar}$ .





$$[(R_s + R_r')^2 + (X_{ls} + X_{lr}')^2] \leq 2 ZTH R_r' \quad (32)$$

$$\text{Donde } ZTH = 3 V_s^2 / (2 TAr \omega_{sc}) \quad (33)$$

$$R_r'^2 + 2 R_r' R_s + R_s^2 + (X_{lr}' + X_{ls})^2 \leq 2 ZTH R_r' \quad (34)$$

$$R_s^2 + R_r'^2 + 2 R_r' R_s - 2 ZTH R_r' + ZTH^2 + (X_{lr}' + X_{ls})^2 \leq ZTH^2 \quad (35)$$

$$R_s^2 + R_r'^2 - 2 R_r' (ZTH - R_s) + (ZTH - R_s)^2 + (X_{lr}' + X_{ls})^2 \leq (ZTH - R_s)^2 \quad (36)$$

$$R_r'^2 - 2 R_r' (ZTH - R_s) + (ZTH - R_s)^2 + (X_{lr}' + X_{ls})^2 \leq ZTH^2 - 2 ZTH R_s \quad (37)$$

$$((R_r' - (ZTH - R_s))^2 + (X_{lr}' + X_{ls})^2 \leq ZTH(ZTH - 2 R_s) \quad (38)$$

La inecuación representa un círculo con corrimiento en el eje X cuyo valor es:  $(ZTH - R_s)$ , y donde el radio del círculo es  $[ZTH(ZTH - 2 R_s)]^{1/2}$ . A continuación, se muestra un diagrama que muestra la región de satisfacción de la restricción del torque de arranque

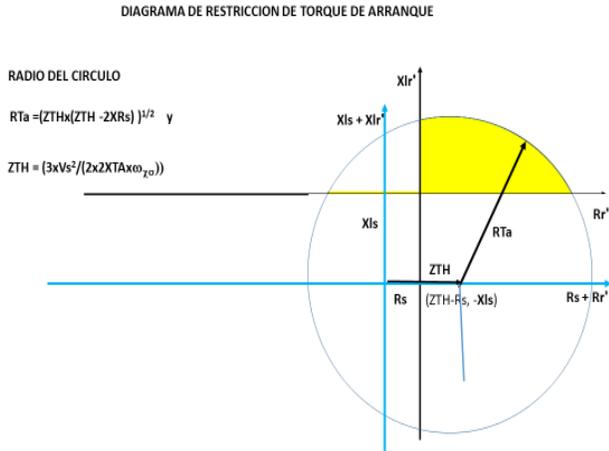


Fig. 7 Gráfico de selección de parámetros  $(R_r', X_{lr}')$  para la restricción de torque de arranque.

#### D. Restricción de torque máximo

Para esta restricción es necesario determinar el deslizamiento para alcanzar el torque máximo, para lo que hay que derivar la ecuación del torque e igualarla a cero, de donde sale que dicho deslizamiento es [6]:

$$s = R_r' / (R_s^2 + (X_{ls} + X_{lr}')^2)^{1/2} \quad (39)$$

y el torque máximo será:

$$TeM = 3 V_s^2 / (2 \omega_{sc}^2) [R_s + [R_s^2 + (X_{ls} + X_{lr}')^2]^{1/2}] \quad (40)$$

Por lo tanto, este torque máximo, debe ser mayor que el torque especificado en la restricción.

$$TME \leq TeM = 3 V_s^2 / (2 \omega_{sc}^2) [R_s + [R_s^2 + (X_{ls} + X_{lr}')^2]^{1/2}] \quad (41)$$

$$[R_s + [R_s^2 + (X_{ls} + X_{lr}')^2]^{1/2}] \leq 3 V_s^2 / (2 \omega_{sc}^2) \quad (42)$$

$$[R_s + [R_s^2 + (X_{ls} + X_{lr}')^2]^{1/2}] \leq ZTM \quad (43)$$

$$\text{donde: } ZTM = 3 V_s^2 / (2 \omega_{sc}^2) \quad (44)$$

$$(X_{ls} + X_{lr}')^2 \leq (ZTM - R_s)^2 - R_s^2 \quad (45)$$

$$(X_{ls} + X_{lr}')^2 \leq (ZTM (ZTM - 2R_s)) \quad (46)$$

$$X_{lr}' \leq XTM - X_{ls} \quad (47)$$

$$\text{donde: } XTM = (ZTM (ZTM - 2R_s))^{1/2} \quad (48)$$

A continuación, se muestra el gráfico, donde se puede distinguir la zona de satisfacción de la restricción de potencia máxima.

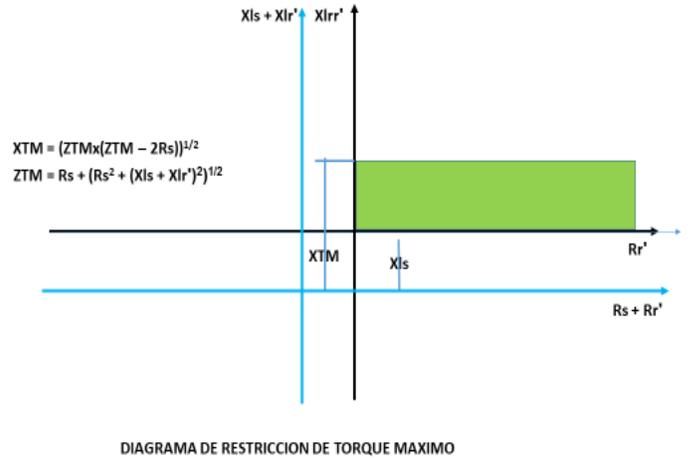


Fig. 8 Gráfico de selección de parámetros  $(R_r', X_{lr}')$  para la restricción de torque máximo

#### E. Restricción de potencia de conversión máxima o capacidad de sobrecarga

El valor del deslizamiento para potencia de conversión máxima es:

$$s = R_r' / [R_r' + ((R_s + R_r')^2 + (X_{ls} + X_{lr}')^2)^{1/2}] \quad (49)$$

y la potencia de conversión máxima [6]:

$$PCmax = (3 V_s^2 / 2) / [(R_s + R_r') + ((R_s + R_r')^2 + (X_{ls} + X_{lr}')^2)^{1/2}] \quad (50)$$

Así mismo, la potencia que debe ser mayor que la potencia especificada por la restricción.

$$PCM \leq PCmax = (3 V_s^2 / 2) / [(R_s + R_r') + ((R_s + R_r')^2 + (X_{ls} + X_{lr}')^2)^{1/2}] \quad (51)$$

$$(R_s + R_r') + ((R_s + R_r')^2 + (X_{ls} + X_{lr}')^2)^{1/2} \leq (3 V_s^2 / 2) PCM \quad (52)$$

Donde

$$ZPC = (3 V_s^2 / 2) PCM \quad (53)$$

$$(Rs + Rr')^2 + (Xls + Xlr')^2 \leq [ZPC - (Rs + Rr')]^2 \quad (54)$$

$$(Xls + Xlr')^2 \leq ZPC^2 - 2 (Rs + Rr') ZPC \quad (55)$$

$$(Xls + Xlr')^2 \leq ZPC (ZPC - 2 (Rs + Rr')) \quad (56)$$

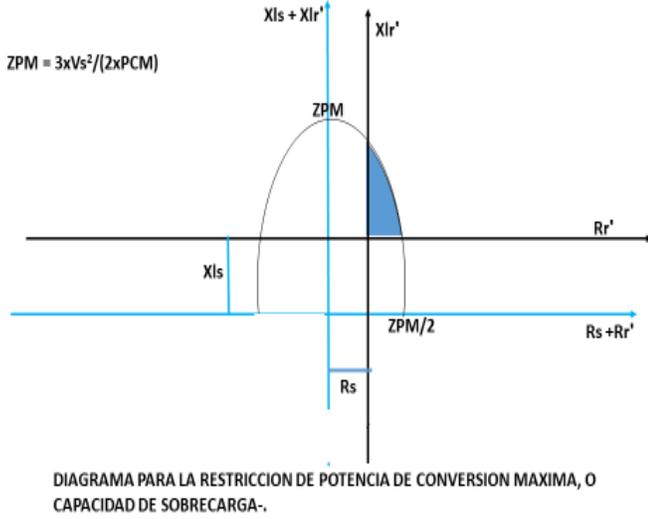


Fig. 9 Gráfico de selección de parámetros ( $Rr'$ ,  $Xlr'$ ) para la restricción de torque máximo.

#### F. Restricción de potencia nominal a deslizamiento nominal

La potencia de conversión nominal está dada por la siguiente ecuación:

$$PcN = (3 Vs^2 Rr' (1-sn)/sn) / [(Rs + Rr'/sn)^2 + (Xs + Xlr')^2] \quad (57)$$

Esta potencia debe ser mayor que la potencia nominal especificada:

$$PN + Permec \leq 3 Vs^2 Rr' (1-sn)/sn / [(Rs + Rr'/sn)^2 + (Xs + Xlr')^2] \quad (58)$$

$$PN + Permec = PNP \quad (59)$$

$$[(Rs + Rr'/sn)^2 + (Xs + Xlr')^2] \leq [3 Vs^2 Rr' (1-sn)/PNP] Rr'/sn \quad (60)$$

Donde:  $[3 Vs^2 (1-sn) / (2 PNP)] = ZPN \quad (61)$

$$[(Rs + Rr'/sn)^2 + (Xs + Xlr')^2] \leq 2 ZPN Rr'/sn \quad (62)$$

$$Rs^2 + (Rr'/sn)^2 + 2 Rs Rr'/sn + (Xls + Xlr')^2 \leq 2 ZPN Rr'/sn \quad (63)$$

$$Rs^2 + (Rr'/sn)^2 + 2 Rs Rr'/sn - 2 ZPN Rr'/sn + (Xls + Xlr')^2 \leq 0 \quad (64)$$

$$(Rr'/sn)^2 - 2 (ZPN - Rs) Rr'/sn + (ZPN - Rs)^2 + (Xls + Xlr')^2 \leq -Rs^2 + (ZPN - Rs)^2 \quad (65)$$

$$[Rr'/sn - (ZPN - Rs)]^2 + (Xls + Xlr')^2 \leq -Rs^2 + (ZPN - Rs)^2 \quad (66)$$

$$[Rr'/sn - (ZPN - Rs)]^2 + (Xls + Xlr')^2 \leq [(ZPN (ZPN - 2 Rs))^{1/2}]^2 \quad (67)$$

$$ZPB = [(ZPN (ZPN - 2 Rs))^{1/2}] \quad (68)$$

$$ZPA = ZPB sn \quad (69)$$

$$ZPH = (ZPN - Rs) sn \quad (70)$$

$$ZPK = -Xls \quad (71)$$

La inecuación que genera la restricción de potencia nominal a deslizamiento nominal será:

$$[(Rr' - ZPH)/ZPA]^2 + [(Xlr' - ZPK)/ZPB]^2 \leq 1 \quad (72)$$

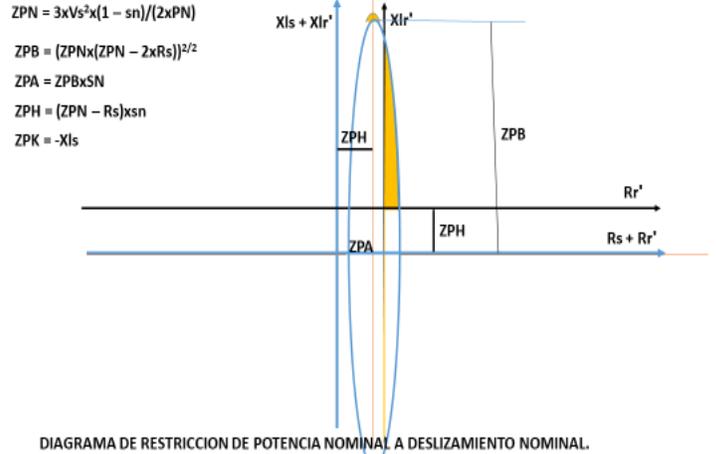


Fig. 10 Gráfico de selección de parámetros ( $Rr'$ ,  $Xlr'$ ) para la restricción de potencia nominal a deslizamiento nominal.

#### G. Restricción de eficiencia

La eficiencia de un motor está dada por la relación entre la potencia que el motor entrega a la carga y la potencia que este recibe de la fuente de energía. La potencia que el motor entrega a la carga, es la potencia de conversión menos las pérdidas mecánicas, mientras que la potencia que recibe está dada por la potencia de conversión más las pérdidas el hierro y las pérdidas en el cobre.

$$\text{Potencia de conversión } Pc = (3 Ir'^2 Rr' (1 - s)/s) \quad (73)$$

$$Perfric = D\theta \omega m^2 \quad Perven = Kven \omega m^3 \quad (74)$$

$$Permec = Perfric + Perven \quad (75)$$

$$Pfe = 3 Vs^2 / Rp \quad Pcu = 3 Ir'^2 (Rs + Rr') \quad (76)$$

$$Ir'^2 = Vs^2 / [(Rs + Rr'/s)^2 + (Xls + Xlr')^2] \quad (77)$$

La eficiencia estará dada por:

$$Efi = [(Pc - Permec) / (Pc + Pcu + Pfe)] \times 100 \quad (78)$$

Eficiencia que debe ser mayor que la eficiencia especificada.

$$EFIE \leq Efi = [(Pc - Permec) / (Pc + Pfe + Pcu)] \times 100 \quad (79)$$

$$Pc - Permec = (3 Ir^2 Rr'(1-s)/s) - Permec \quad (80)$$

$$Pc + Pcu = (3 Ir^2 (Rs + Rr'/s)) \quad (81)$$

$$Pc + Pcu + Pfe = (3 Ir^2 (Rs + Rr'/s) + Pfe) \quad (82)$$

$$EFIE/100 \leq \frac{(3Vs^2 Rr'(1-s)/s) - Permec [(Rs + Rr'/s)^2 + (Xls + Xlr')^2]}{(3Vs^2 (Rs + Rr'/s) + Pfe [(Rs + Rr'/s)^2 + (Xls + Xlr')^2])} \quad (83)$$

$$ZEF = [3Vs^2 / ((EFIE/100) Pfe + Permec)] \quad (84)$$

$$(Rs + Rr'/s)^2 + (Xls + Xlr')^2 \leq ZEF [Rr'((1-s)/s) - EFIE/100 (Rs + Rr'/s)] \quad (85)$$

$$(Rs + Rr'/s)^2 + (Xls + Xlr')^2 \leq (Rr'/s) ZEF [(1-s) - EFIE/100] - (EFIE/100) ZEF Rs \quad (86)$$

$$ZEF1 = ZEF [(1-s) - EFIE/100] / 2 \quad (87)$$

$$ZEF0 = ZEF (EFIE/100) \quad (88)$$

$$(Rs + Rr'/s)^2 + (Xls + Xlr')^2 \leq 2 Rr'/s \times ZEF1 - ZEF0 Rs \quad (89)$$

$$Rs^2 + 2 (Rr'/s) Rs + (Rr'/s)^2 - 2 Rr'/s ZEF1 + (Xls + Xlr')^2 \leq - ZEF0 Rs \quad (90)$$

$$(Rr'/s)^2 - 2(Rr'/s)(ZEF1 - Rs) + (ZEF1 - Rs)^2 + (Xls + Xlr')^2 \leq -Rs ZEF0 + (ZEF1 - Rs)^2 - Rs^2 \quad (91)$$

$$(Rr'/s - (ZEF1 - Rs))^2 + (Xls + Xlr')^2 \leq -Rs ZEF0 + ZEF1^2 - 2 ZEF1 Rs \quad (92)$$

$$(Rr'/s - (ZEF1 - Rs))^2 + (Xlr' + Xls)^2 \leq ZEF1 \times (ZEF1 - 2 Rs) - ZEF0 Rs \quad (93)$$

$$((Rr' - ZHF)/ZAF)^2 + ((Xlr' - ZKF)/ZBF)^2 \leq 1 \quad (94)$$

$$ZHF = ZEF1 - Rs \quad ZKF = -Xls \quad ZAF = s ZBF \quad (95)$$

$$ZBF = (ZEF1 (ZEF1 - 2 Rs) - ZEF0 Rs)^{1/2} \quad (96)$$

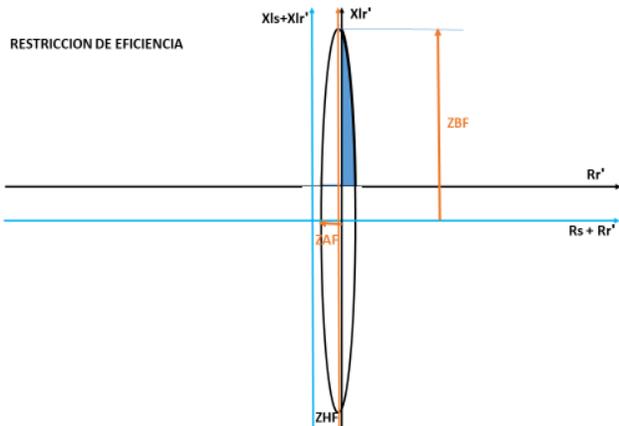


Fig. 11 Gráfico de selección de parámetros ( $Rr'$ ,  $Xlr'$ ) para la restricción de eficiencia.

#### H. Restricción de factor de potencia

Se utilizará el siguiente circuito equivalente aproximado:

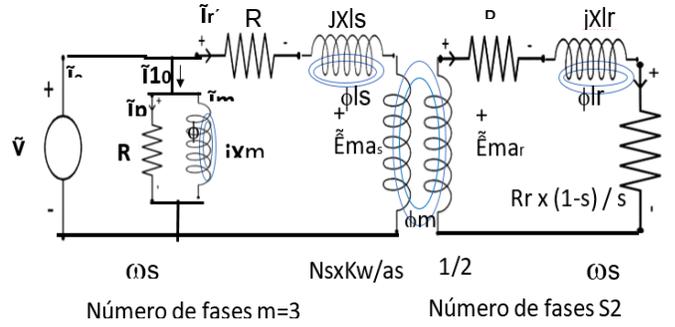


Fig. 12 Circuito equivalente de un motor de inducción trifásico de simple jaula de ardilla

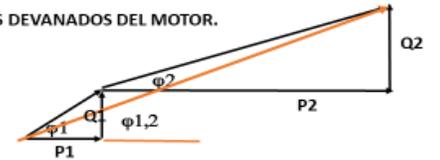
El factor de potencia está dado por la relación entre la potencia activa que consume el circuito, así como la potencia aparente de todo el circuito, El siguiente diagrama, muestra, el factor de potencia del núcleo, de los devanados y el factor de potencia de los devanados.

#### FACTOR DE POTENCIA DEL NUCLEO DEL MOTOR.

$$\cos \phi_1 = P1 / (P1^2 + Q1^2)^{1/2}$$

#### FACTOR DE POTENCIA DE LOS DEVANADOS DEL MOTOR.

$$\cos \phi_2 = P2 / (P2^2 + Q2^2)^{1/2}$$



#### FACTOR DE POTENCIA DEL MOTOR.

$$\cos \phi_{1,2} = (P1 + P2) / ((P1 + P2)^2 + (Q1 + Q2)^2)^{1/2}$$

Fig. 13 Diagrama de factor de potencia de un motor de inducción trifásico de simple jaula de ardilla

$$P1 = \text{Perdidas en el hierro} = 3 V^2 / Rp \quad (97)$$

$$Q1 = \text{Potencia reactiva de magnetización} = 3 V^2 / Xm \quad (98)$$

$$P2 = \text{Potencia activa del circuito de los devanados} = 3 (Rs + Rr'/s) Ir^2 \quad (99)$$

$$Q2 = \text{Potencia reactiva del circuito de los devanados} = 3 (Xls + Xlr') Ir^2 \quad (100)$$

$$Ir^2 = V^2 / [(Rs + Rr'/s)^2 + ((Xls + Xlr')^2)] \quad (101)$$

$$\cos \phi_{1,2E} \leq \cos \phi_{1,2} = (P1 + P2) / [(P1 + P2)^2 + (Q1 + Q2)^2]^{1/2} \quad (102)$$

$$(\cos \phi_{1,2E})^2 \leq (P1 + P2)^2 / [(P1 + P2)^2 + (Q1 + Q2)^2] \quad (103)$$

$$(\cos \phi_{1,2E})^2 \leq 1 / [1 + (Q1 + Q2)^2 / (P1 + P2)^2] \quad (104)$$

$$(Q1 + Q2)^2 / (P1 + P2)^2 \leq (\tan \phi_{1,2E})^2 \quad (105)$$

$$(Q1 + Q2) / (P1 + P2) \leq (\tan \phi_{1,2E}) \quad (106)$$

$$Q1 + Q2 = 3 V^2 / Xm + 3 V^2 (Xls + Xlr') / [(Rs + Rr'/s)^2 + ((Xls + Xlr')^2)] \quad (107)$$

$$P1 + P2 = 3 V^2 / Rp + 3 V^2 (Rs + Rr'/s) / [(Rs + Rr'/s)^2 + ((Xls + Xlr')^2)] \quad (108)$$

$$[1 / Xm + (Xls + Xlr') / ((Rs + Rr'/s)^2 + (Xls + Xlr')^2)] / [1 / Rp + (Rs + Rr'/s) / ((Rs + Rr'/s)^2 + (Xls + Xlr')^2)] \leq (\tan \phi_{1,2E}) \quad (109)$$

$$\begin{aligned} & ((Rs+Rr'/s)^2 + (Xls+Xlr')^2) + Xm (Xls+Xlr') / ((Rs+Rr'/s)^2 + (Xls+Xlr')^2) \\ & + Rp((Rs + Rr'/s) \leq (\tan \varphi_{1,2E}) Xm/Rp \end{aligned} \quad (110)$$

$$Afp = (\tan \varphi_{1,2E}) Xm/Rp (1 - Afp) ((Rs+Rr'/s)^2 + (Xls+Xlr')^2) + Xm (Xls+Xlr') - Afp Rp((Rs + Rr'/s) \leq 0 \quad (111)$$

$$\begin{aligned} & ((Rs+Rr'/s)^2 + (Xls+Xlr')^2) + Xm (Xls+Xlr') / (1-Afp) - Afp Rp((Rs + \\ & Rr'/s) / (1-Afp) \leq 0 \end{aligned} \quad (112)$$

$$Bfp = Xm / (1-Afp) / 2 \quad (113)$$

$$Cfp = -Rp A / (2(1-Afp)) \quad (114)$$

$$Dfp = (Bfp^2 + Cfp^2)^{1/2} \quad (115)$$

$$\begin{aligned} & (Rs+Rr'/s)^2 - 2Cfp x (Rs + Rr'/s) + Cfp^2 + (Xls+Xlr')^2 + 2 Bfp (Xls+Xlr') \\ & + Bfp^2 \leq Bfp^2 + Cfp^2 \end{aligned} \quad (116)$$

$$((Rs+Rr'/s) - Cfp)^2 + ((Xls+Xlr') + Bfp)^2 \leq Dfp^2 \quad (117)$$

RESTRICION DE FACTOR DE POTENCIA.

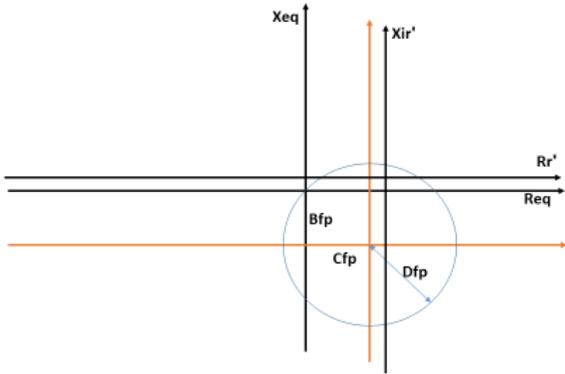


Fig. 14 Gráfico de selección de parámetros ( $Rr'$ ,  $Xlr'$ ) para la restricción de factor de potencia.

### I. Restricción de densidad de corriente en las barras de rotor

La restricción está desarrollada sobre la base de tener la densidad de corriente en las barras de la jaula y en los anillos de corto circuito de igual magnitud. Así la resistencia de cada fase del circuito rotórico, estará definida por:

$$Rr = \rho (Ln + D/p) / Ab \quad (118)$$

$$Ab = \rho (Ln + D/p) / Rr \quad (119)$$

Ella incluye la resistencia de la barra y los anillos de corto circuito.

$$3 \tilde{E}_s \tilde{I}_r^* = S2 \tilde{E}_r \tilde{I}_r^* \quad (120)$$

$$\tilde{E}_s = n \tilde{E}_r \quad (121)$$

$$3 n \tilde{I}_r^* = S2 \tilde{I}_r^* \quad (122)$$

$$\tilde{I}_r^* / \tilde{I}_r^* = S2 / (3 n) \quad (123)$$

$$\tilde{E}_s / \tilde{I}_r^* = n \tilde{E}_r / ((S2/3 n) \tilde{I}_r^*) \quad (124)$$

$$Rr' = (3 n^2 / S2) Rr \quad (125)$$

$$JB = (lr/Ab) = (3n/S2) lr'/Ab \quad (126)$$

$$lr' = V / [(Rs + Rr'/s)^2 + (Xls + Xlr')^2]^{1/2} \quad (127)$$

$$JB = [3n/S2] V / [(Rs + Rr'/s)^2 + (Xls + Xlr')^2]^{1/2} / Ab \quad (128)$$

$$JB = [3n/S2] V / [(Rs + Rr'/s)^2 + (Xls + Xlr')^2]^{1/2} / (\rho(Ln + D/p)/Rr) \quad (129)$$

$$JB = 3 n Rr V / [(S2 \rho (Ln + D/p)) ((Rs + Rr'/s)^2 + (Xls + Xlr')^2)^{1/2}] \quad (130)$$

$$JB = Rr' V / ((n \rho) (Ln + D/p) [(Rs + Rr'/s)^2 + (Xls + Xlr')^2]^{1/2}) \quad (131)$$

$$JB \leq JBE \quad (132)$$

$$Rr' V / ((n \rho) (Ln + D/p) [(Rs + Rr'/s)^2 + (Xls + Xlr')^2]^{1/2}) \leq JBE \quad (133)$$

$$Rr' V / ((n \rho) (Ln + D/p) JBE) \leq [(Rs + Rr'/s)^2 + (Xls + Xlr')^2]^{1/2} \quad (134)$$

$$(Rr'/S)^2 Is V / (n \rho JBE (Ln + D/p))^2 \leq (Rs + Rr'/s)^2 + (Xls + Xlr')^2 \quad (135)$$

$$(Rr'/S)^2 Ajb^2 \leq (Rs + Rr'/s)^2 + (Xls + Xlr')^2 \quad (136)$$

$$Ajb^2 = Is V / (n \rho JBE (Ln + D/p))^2 \quad (137)$$

$$(Rr'/S)^2 (Ajb)^2 \leq Rs^2 + 2Rs Rr'/s + (Rr'/s)^2 + (Xls + Xlr')^2 \quad (138)$$

$$-Rs^2 \leq 2Rs Rr'/s + (Rr'/s)^2 (1-Ajb^2) + (Xls + Xlr')^2 \quad (139)$$

$$Bjb^2 = (1-Ajb^2) \quad (140)$$

$$-Rs^2 + (Rs/Bjb)^2 \leq (Rs/Bjb)^2 + 2Bjbs(Rr'/s)/Bjb + (Rr'/s)^2 x Bjb^2 + (Xls+Xlr')^2 \quad (141)$$

$$Rs^2 x (1/Bjb^2 - 1) \leq (Rr'/s) Bjb + Rs/Bjb^2 + (Xls + Xlr')^2 \quad (142)$$

$$Cbj^2 = Rs^2 (1/Bjb^2 - 1) \quad (143)$$

$$Cbj^2 \leq (Rr'/s) Bjb + Rs/Bjb^2 + (Xls + Xlr')^2 \quad (144)$$

$$1 \leq (Rr' + s Rs/Bjb^2) / (s Cbj/Bjb)^2 + ((Xls + Xlr')/Cbj)^2 \quad (145)$$

$$Ajb = sx Cbj / Bjb \quad (146)$$

$$bjb = Cjb \quad (147)$$

$$Hjb = -sx Rs / Bjb^2 \quad (148)$$

$$Kjb = -Xls \quad (149)$$

RESTRICION DE DENSIDAD DE CORRIENTE EN LAS BARRAS DE LA JAULA

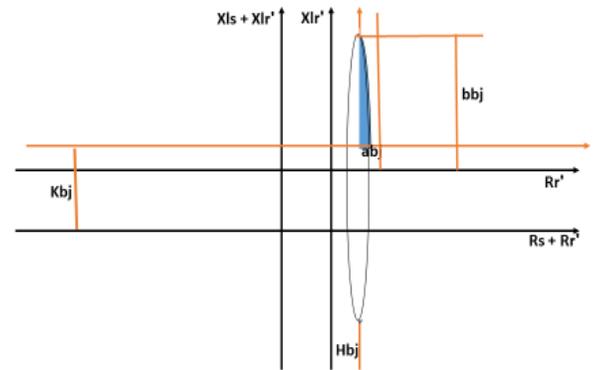


Fig. 15 Gráfico de selección de parámetros ( $Rr'$ ,  $Xlr'$ ) para la restricción de densidad de corriente en las barras de la jaula de ardilla

### III. DISCUSIÓN DE RESULTADOS

En el presente artículo se ha desarrollado ocho restricciones de diseño, para un motor de inducción trifásico de jaula simple. Cada restricción está representada por un diagrama que tiene dos zonas, una de negación y otra de aceptación de los valores que deben tomar los parámetros (resistencia y reactancia) para el cumplimiento de la restricción, que son los parámetros de la jaula.

Las restricciones que involucra el método son: Corriente de arranque, Torque de arranque, Torque máximo, Potencia de conversión máxima, Potencia nominal a deslizamiento nominal, Eficiencia máxima, Mínimo factor de potencia y Mínima densidad de corriente en las barras de la jaula.

En el diseño es posible se apliquen solamente las restricciones más importantes; pero si es necesario puede aplicarse las ocho restricciones para un solo diseño, con lo cual se superponen las zonas de aceptación de cada restricción, donde se pueden escoger los parámetros que satisfagan a las restricciones impuestas, utilizando un criterio de economía, para lo cual se seleccionará la jaula de mayor resistencia, que es la que utilizará menos material para la jaula y por lo tanto la más económica.

Con este método se puede diseñar un motor de inducción satisfaciendo ocho restricciones técnicas más una restricción económica, incrementando la cantidad de restricciones consideradas en [4], lo que hace que el uso de la interpretación geométrica tenga mayores ventajas que el método clásico de diseño de prueba y error, aun en el caso que no se utilizara todas las restricciones técnicas. Las restricciones de eficiencia y factor de potencia, además de mejorar las características técnicas, representan ventajas económicas. A mejor eficiencia menor el costo de la energía que consume el motor y a mejor factor de potencia, menor el costo de energía reactiva que requiere para transferir, así como convertir la energía electromagnética, de energía eléctrica en mecánica.

### IV. CONCLUSIONES

Con el uso de la interpretación geométrica, en el diseño de un motor de inducción trifásico, se logran grandes ventajas técnicas y económicas. En lo técnico se logra una corriente de arranque adecuada, un buen par de arranque, un buen torque máximo, un deslizamiento en concordancia con su potencia nominal, una buena capacidad de sobrecarga; mientras que en lo económico, con una eficiencia adecuada, se puede tener buenos resultados económicos, economizando costo de la energía utilizada para su funcionamiento y con un buen factor de potencia se puede tener economía por el uso adecuado de la energía reactiva, que el motor necesita para transferir energía

por vía electromagnética, así como convertir la energía eléctrica en energía mecánica.

### REFERENCIAS

- [1] E. Bustamante, "Design of the Auxiliary Phase for Split Phase and Capacitor Start Single Phase Induction Motor," IEEE, New York, 1977.
- [2] J. Núñez, "Desarrollo del Método de Interpretación Geométrica para el Diseño de la Jaula de un Motor Monofásico de Fase Partida," in XXXI Convención ASOVAC, Maracaibo, Venezuela, 1981.
- [3] J. Núñez, "Aplicación del Método de Interpretación Geométrica al Diseño de la Jaula de un Motor de Inducción de Dos Velocidades con Devanados PAM," in 3eras Jornadas de Potencia, LUZ, Maracaibo, Venezuela, 1982.
- [4] J. Núñez, S. Núñez, and G. Núñez, "Método de Diseño del Devanado de Arranque de un Motor Monofásico de Inducción con Condensador de Arranque," Telematique, vol. 8, no. 3, pp. 89-101, Sept.-Dec. 2009.
- [5] G. S. Brosan and J. T. Hayden, *Advanced Electrical Power and Machines*. London: Sir Isaac Pitman and Sons Ltd., 1966.
- [6] A. E. Fitzgerald, C. Kingsley, and S. D. Umans, *Electric Machinery*. New York: McGraw-Hill Book Company, 1914.