ISBN: 978-628-96613-1-6. ISSN: 2414-6390. Digital Object Identifier: https://dx.doi.org/10.18687/LACCEI2025.1.1.1871

Artificial Prime Numbers: A Relative Perspective on Primality

Acevedo Jiménez, José
Universidad Tecnológica de Santiago (Utesa), Dominican Republic, ing-electronica@utesa.edu

Abstract*– *This article explores the notion of artificial prime numbers in the context of specific sets of integers. A formal definition is presented, their properties are discussed, and they are compared to the classical notion of primality. Furthermore, potential applications of these numbers in number theory and cryptography are analyzed.

Keywords: prime numbers, artificial primes, number theory, conjecture, cryptography.

Números Primos Artificiales: Una Perspectiva Relativa sobre la Primalidad

Acevedo Jiménez, José
Universidad Tecnológica de Santiago (Utesa), República Dominicana, ing-electronica@utesa.edu

***Resumen*– Este artículo introduce el concepto de "números primos artificiales", definidos dentro de conjuntos específicos de números enteros, donde un número se considera primo artificial si no es divisible por ningún otro elemento del conjunto, salvo él mismo. A diferencia de los primos tradicionales, cuya primalidad es universal, los primos artificiales dependen del contexto del conjunto considerado. Se exploran propiedades clave como la indivisibilidad relativa y la coprimalidad artificial, ampliando las posibilidades de investigación en teoría de números y criptografía. Además, se discuten generalizaciones de conjeturas clásicas y se presenta una demostración sobre la infinitud de estos números, destacando su relevancia en la factorización y generación de números aleatorios en contextos matemáticos aplicados.**

***Palabras clave:* prime numbers, artificial primes, number theory, conjecture, cryptography.**

I. INTRODUCCIÓN

Los números primos han fascinado a matemáticos a lo largo de la historia debido a su papel fundamental en la teoría de números. Se definen como aquellos números enteros mayores que 1 que solo tienen dos divisores: 1 y el propio número. Esta propiedad los convierte en los "bloques de construcción" de los números enteros, ya que cualquier número entero positivo se puede expresar como un producto único de primos, conocido como la factorización prima. Esta característica no solo es crucial en la aritmética, sino que también tiene aplicaciones en diversas áreas, incluyendo la criptografía, donde la dificultad de factorizar grandes números compuestos en sus primos subyacentes garantiza la seguridad de muchos sistemas.

Sin embargo, el concepto de primalidad no tiene que limitarse a los números primos en el contexto general. Se puede explorar en contextos más restringidos, como en conjuntos específicos de números. Aquí es donde surge la noción de números primos artificiales.

Los números primos artificiales se definen en relación a un conjunto dado de números enteros positivos, donde un número se considera primo si no puede ser dividido por ningún otro elemento del conjunto, excepto por sí mismo. Esta idea permite un análisis más profundo de las relaciones entre los números en un contexto particular y ofrece una nueva perspectiva sobre la primalidad, abriendo la puerta a la exploración de estructuras numéricas más complejas.

En la siguiente sección, examinaremos la definición formal de los números primos artificiales, sus propiedades, y ejemplos que ilustran su comportamiento en comparación con la noción clásica de primalidad. Este enfoque no solo enriquecerá nuestra comprensión de los números, sino que también proporcionará herramientas para investigar la teoría de números en contextos más amplios y variados.

A. Conceptos Básicos sobre los Primos Artificiales

1) *Definición de números primos artificiales: Sea S un conjunto no vacío de números enteros positivos tal que $S \subseteq \mathbb{Z}^+$ y $\forall x \in S, x > 1$. Un número $q \in S$ se denomina número primo artificial si y solo si se cumple la siguiente condición: $\forall d \in S, d \neq q, d \nmid q$. Es decir, un número q es un número primo artificial si no existe algún elemento d en el conjunto S que divida a q, excluyendo el propio q.*

2) *Justificación de la definición:* Al considerar un conjunto S, la "primalidad" de un número q dentro de este conjunto se define por su incapacidad para ser divisible por cualquier otro elemento d de S, distinto de sí mismo. Aunque q pueda ser divisible por otros números fuera de S, dentro del conjunto S se le considera "primo" porque no tiene divisores en S más que él mismo. La clave de esta definición radica en la restricción a los elementos del conjunto S. Esta restricción permite identificar un tipo de número "primo" que es relevante exclusivamente dentro del contexto de ese conjunto particular. Esta definición se asemeja a la primalidad clásica en la teoría de números, donde un número primo no tiene divisores positivos distintos de 1 y de sí mismo. Sin embargo, en este caso, en lugar de 1, la restricción se aplica a los elementos del conjunto S, adaptando la idea de primalidad a un contexto más específico.

3) *Primalidad relativa:* La definición introduce un concepto de "primalidad" relativo al conjunto S. Esto significa que la "primalidad" de q se evalúa en relación con los números presentes en S. Un número puede no ser primo en el sentido clásico, pero ser considerado primo dentro del contexto del conjunto S.

4) *Propiedades de los Números Primos Artificiales:* Un número q es considerado un primo artificial si no existe ningún otro número d en el conjunto S (distinto de q) que lo divida. Esto implica que q es "indivisible" dentro del contexto de S .La primalidad artificial depende completamente del conjunto S. Un número que puede ser considerado un primo artificial en un conjunto S puede no serlo en otro conjunto diferente. A diferencia de los números primos clásicos, los primos artificiales pueden ser números compuestos. Es decir, un número compuesto puede ser considerado un primo artificial si no tiene divisores dentro del conjunto S que no sean él mismo. En el caso de un conjunto ordenado de enteros, los primos artificiales pueden ser identificados según su posición en relación con otros elementos. Sin embargo, su distribución no sigue necesariamente la misma pauta que la de los números primos dentro de los enteros. Finalmente, la identificación de primos artificiales en conjuntos grandes o sin un patrón claro puede resultar computacionalmente difícil, de manera similar a la identificación de números primos tradicionales.

B. Potenciales Líneas de Investigación Emergentes con el uso de Números Primos Artificiales

La relación entre los números primos artificiales y los números primos clásicos, a través de teoremas y conjeturas, ofrece un campo fértil para la investigación en teoría de números. Aunque muchas conjeturas se centran en los primos clásicos, la exploración de cómo estas ideas pueden extenderse o adaptarse al contexto de los primos artificiales puede dar lugar a nuevas perspectivas y descubrimientos matemáticos. A continuación, se muestran algunas conjeturas y un postulado relacionados con los números primos clásicos y su generalización en el marco de los números primos artificiales.

1) *Conjetura de Goldbach:* Todo número par mayor que puede expresarse como suma de dos números primos.

Generalización: Dado un conjunto $S_B = \{a_n \in \mathbb{Z}^+ : a_n = 2 + (n-1)k, n \in \mathbb{N}\}$. Si k es impar, entonces todo número par mayor que 2 puede expresarse como la suma de un máximo de $(k+1)$ números primos artificiales (q).

Obsérvese que cuando $k = 1$ obtenemos la muy conocida conjetura de Goldbach.

2) *Conjetura de Legendre:* Para todo $n \in \mathbb{N}$, siempre existe un número primo (p) tal que:

$$n^2 < p < (n+1)^2. \quad (1)$$

Generalización: Dado un conjunto $S_A = \{a_n \in \mathbb{Z}^+ : a_n = a_1 + (n-1)k, n \in \mathbb{N}\}$. Si $a_1 > 1\}$, entonces:

$$a_n(a_n + k - 1) < q < (a_n + k)(a_n + 2k - 1). \quad (2)$$

Obsérvese que cuando $k = 1$ obtenemos la conjetura de Legendre.

3) *Conjetura de Andrica:* Si p_n es enésimo número primo, entonces la desigualdad

$$\sqrt{p_{n+1}} - \sqrt{p_n} < 1. \quad (3)$$

se cumple para todo n.

Generalización: Dado un conjunto $S_A = \{a_n \in \mathbb{Z}^+ : a_n = a_1 + (n-1)k, n \in \mathbb{N} \geq 1\}$. Si q_n es el enésimo número primo artificial del conjunto S, entonces la desigualdad

$$\sqrt{q_{n+1}} - \sqrt{q_n} < \sqrt{k}. \quad (4)$$

se cumple para todo n.

Obsérvese que cuando $a_1 = k = 1$ obtenemos la conjetura de Andrica.

4) *Conjetura de Gilbreath:* Sea $\{p_n\}$, para $n \geq 1$, la sucesión ordenada de números primos, y sea

$$k_n = p_{n+1} - p_n$$

Para cada $a \geq 1$, sea:

$$k_n^a = |k_{n+1}^{a-1} - k_n^{a-1}|. \quad (5)$$

Para todo a se cumple que:

$$k_1^a = 1. \quad (6)$$

Generalización: Dado un conjunto $S_B = \{a_n \in \mathbb{Z}^+ : a_n = 2 + (n-1)k, n \in \mathbb{N}\}$, para valores impares de k.

Sea $\{q_n\}$, para $n \geq 1$, la sucesión ordena de números primos artificiales en el conjunto S_B, y sea

$$k_n = q_{n+1} - q_n. \quad (7)$$

Para cada $a \geq 1$, sea

$$k_n^a = |k_{n+1}^{a-1} - k_n^{a-1}|. \quad (8)$$

Para todo a se cumple que:

$$k_1^a = k. \quad (9)$$

5) *Conjetura de Polignac:* Para todo número natural n existen infinitos pares de números primos (p) cuya diferencia es $2n$. Si $n = 1$, obtenemos la conjetura de los primos gemelos

Generalización: Dado un conjunto $S_A = \{a_n \in \mathbb{Z}^+ : a_n = a_1 + (n-1)k, n \in \mathbb{N}\}$. Para todo número natural n, existen infinitos pares de números primos artificiales (q) cuya diferencia es $2kn$.

6) *Postulado de Bertrand:* Para todo número entero $n > 1$, existe al menos un número primo (p)

tal que: $n < p < 2n. \quad (10)$

Generalización: Dado un conjunto $S_A = \{a_n \in \mathbb{Z}^+ : a_n = a_1 + (n-1)k, n \in \mathbb{N}\}$. Para todo $a_1 > 1$ existe al menos un número primo artificial (q) tal que:

$$a_n < q < 2(a_n + k - 1). \quad (11)$$

Obsérvese que cuando $k = 1$ obtenemos el postulado de Bertrand.

C. Resultados Fundamentales sobre los Números Primos Artificiales

1) En todo conjunto S_N no vacío de números enteros positivos mayores que 1, existe un número menor en S_N que no tiene divisores (primo artificial) dentro del conjunto S_N, más que él mismo.

2) Si S_N es el conjunto de todos los enteros positivos mayores que 1, entonces todos los números primos artificiales de dicho conjunto son números primos.

3) En cualquier conjunto no vacío de enteros mayores que 1, existe al menos un primo artificial.

4) Si un conjunto contiene solo un elemento, ese elemento es un primo artificial.

5) Si se considera un subconjunto de un conjunto S, cualquier primo artificial en el subconjunto también es un primo artificial en S.

6) Si un primo artificial q en un conjunto S se multiplica por cualquier entero que no esté en S, el producto no es un primo artificial en S.

7) La intersección de dos conjuntos de primos artificiales puede no contener primos artificiales a menos que los conjuntos sean idénticos.

8) La suma de dos primos artificiales en un conjunto S no es necesariamente un primo artificial en S.

9) El producto de dos primos artificiales en un conjunto S no es un primo artificial en S.

10) Eliminar un número compuesto de un conjunto S no afecta el estado de primo artificial de otros elementos.

11) Agregar un nuevo elemento a un conjunto S puede cambiar potencialmente el estado de primo artificial de los elementos existentes.

12) Si un número es un primo artificial en un conjunto S, seguirá siendo un primo artificial en cualquier superconjunto de S.

13) Si un número deja de ser un primo artificial al añadir un nuevo elemento a S, entonces el nuevo elemento es un divisor del número.

14) La paridad (par o impar) de un primo artificial no afecta su estado de primo artificial en el conjunto S.

15) El menor número en un conjunto S de enteros mayores que 1 es siempre un primo artificial.

16) El mayor número en un conjunto S finito puede ser un primo artificial si no es divisible por ningún otro número en S.

17) En un conjunto denso de enteros, los primos artificiales tienden a ser menos frecuentes.

18) Aplicar una transformación que preserve la divisibilidad a un conjunto S mantiene el estado de primo artificial de sus elementos.

19) Si q es un primo artificial en S, entonces ninguna potencia de q mayor que q puede ser un primo artificial en S si está contenida en S.

20) Si todos los elementos de S son coprimos entre sí, entonces todos son primos artificiales.

21) En un conjunto S de números consecutivos, la proporción de primos artificiales tiende a disminuir a medida que aumenta el tamaño del conjunto.

22) El estado de primo artificial de un número es invariante bajo cualquier reordenamiento del conjunto S.

23) Si n es un número compuesto en S y por lo menos uno de sus factores primos está en S, entonces n no puede ser un primo artificial.

24) En una sucesión aritmética contenida en S, si la diferencia común está en S, solo el primer término puede ser un primo artificial.

25) Para cualquier número n, existe un conjunto S de cardinalidad mínima donde n es un primo artificial.

26) La eliminación de un número que no es divisor de ningún otro número en S no afecta el conjunto de primos artificiales.

27) Si p es un primo artificial en S y q es un primo artificial en $S \cup \{p\}$, entonces q es un primo artificial en S.

28) Un conjunto S se dice "completo" si contiene todos los divisores de cada uno de sus elementos.

29) Si q es un primo artificial en S, entonces existe un subconjunto minimal de S donde q sigue siendo primo artificial.

30) Para cualquier primo artificial q en S, existe una extensión maximal de S donde q mantiene su condición de primo artificial.

31) Los primos artificiales en un conjunto S están determinados únicamente por las relaciones de divisibilidad dentro de S.

32) Para cualquier conjunto finito de números, existe un conjunto S donde exactamente esos números son primos artificiales.

33) Si q es un primo artificial en S, entonces no puede ser dominado por ninguna combinación multiplicativa de otros elementos de S.

34) Si dos números son primos artificiales en S, entonces son coprimos artificiales entre sí dentro de S.

35) Existe un número finito de operaciones necesarias para determinar si un número es primo artificial en S.

36) Un número es primo artificial en S si y solo si su conjunto de divisores en S se reduce a él mismo.

D. Potenciales Aplicaciones de los Números Primos Artificiales

El concepto de números primos artificiales podría tener implicaciones en diversas áreas de la matemática, entre las que se incluyen:

1) *Teoría de Números:* Podría ser útil en el estudio de la divisibilidad y las propiedades de factorización, ofreciendo una nueva perspectiva sobre la estructura de los números.
   Un ejemplo concreto de conjunto específico donde se pueden estudiar primos artificiales son los números de Fibonacci, cuya secuencia crece rápidamente y cuya propiedad de divisibilidad puede ser diferente de la de los números enteros clásicos. Aplicando la definición de primo artificial a los números de Fibonacci, podemos identificar cuáles de estos números no tienen divisores dentro de la secuencia, similar a cómo identificamos primos dentro del conjunto de los enteros.

Consideremos la secuencia de Fibonacci, tomemos solo los números mayores que 1:
2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, …
Aplicando la definición de primo artificial, observamos lo siguiente:
2: no tiene ningún otro número en la secuencia que lo divida, por lo que es un primo artificial.
3: no tiene divisores en la secuencia distintos a sí mismo, por lo que es un primo artificial.
5: no tiene divisores en la secuencia distintos de 5, por lo que es un primo artificial.
8: tiene por lo menos un divisor dentro de la secuencia (el número 2), por lo que no es un primo artificial.
13: no tiene divisores dentro de la secuencia, por lo que es un primo artificial.
21: tiene por lo menos un divisor dentro de la secuencia (el número 3), por lo que no es un primo artificial.
34: tiene por lo menos un divisor dentro de la secuencia, por lo que no es un primo artificial.
55: tiene por lo menos un divisor dentro de la secuencia, por lo que no es un primo artificial.
89: no tiene divisores dentro de la secuencia, por lo que es un primo artificial.
144: tiene por lo menos un divisor dentro de la secuencia, por lo que no es un primo artificial.

De este análisis, podemos concluir que los números 2, 3, 5, 13 y 89 son los primeros primos artificiales dentro del conjunto de los números de Fibonacci mayores que 1.
El concepto nos permite explorar propiedades interesantes del conjunto, como la función contadora de los números primos artificiales en el conjunto de los números de Fibonacci (mayores que 1).
Si tomamos los términos de esta sucesión a partir del tercero (es decir, F_n para $n \geq 3$), podemos formar un conjunto $S = \{F_n \mid n \geq 3\}$. En este conjunto, ciertos números de Fibonacci son divisibles por otros números dentro del mismo conjunto, mientras que otros no. Aquellos que no pueden ser divididos por ningún otro número Fibonacci (aparte de sí mismos) dentro de S, son considerados primos artificiales.

Definamos $\pi_S(x)$ como la función contadora de números primos artificiales menores o iguales que x dentro de S. Entonces, para $n \geq 5$, se cumple que:

$$\pi_S(F_n) = \pi(n). \quad (12)$$

Donde $\pi(n)$ es la función contadora de números primos (naturales) menores o iguales que n, la cual satisface la estimación:

$$\pi(n) \sim \frac{n}{\ln n} \text{ cuando } n \to \infty. \quad (13)$$

Demostración: Consideremos el conjunto A ordenado de los números naturales mayores que 2.

$$A = \{3,4,5,6,7,8,9, \dots\}.$$

Dentro de este conjunto, observamos que el número 4 no es divisible por ningún otro elemento de A, excepto por sí mismo. Por lo tanto, bajo la definición de primo artificial (es decir, un número que no es divisible por ningún otro del conjunto, salvo por sí mismo), el 4 es un primo artificial en A. Los demás números primos mayores que 2, como 3, 5, 7, 11, etc., también son primos artificiales en A, ya que no tienen divisores propios dentro del conjunto. En consecuencia, el conjunto de primos artificiales de A está dado por: $\text{primos artificiales en } A = \{3, 4, 5, 7, 11, 13, \dots\}$.

Definimos los números naturales como:

$N_1 = 1, N_2 = 2, N_{k+1} = N_k + 1$. Esta definición genera la sucesión habitual de los números naturales, es decir: $1,2,3,4,5, \dots$

En el conjunto de los números naturales, un número N_i divide a otro N_j si y solo si su índice divide al índice del segundo:

$$N_i \mid N_j \Leftrightarrow i \mid j.$$

Esta propiedad será fundamental al establecer la correspondencia con los números de Fibonacci.

Tomemos ahora el conjunto S compuesto por los números de Fibonacci mayores que 1.

Establecemos una correspondencia ordenada entre los elementos del conjunto A y los de S, de modo que a cada elemento $N_k \in A$ le corresponde un $F_n \in S$ con igual índice k. Es decir:

$$N_k \leftrightarrow F_k, \text{ para } k \geq 3.$$

Dado que la divisibilidad en ambos conjuntos depende de la divisibilidad entre índices, la relación de divisibilidad se conserva bajo esta correspondencia. En otras palabras:

$$F_i \mid F_j \iff i \mid j \iff N_i \mid N_j.$$

Como los números primos artificiales en el conjunto A coinciden con los primos clásicos mayores que 2 (junto con el 4), y existe una correspondencia índice a índice entre A y S que preserva la divisibilidad, entonces los primos artificiales en S coinciden con los primos clásicos en posición, salvo por un desplazamiento inicial.

Esto implica que la función contadora de primos artificiales en S, es decir, la cantidad de elementos en S que no son divisibles por ningún otro del conjunto, coincide con la función contadora de números primos clásicos $\pi(n)$, para $n \geq 5$.

Evaluación de algunas propiedades del conjunto de los números naturales mayores que 1.

$$S_N = \{n \in \mathbb{Z}^+ : n > 1\}$$

Propiedades:

1) En el conjunto de los números naturales mayores que 1, los números primos artificiales coinciden con los primos clásicos. Esto se debe a la naturaleza de la definición tanto de los primos clásicos como de los primos artificiales cuando el conjunto considerado es el conjunto de todos los números naturales mayores que 1.

2) Todo conjunto no vacío de números naturales contiene al menos un número primo artificial, esto es así debido a que el número más pequeño dentro de dicho conjunto no puede ser divisible por ningún otro elemento distinto de sí mismo.

Demostración de la infinitud de los números primos:

Conjunto de los números naturales mayores que 1.

$$S_N = \{n \in \mathbb{N} : n > 1\}$$

El menor número de dicho conjunto es 2, sacamos este número del conjunto dado y lo ponemos en otro conjunto de números primos artificiales. A continuación, descartamos todos los múltiplos de 2. No todos los números pueden ser múltiplos de 2, pues bastaría sumar 1 a cualquier número par para garantizar la existencia de otros números no pares en el conjunto dado. Al sacar el número 2 y "eliminar" sus múltiplos del conjunto S_N, nos queda un subconjunto $S'_N = \{n \in \mathbb{N} : n > 2\}$. El número más pequeño de este nuevo conjunto (3) no puede tener divisores, así que lo sacamos y "eliminamos" todos sus múltiplos de 3. Ningún múltiplo de 3 puede ser el último número del conjunto S'_N, bastaría sumar 1 a cualquier múltiplo de 3 para generar un número distinto. Este proceso puede repetirse indefinidamente, ya que siempre es posible identificar un nuevo número más pequeño dentro del conjunto restante que no tiene divisores en dicho subconjunto. Esto implica que, mediante este método constructivo, se garantiza la existencia de un número primo artificial en cada etapa del procedimiento, mostrando que no hay un límite superior para los números primos artificiales en el conjunto S_N. Por lo tanto, los números primos artificiales, que en el conjunto S_N coinciden con los números primos, son infinitos.

Propiedad del conjunto de los números naturales pertenecientes a progresiones aritméticas de la forma:

$$S_A = \{a_{n-1} \in \mathbb{N} : a_{n-1} = (n-1)k + 1, n \in \mathbb{N} > 1\}$$

En un conjunto S_A, todo número (d) que no es primo artificial (elemento de S_A) se puede expresar como el producto de dos o más números primos artificiales (q_n) en S_A de una forma única salvo el orden de los factores.

$$d = q_1^{e_1} q_2^{e_2} \dots q_k^{e_k} \prod_{i=1}^{k} q_i^{e_i}. \quad (14)$$

Ejemplo:

$$S_A = \{4n + 1 : n > 0\}$$

$$S_A = \{5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33, 37, 41, 45, 49, 53, 57, 61, 65, 69, 73, 77, 81, 85, 89, 93, 97, 101, 105, 109, 113, 117, \dots\}$$

Los primeros números primos artificiales del conjunto S_A son: 5, 9, 13, 17, 21, 29, 33, 37, 41, 49, 53, 57, 61, 69, 73, 77, 89, 93, 97, 101, 109 y 113.

El resto ("no primos artificiales" o compuestos naturales) se pueden expresar como el producto de dos o más primos artificiales del conjunto S_A.

$25 = 5^2$, $45 = 5 \times 9$, $65 = 5 \times 13$, $81 = 9^2$, $85 = 5 \times 17$. $105 = 5 \times 21$, $117 = 9 \times 13$.

2) *Criptografía:* Podría proporcionar un marco potencial para generar claves criptográficas basadas en la indivisibilidad de ciertos números dentro de un conjunto, lo cual sería relevante para la seguridad en las comunicaciones digitales.

En criptografía, se utilizan propiedades difíciles de invertir (como la factorización de grandes números primos) para construir algoritmos seguros. El concepto de números primos artificiales podría introducir una nueva "capa contextual" a la indivisibilidad que puede usarse para ocultar estructuras **o** reforzar esquemas existentes haciendo uso de las propiedades de los conjuntos numéricos seleccionados**.**

Si $S_1 = \{z_1 = ax + 1: z_1 \in \mathbb{N} > 1\}$, entonces todo elemento que no es primo artificial en S_1 (compuesto natural) se puede expresar como el producto de dos o más primos artificiales del conjunto S_1 de una forma única salvo el orden de los factores.
Si $S_2 = \{z_2 = ax - 1: z_2 \in \mathbb{N} > 1\}$, entonces el producto de dos números primos artificiales pertenecientes al conjunto S_2 es igual a un número primo artificial del conjunto S_1.
Estas propiedades de los números primos artificiales en los conjuntos S_1 y S_2 podrían ser útiles para modificar o mejorar el método de encriptación RSA.

3) *Algoritmos:* Podría facilitar la optimización de algoritmos computacionales que dependen de propiedades de divisibilidad, mejorando la eficiencia de los procesos matemáticos.
   Un ejemplo concreto sería tomar subconjuntos de números naturales (técnica divide y vencerás) para eficientizar la criba de Eratóstenes. A continuación, mostramos un algoritmo (criba de Eratóstenes aplicada a números primos artificiales), como ejemplo:

Sea $N \subset \mathbb{Z}^+$, con todos sus elementos mayores que 1. Definamos la criba de Eratóstenes aplicada a números primos artificiales como un proceso para encontrar los números primos artificiales del conjunto N, aplicando una lógica análoga a la criba clásica, pero dentro del conjunto N y respetando su estructura interna.
Algoritmo paso a paso:
Entrada:
Un conjunto $N \subseteq \mathbb{Z}^+$, tal que $\forall x \in N, x > 1$.
Salida:
El conjunto de números primos artificiales $P_A(N)$.
Criba generalizada:

a) Ordenar N en orden creciente.
b) Crear un conjunto vacío P_A (para almacenar los números primos artificiales).
c) Mientras N no esté vacío:
   - Tomar el menor elemento $q \in N$.
   - Añadir q a P_A.
   - Eliminar de N todos los elementos $m \in N \setminus \{q\}$ tales que q divida a m.
d) Repetir hasta que N quede vacío.
e) El conjunto P_A contiene los números primos artificiales.

4) *Generación de Números Aleatorios*: En algunos algoritmos de pseudoaleatoriedad, se podría considerar el uso de números con características similares a los primos para generar secuencias aleatorias de manera más efectiva.
   En la generación pseudoaleatoria, se buscan estructuras difíciles de predecir. Los primos artificiales, al depender de un conjunto, pueden ser usados para introducir variabilidad controlada y estructuras no triviales que enriquecen el espacio de estados.

5) *Herramienta pedagógica:* El concepto puede servir para introducir la idea de relatividad en matemáticas, mostrando cómo las propiedades numéricas pueden depender del contexto.
   La definición tradicional de número primo es absoluta: un número entero mayor que 1 que solo es divisible por 1 y por sí mismo. Los primos artificiales permiten replantear la noción de primalidad desde un enfoque contextual, lo que ayuda a:
   - Desarrollar pensamiento lógico y relacional.
   - Fomentar la exploración matemática.
   - Reforzar conceptos clave como divisibilidad, conjunto, subestructura y factorización.
   - Demostrar que las propiedades matemáticas pueden depender del contexto.

E. Representación de Conjuntos

1) El Conjunto $\boldsymbol{S_N}$ de los Números Enteros Positivos Mayores que 1.

$S_N = \{n \in \mathbb{Z}^+ : n > 1\}$, es decir:

$$S_N = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, ..\}$$

En este caso en particular, el conjunto de los números primos artificiales asociado a S_N , $P_A(S_N)$, es el conjunto de los números primos. Esto es: $P_A(S_N) = P$, donde P es el conjunto de los números primos. Esto es así ya que en el conjunto S_N de los números enteros mayores que 1, los únicos números que solo tienen como divisor el propio número (recordar que se ha excluido el 1) son los números primos. Todo número compuesto en dicho conjunto tendrá por lo menos un factor primo en S_N que lo divide.

2) El Conjunto $\boldsymbol{S_F}$ de los Números de Fibonacci:

$$S_F = \{F_n : n \in \mathbb{Z}^+, n \geq 2\}$$

3) El Conjunto $\boldsymbol{S_X}$ de una Función:

$$S_X = \{f(n) : n \in \mathbb{N}\}$$

4) El Conjunto $\boldsymbol{S_Z}$ de una Sucesión de Números Enteros Positivos:

$$S_Z = \{a_1, a_2, a_3, .., a_n : a_1 > 1\}$$

5) El Conjunto $\boldsymbol{S_A}$ de una Progresión Aritmética:

$$S_A = \{a_n \in \mathbb{Z}^+ : a_n = a_1 + (n-1)k, n \in \mathbb{N}\}$$

Como podemos observar, los conjuntos *S* que se pueden crear para explorar los números primos artificiales son infinitos y pueden abarcar una variedad de criterios, desde propiedades numéricas hasta patrones y restricciones específicas. Al analizar estos conjuntos, se pueden obtener soluciones sobre las relaciones de divisibilidad y la estructura interna de los números. La clasificación de un número como primo artificial depende del conjunto *S* en el que se está considerando. Un número puede ser un primo artificial en un conjunto y no serlo en otro.

F. Justificación

Los números primos artificiales nos ofrecen una nueva forma de entender la primalidad en un contexto restringido, ampliando nuestro horizonte en la teoría de números. Esta noción invita a matemáticos y científicos a explorar más a fondo las interacciones entre números y a descubrir nuevas propiedades y patrones que pueden no ser evidentes en un marco más amplio.

Aunque los números primos artificiales no reemplazan la definición clásica de primalidad, ofrecen una perspectiva complementaria que puede enriquecer nuestra comprensión de la teoría de números y de las relaciones entre números en contextos específicos. Este tipo de exploraciones puede llevar a nuevas ideas y enfoques en la matemática. Pueden ser útiles para estudiar propiedades de divisibilidad y factorización dentro de un conjunto específico, permitiendo análisis más profundos en teoría de números.

El concepto puede aplicarse en áreas como la teoría de números, la criptografía y la generación de números aleatorios, donde la propiedad de divisibilidad juega un papel crucial.

AGRADECIMIENTO/RECONOCIMIENTO

Expresamos nuestro más sincero agradecimiento al Dr. Efraín Soto Apolinar, al Ing. Raúl Toribio, al Lic. Francisco del Rosario Sánchez Fernández, a la Licda. Danilka Hernández Ureña, al Ing. Luís Marcel Contreras y a la Ing. Vielka Gil Castro por su invaluable apoyo, orientación y contribuciones a lo largo de este proyecto. Su experiencia y dedicación han sido fundamentales para el desarrollo y éxito del trabajo realizado.

REFERENCES

[1] Juan Arias de Reyna, *La conjetura de Gilbreath*, blog post. https://institucional.us.es/blogimus/2020/07/la-conjetura-de-gilbreath/

[2] Albert Zotkin, *Números primos: Acotando la conjetura de Gilbreath*, blog post. https://tardigrados.wordpress.com/2013/04/04/numeros-primos-acotando-la-conjetura-de-gilbreath/

[3] Miguel Ángel Morales Medina, *La conjetura de Gilbreath: cuando un matemático juega con los números primos…*, blog post. https://www.gaussianos.com/la-conjetura-de-gilbreath-cuando-un-matematico-juega-con-los-numeros-primos/

[4] Antonio José Arjona Moreno, *La conjetura de Goldbach*, blog post. https://www.masscience.com/la-conjetura-de-goldbach/

[5] Javier Cilleruelo Mateo, *La Conjetura de Goldbach*, https://digital.csic.es/bitstream/10261/31197/1/abrir.pdf

[6] Iván M. Vinográdov. *Fundamentos de la Teoría de los Números*, segunda edición, Editorial MIR, Moscú, 1977.

[7] Miguel Ángel Morales Medina, *La conjetura de Andrica, o qué distancia hay entre dos números primos consecutivos*, blog post. https://www.gaussianos.com/la-conjetura-de-andrica-o-que-distancia-hay-entre-dos-numeros-primos-consecutivos/

[8] Eduardo Núñez Olguín, *Teorema de los números primos*. https://pmontero.mat.utfsm.cl/pdf_memorias/Memoria_Eduardo_Nunez.pdf

[9] Koshy, Thomas. (2001). *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications*. Wiley-Interscience.

[10] Hardy, G. H., & Wright, E. M. (2008). *An Introduction to the Theory of Numbers* (6th ed.). Oxford University Press.