

# Development of Software for Pico Satellite Position Calculation Using Orbital Mechanics

Edgar A. Manzano<sup>1</sup> 

<sup>1</sup>Universidad Privada del Norte, Perú, [edgar.manzano@upn.edu.pe](mailto:edgar.manzano@upn.edu.pe)

**Abstract**– *The tracking and control of picosatellites in ground stations remains a crucial topic within the rapidly advancing aerospace field. This research details the development of software based on Orbital Mechanics, Euler Rotation, and numerical methods to calculate the position of picosatellites, simulating the trajectory of artificial satellites in real time and displaying their position in geographic and Cartesian coordinates within a Software Development Interface (IDE). The obtained results were compared with the Satellite Tool Kit (STK) to evaluate the software's accuracy, showing that the Keplerian Orbital Elements had a maximum percentage error of 0.148607% and a minimum of 0.00001%, validating the implemented model's precision. During development, issues related to true anomaly and eccentricity were identified and corrected, optimizing the accuracy of orbital position calculations. The results demonstrate the software's feasibility for satellite tracking applications, facilitating the integration of autonomous systems in ground stations while providing a reliable solution for real-time satellite position tracking. Additionally, the methodology can be applied to improve the performance of ground station systems in picosatellite operations. The successful comparison with STK highlights the model's accuracy, showcasing its potential for future real-world satellite tracking applications.*

**Keywords:** *Satellite tracking, Orbital Mechanics, Picosatellites, Numerical Methods, Ground Station, Satellite Tool Kit (STK), Orbital Elements.*

# Desarrollo de un Software de Cálculo de Posición de Picosatélites utilizando Mecánica Orbital

Edgar A. Manzano<sup>1</sup> 

<sup>1</sup>Universidad Privada del Norte, Perú, [edgar.manzano@upn.edu.pe](mailto:edgar.manzano@upn.edu.pe)

**Resumen—** El seguimiento y control de picosatélites en estaciones terrenas sigue siendo un tema crucial dentro de la carrera aeroespacial que avanza rápidamente. Esta investigación detalla el desarrollo de un software basado en Mecánica Orbital, Rotación de Euler y métodos numéricos para calcular la posición de picosatélites, simulando la trayectoria de satélites artificiales en tiempo real y presentando su posición en coordenadas geográficas y cartesianas dentro de una Interfaz de Desarrollo de Software (IDE). Los resultados obtenidos se compararon con el Satellite Tool Kit (STK) para evaluar la precisión del software, mostrando que los valores de los Elementos Orbitales Keplerianos tuvieron un error porcentual máximo de 0.148607% y un mínimo de 0.00001%, lo que valida la exactitud del modelo implementado. Durante el desarrollo, se identificaron y corrigieron problemas relacionados con la anomalía verdadera y la excentricidad, optimizando la precisión del cálculo de las posiciones orbitales. Los resultados demuestran la viabilidad del software para aplicaciones de seguimiento satelital, facilitando la integración de sistemas autónomos en estaciones terrenas, ofreciendo una solución confiable para el seguimiento de la posición satelital en tiempo real. Además, la metodología puede aplicarse para mejorar el desempeño de los sistemas de estaciones terrenas en operaciones con picosatélites. La exitosa comparación con STK destaca la precisión del modelo, mostrando su potencial para futuros usos en aplicaciones de seguimiento satelital en el mundo real.

**Palabras clave:** Seguimiento satelital, Mecánica Orbital, Picosatélites, Métodos Numéricos, Estación Terrena, Satellite Tool Kit (STK), Elementos Orbitales.

## I. INTRODUCCIÓN

Actualmente, la carrera aeroespacial está experimentando avances significativos a nivel global, especialmente en el ámbito de los satélites artificiales, que proporcionan una variedad de servicios esenciales para la humanidad, desde telecomunicaciones hasta recolección de datos para investigación científica. Este crecimiento se refleja en la creciente inversión y desarrollo tecnológico en el sector [1].

Varios países de América Latina, como Argentina, Brasil, Chile, México y otros, han desarrollado sus propios satélites artificiales. Según un estudio sobre los programas espaciales en la región, Argentina y Brasil lideran en la fabricación de satélites y han alcanzado una masa crítica en infraestructura científica [1] [2]. Además, países como Perú han avanzado con proyectos como el PerúSAT-1, un satélite de observación terrestre lanzado en 2016 que ha fortalecido áreas como la agricultura, la gestión de desastres y el control de cultivos ilícitos [3].

La tecnología satelital se ha convertido en un pilar fundamental para el desarrollo industrial. Esto es crucial para optimizar la gestión de recursos y servicios, lo que puede resultar en un

aumento significativo en la producción y eficiencia. Un informe del Banco Mundial destaca cómo los satélites de observación terrestre contribuyen al desarrollo sostenible en varios países latinoamericanos [2]. Además, los avances tecnológicos han hecho que los satélites sean más accesibles económicamente, facilitando la transferencia de tecnología que permite a ingenieros y científicos locales desarrollar sistemas propios, como los picosatélites [4].

La necesidad de un sistema que permita rastrear la posición actual de los picosatélites es esencial para asegurar que las antenas de las estaciones terrenas puedan mantener contacto visual con estos módulos.

## II. METODOLOGÍA

Para observar un satélite artificial, es esencial que la estación de observación conozca su posición aparente en un momento específico, lo que permite dirigir los instrumentos de observación hacia él. La presentación de estas direcciones depende del instrumento utilizado y su tipo de montura. Por ejemplo, para un instrumento con montura ecuatorial, se requieren la ascensión recta y la declinación, o el ángulo horario y la declinación. Además, si el instrumento sigue al satélite, se necesita conocer la velocidad angular aparente y el ángulo de posición del vector velocidad [5] [6] [7].

Los sistemas de referencia son fundamentales para determinar la posición y el movimiento de los satélites. Estos sistemas permiten realizar mediciones precisas y definen parámetros específicos que describen las órbitas de los satélites. Para definir una órbita, se requieren dos elementos clave: la velocidad y la posición del satélite. En un espacio tridimensional, se necesitan al menos seis parámetros para describir completamente el movimiento orbital.

Los elementos orbitales son un conjunto de parámetros que permiten caracterizar las órbitas. El conjunto clásico, conocido como elementos keplerianos, incluye cuatro parámetros esenciales: el tamaño de la órbita, la forma de la órbita, la orientación y la localización del satélite. Aunque existen diferentes tipos de conjuntos de elementos, los elementos keplerianos son los más relevantes para las operaciones espaciales y son utilizados principalmente por analistas orbitales [8].

Para determinar la dirección aparente del satélite, es necesario conocer su posición en un sistema de referencia terrestre, expresada en coordenadas cartesianas geométricas  $(x, y, z)$  o en coordenadas geográficas  $(\lambda, \phi, H)$  donde  $\lambda$  es longitud,  $\phi$  es latitud y  $H$  es altitud. Se presentan dos problemas a resolver: primero, calcular las posiciones del satélite en función del tiempo (efemérides) a partir de los elementos orbitales;

segundo, determinar la dirección aparente del satélite a partir de estas efemérides, que variará según la estación de observación [5] [6] [7]. Los centros especializados proporcionan elementos orbitales medios para una época  $T_0$ , tales como: ascensión recta del nodo ascendente ( $\Omega$ ), argumento del perigeo ( $\omega$ ), inclinación de la órbita ( $i$ ), excentricidad de la órbita ( $e$ ) y anomalía media ( $M$ ).

#### A. Obtención de los Parámetros de la Órbita Genérica

En esta parte calcularemos la ecuación de la trayectoria del satélite artificial alrededor del planeta. Se partirá de las hipótesis dadas por Newton, bajo las cuales se verifican las leyes de Kepler.

- La masa del satélite  $m$  es despreciable en comparación con la masa de la Tierra  $M$ .
- El movimiento ocurre en espacio libre, esto es, los únicos cuerpos presentes son la Tierra y el satélite.

Comenzamos teniendo en cuenta un sistema de referencia como el mostrado en Fig. 1.

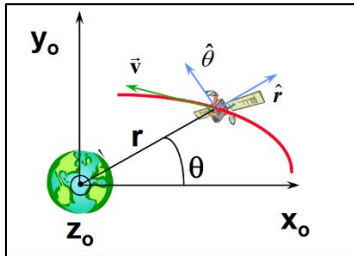


Fig. 1 Sistema de Coordenadas Referencial [9].

En el cual se presentan las siguientes variables:

- $\vec{v}$ : Velocidad del satélite artificial.
- $\hat{r}$ : Vector unitario radial.
- $\hat{\theta}$ : Vector unitario transversal.
- $r$ : Módulo del vector posición.
- $\theta$ : Ángulo del vector posición respecto al eje  $X_0$

Como el satélite orbita alrededor de la tierra (no cae hacia ella o escapa hacia el espacio), se deduce la siguiente igualdad:

$$F = -\frac{G \cdot M_E \cdot m}{r^2} \hat{r} = m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \quad (1)$$

- $M_E$ : Masa de la tierra
- $G$ : Constante de gravitación universal
- $k$ : Constante de Kepler
- $G = 6,672 \cdot 10^{-11} \text{ Nm/kg}^2$
- $k = GM_E = 3,9861352 \cdot 10^5 \text{ km}^2/\text{s}^2$

Por lo tanto, la expresión se reduce a la siguiente:

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + \hat{r} \frac{k}{r^2} = 0 \quad (2)$$

Multiplicamos vectorialmente por  $\vec{r}$ , es evidente que la expresión  $\hat{r} \frac{k}{r^2}$  se anulará, por lo tanto, se obtiene:

$$\vec{r} \times \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = 0 \quad (3)$$

Cuando se deriva la expresión  $\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt}$  con ayuda de (3), se obtiene como resultado 0, entonces concluimos que:

$$\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r} \times \vec{v} = \vec{h} = \text{constante} \quad (4)$$

Además,  $\vec{h}$  se le denomina momento angular orbital, como es constante implica que el satélite se está moviendo en una TRAYECTORIA PLANA.

Como se trata de tal, el problema se limitaría a encontrar la localización del satélite en un sistema de dos dimensiones.

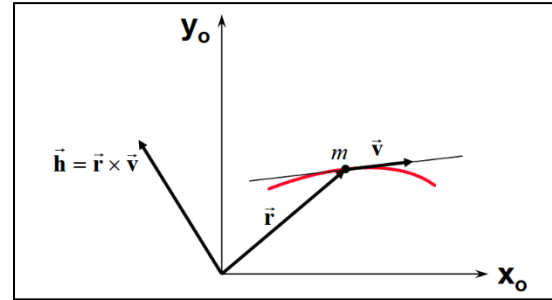


Fig. 2 Momento Angular del Satélite [9].

Ahora pasamos a encontrar la velocidad del satélite, derivando la posición:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d(r \cdot \hat{r})}{dt} = \frac{dr}{dt} \cdot \hat{r} + r \cdot \frac{d\hat{r}}{dt} \quad (5)$$

Utilizando de ayuda las coordenadas cartesianas, obtenemos la relación existente entre el vector unitario radial y el vector unitario transversal:

$$\frac{d\hat{r}}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \cdot \hat{\theta} \quad (6)$$

Por tanto, la velocidad quedaría de la siguiente manera:

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt} \cdot \hat{r} + r \cdot \frac{d\theta}{dt} \cdot \hat{\theta} \quad (7)$$

Reemplazando (7) en (3) y desarrollándose se obtiene el módulo del momento angular orbital:

$$h = cte = r^2 \cdot \frac{d\theta}{dt} \quad (8)$$

Esta expresión deduce la Ley de Áreas o Segunda Ley de Kepler.

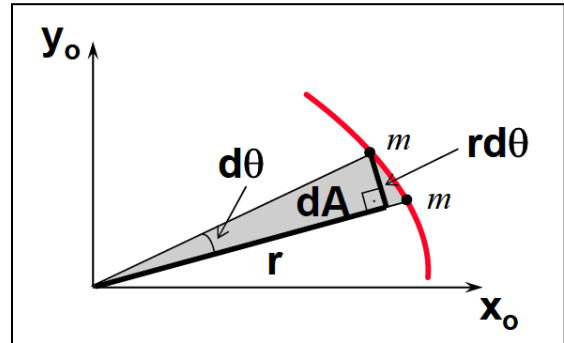


Fig. 3 Ley de Áreas [9].

Obtenemos el diferencial del área barrida por el radiovector de posición del satélite.

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} h = cte \quad (9)$$

Ahora pasamos a encontrar la aceleración derivando la última expresión de velocidad que teníamos en (7)

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \left( \frac{d^2r}{dt^2} - r \cdot \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right) \cdot \hat{r} + \left( 2 \cdot r \cdot \frac{d\theta}{dt} + r \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} \right) \cdot \hat{\theta} \quad (10)$$

Donde deducimos que la componente transversal debe tener un valor igual a 0 por que la aceleración tiene la misma dirección que la componente radial (considerando (3)) y por tanto la componente radial debe ser igual a  $-\frac{GM}{r^2}$ .

$$\frac{d^2r}{dt^2} - r \cdot \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 = -\frac{k}{r^2} \quad (11)$$

Para eliminar  $\theta$  de la ecuación, usaremos la expresión (8) de la ley de áreas:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{r^2} \quad (12)$$

Ahora sí con la nueva expresión (12) la reemplazamos en (11) para obtener lo siguiente:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{r^2} \cdot \frac{dr}{d\theta} = -h \cdot \frac{d}{d\theta} \left( \frac{1}{r} \right) \quad (13)$$

De (11) y (13) obtenemos:

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left( \frac{dr}{dt} \right) = -\frac{h^2}{r^2} \cdot \frac{d^2}{d\theta^2} \left( \frac{1}{r} \right) \quad (14)$$

Reemplazando (14) en (11), se obtiene la siguiente expresión:

$$-h^2 \cdot \frac{d^2}{d\theta^2} \left( \frac{1}{r} \right) - \frac{h^2}{r} = -k \quad (15)$$

Cambiando  $\frac{1}{r}$  por  $u$ , se obtiene una ecuación diferencial de segundo orden.

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{k}{h^2} \quad (16)$$

La solución será igual a la solución particular más la solución general. Por lo tanto, la solución será la siguiente:

$$\frac{1}{r} = u = \frac{k}{h^2} + C \cdot \cos(\theta - \theta_0) = \frac{k}{h^2} + C \cdot \cos\theta \quad (17)$$

Se trata de una expresión que representa una sección cónica en coordenadas polares, estando uno de los focos en el origen.

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} \cdot [1 + e \cdot \cos\theta] \quad (18)$$

La sección cónica que representa (18) dependerá del valor de  $e$  (excentricidad).

- $e > 1$ : hipérbola
- $e = 1$ : parábola
- $e < 1$ : elipse (caso de los planetas y los satélites de comunicaciones)

Por lo tanto, la Primera Ley de Kepler queda demostrada.

Entonces:

$$r = \frac{p}{1 + e \cdot \cos\theta} \quad (19)$$

Esta ecuación es nuestro resultado final, la posición del satélite en su plano orbital.

Donde:

- $p = \frac{h^2}{k}$
- $p = a(1 - e^2)$
- $\theta$ : Anomalía verdadera

Adicionalmente encontramos unos valores que nos servirán posteriormente, resolviendo el área de la elipse obtenemos:

- $A = \pi \cdot a \cdot b$
- $A = \frac{1}{2} \cdot h \cdot T$

Entonces, hallamos el periodo:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \frac{a^{3/2}}{k^{1/2}} \quad (20)$$

Lo cual demuestra la Tercera Ley de Kepler, y así encontramos un dato importante, la velocidad angular.

$$\eta_0 = \frac{2 \cdot \pi}{T} = \sqrt{\frac{k}{a^3}} \quad (21)$$

#### B. Determinación del Satélite en su Órbita

Para calcular la posición del satélite nos apoyaremos en una supuesta circunferencia de radio  $a$  (semieje mayor de la órbita) que por ende contendrá a la órbita elíptica del satélite.

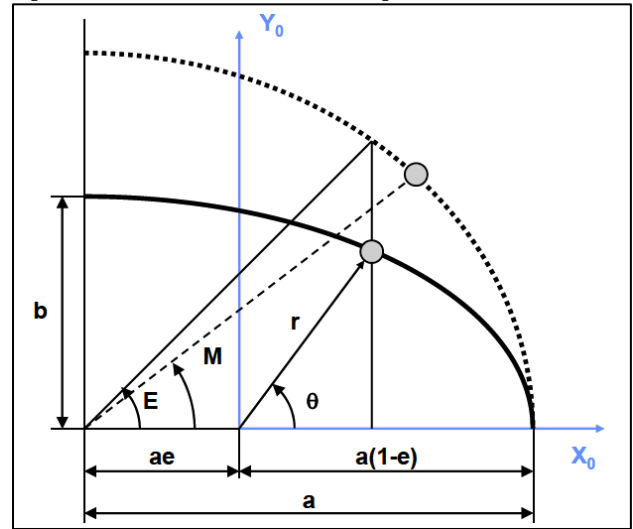


Fig. 4 Geometría para la determinación del satélite en la órbita [9].

Donde:

- $r$  : Distancia del satélite desde el centro de la Tierra que es el foco primario de la elipse
- $a$  : Semieje mayor de la órbita elíptica
- $b$  : Semieje menor de la órbita elíptica
- $\theta$  : Anomalía verdadera
- $M$  : Anomalía media
- $E$  : Anomalía excéntrica

Guiándonos por Fig. 4 encontramos las relaciones existentes entre los ángulos formados (anomalías verdadera y excéntrica).

$$a \cdot \cos E = c + r \cdot \cos\theta \quad (22)$$

De donde despejamos el valor de  $r$  en términos de  $E$ , esto gracias a la (19):

$$r = a(1 - e \cdot \cos E) \quad (23)$$

Derivando (23), obtenemos la siguiente relación para  $E$ :

$$E - e \cdot \sin E = \sqrt{\frac{k}{a^3}} \cdot (t - t_p) \quad (24)$$

Teniendo en cuenta que  $M$  (anomalía media), es el supuesto ángulo formado en el hipotético caso que el satélite se mueva a una velocidad constante, es que encontramos una relación entre  $M$  y el valor de la velocidad angular  $\eta_0$ ,

$$M = \eta_0 \cdot (t - t_p) \quad (25)$$

Por ende, concluimos en la siguiente igualdad:

$$M = E - e \cdot \text{sen} E \quad (26)$$

Ahora hay que tener en cuenta que  $r$  y  $\theta$  son los valores de las coordenadas polares de la posición del satélite en su órbita elíptica, tenemos que hacer una pequeña conversión para obtener el valor de sus coordenadas cartesianas.

$$x = r \cdot \cos \theta \quad (27)$$

$$y = r \cdot \text{sen} \theta \quad (28)$$

$$z = 0 \quad (29)$$

### C. Localización del Satélite respecto a la Tierra

Una vez determinada la posición del satélite dentro de la órbita, el siguiente paso es calcular la orientación de la órbita respecto a la tierra, en pocas palabras tenemos que pasar estas coordenadas al sistema de referencia GEO (coordenadas geométricas).

Para poder pasar al sistema de referencia GEO, será necesaria la siguiente matriz de transformación, la cual contará con los valores del argumento del perigeo, ascensión recta al nodo ascendente y la inclinación de la órbita; que son los parámetros que definen la orientación de la órbita. (Ángulos de Euler)

$$[T]^{F,GEO} = C_3(w) \cdot C_1(i) \cdot C_3(\Omega) \quad (30)$$

Obviamente tendremos que realizar la siguiente operación:

$$[r]^{GEO} = ([T]^{F,GEO})^{-1} [r]^F \quad (31)$$

Donde  $F$  indica el sistema de referencia que estábamos usando en las secciones anteriores y GEO el sistema de referencia real que tiene por centro a la Tierra.

A continuación, detallaremos el valor de las matrices mencionadas en la expresión (30), para poder obtener su valor, se trata de tres matrices de rotación, cada una toma en cuenta a uno de los parámetros que definen la orientación de la órbita. Primeramente, está la matriz de rotación de Euler para el argumento del perigeo:

$$C_3(w) = \begin{pmatrix} \cos w & \text{sen} w & 0 \\ -\text{sen} w & \cos w & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (32)$$

A continuación, se encuentra la matriz de rotación de Euler para la inclinación:

$$C_1(i) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & \text{sen} i \\ 0 & -\text{sen} i & \cos i \end{pmatrix} \quad (33)$$

Finalmente, la matriz de rotación de Euler para la ascensión recta del nodo ascendente:

$$C_3(\Omega) = \begin{pmatrix} \cos \Omega & \text{sen} \Omega & 0 \\ -\text{sen} \Omega & \cos \Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (34)$$

Teniendo en cuenta todas estas expresiones se podrá encontrar el valor de las coordenadas cartesianas GEO para el satélite artificial, el siguiente paso es encontrar los valores de Latitud, Longitud y Elevación del satélite, para poder ubicarlos respecto a la estación terrena.

### D. Obtención de las Ecuaciones de Latitud, Longitud y Altitud del Satélite para su ubicación respecto a la Estación Terrena

A continuación, vamos a encontrar la relación existente entre los valores de la latitud, longitud y altitud de un satélite artificial con sus coordenadas del sistema de referencia GEO.

El sistema de referencia GEO, o sistema de coordenadas geocéntrico-ecuatorial, es aquel que normalmente se emplea para los vehículos que orbitan alrededor de la Tierra, se define por los siguientes parámetros:

**Origen:** el centro de la Tierra (de ahí el nombre de geocéntrico).

**Plano fundamental:** el ecuador terrestre (de ahí el nombre de geocéntrico-ecuatorial), donde el eje perpendicular al plano fundamental es la dirección del Polo Norte.

**Dirección principal:** dirección del equinoccio Vernal (Y), o lo que es lo mismo, el vector que apunta a la constelación zodiacal de Aries y se obtiene dibujando una línea desde la Tierra hasta el Sol, en el primer día de la primavera. Desafortunadamente la dirección del equinoccio vernal no es perfectamente constante, debido a que tanto el Sol como la Tierra se mueven a lo largo de la galaxia.

**Tercer eje:** se obtiene empleando la regla de la mano derecha.

Teniendo en cuenta lo anteriormente mencionado pasamos a establecer las relaciones correspondientes, tal como se muestra en Fig. 5.

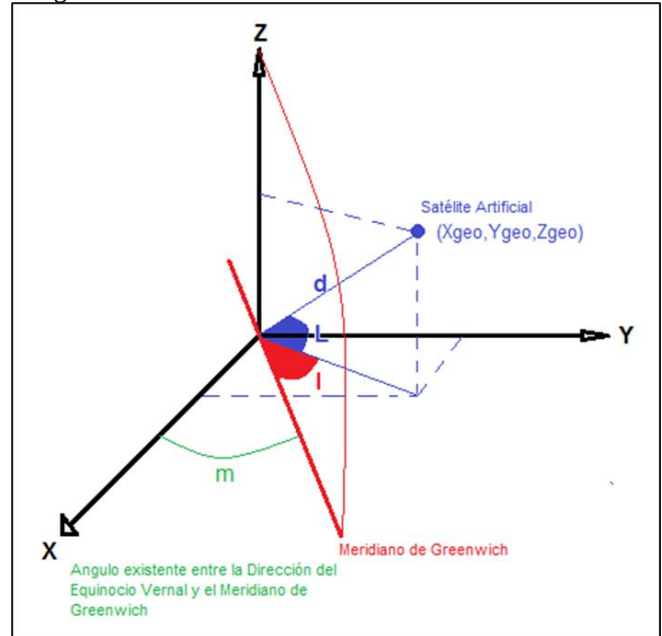


Fig. 5 Meridiano de Greenwich en las Coordenadas GEO

Tenemos las coordenadas GEO:  $(X_{geo}, Y_{geo}, Z_{geo})$  y queremos conseguir las coordenadas geográficas de Latitud, longitud y altitud  $(\lambda, \varphi, H)$  (en el gráfico la Latitud viene representada por  $L$ , la longitud por  $l$  y además se muestra la distancia  $d$  en lugar de la altura).

Como no conocemos la Dirección del Equinoccio Vernal exacta, establecemos un ángulo  $m$  existente entre ésta y la

intersección entre el Meridiano de Greenwich y el plano Ecuatorial, ángulo que luego será descubierto con ayuda del mismo Satellite Tool Kit (STK).

Ahora pasamos a establecer las ecuaciones correspondientes en función al gráfico:

Primeramente, para la longitud:

$$\lambda = \left( \tan^{-1} \left( \frac{y_{geo}}{x_{geo}} \right) \right) - m \quad (35)$$

A continuación, la latitud:

$$\varphi = \tan^{-1} \left( \frac{z_{geo}}{\sqrt{y_{geo}^2 + x_{geo}^2}} \right) \quad (36)$$

Y por último la altitud o elevación del satélite artificial:

$$H = d - re \quad (37)$$

Donde  $d$  es la distancia entre el centro de la tierra y el satélite artificial y  $re$  es la medida del radio terrestre ecuatorial.

Con estas fórmulas ya es posible encontrar el valor de las coordenadas geográficas del satélite, y a partir de esto determinar si existe o no visibilidad entre la estación terrena y el módulo espacial, el único inconveniente sería el valor de  $m$  que variará conforme el tiempo vaya pasando debido al movimiento de rotación de la Tierra.

Usando (35) encontraremos el valor de  $m$  para un instante de tiempo en particular: 8 de septiembre del 2012 a horas 19:00:00:000. Todo esto con ayuda del Satellite Tool Kit.

Recordamos que uno de los seis parámetros orbitales keplerianos va muy relacionado con la dirección hacia el punto Vernal, se trata de la Ascensión Recta al Nodo Ascendente ( $\Omega$ ) que es el ángulo formado entre la dirección hacia el punto Vernal y la recta de intersección entre la órbita del satélite y el plano ecuatorial.

Teniendo en cuenta toda la teoría de los parámetros orbitales keplerianos, elegimos valores para los cuales el satélite artificial se encontraría exactamente en la intersección del Meridiano de Greenwich y el Plano Ecuatorial, de tal forma que con ayuda del Satellite Tool Kit, que muestra la Latitud, Longitud y Altitud del cuerpo, podremos encontrar el valor de  $m$  para el instante de tiempo mencionado.

Los valores iniciales asignados para los parámetros orbitales keplerianos son los siguientes:

- $a = 7000 \text{ km}$ , solamente necesitamos que este valor sea mayor al radio ecuatorial.
- $e = 0$ , trabajamos con una órbita circular.
- $i = 30^\circ$ , le damos una inclinación, no es de relevancia, porque los 3 últimos parámetros marcarán la ubicación del satélite en el Meridiano de Greenwich.
- $w = 0^\circ$ , asignamos este valor para que no exista espacio entre el Perigeo de la órbita y el Nodo Ascendente.
- $\Omega = 0^\circ$ , este valor asegura que la órbita cruce exactamente por el Nodo Ascendente en el Plano Ecuatorial.
- $v = 0^\circ$ , este valor asegura que el satélite se encuentra en el Nodo Ascendente, que tiene la dirección hacia el punto Vernal (condición inicial).

Para tal efecto, el Satellite Tool Kit arrojó el siguiente valor para la longitud:

$$\lambda = 86,925^\circ$$

Por lo tanto, con ayuda de (35):

$$m = -86,925^\circ, \text{ para el } 08/09/2012 \text{ } 19:00:00:000 \quad (38)$$

Se considera el instante exacto, porque con el movimiento de rotación el valor de  $m$ , comenzaría a variar (algo a tener en cuenta al momento de diseñar el software). El valor de  $m$  según la relación existente entre una rotación completa de la Tierra ( $360^\circ$ ) y la duración de un día sidéreo (23 horas, 56 minutos y 4,0905 segundos; tiempo que tarda la Tierra en dar una vuelta completa sobre sí misma), solamente después de un día sidéreo, el valor de  $m$  volverá a ser el mismo.

Se considera el instante exacto, porque con el movimiento de rotación el valor de  $m$ , comenzaría a variar (algo a tener en cuenta al momento de diseñar el software). El valor de  $m$  según la relación existente entre una rotación completa de la Tierra ( $360^\circ$ ) y la duración de un día sidéreo (23 horas, 56 minutos y 4,0905 segundos; tiempo que tarda la Tierra en dar una vuelta completa sobre sí misma), solamente después de un día sidéreo, el valor de  $m$  volverá a ser el mismo.

#### B. Visibilidad del satélite artificial desde la estación terrena

El último de los aspectos, y no por eso el menos importante, de todas maneras, tendría que ser el conocimiento de si el satélite artificial se encuentra visible para la estación terrena y a que orientación se encuentra éste.

Para poder conocer si existe o no línea de vista entre el satélite y la estación terrena se utilizarán sus coordenadas geométricas de ambos.

Primeramente, analizamos Fig. 6 para una mejor comprensión del caso.

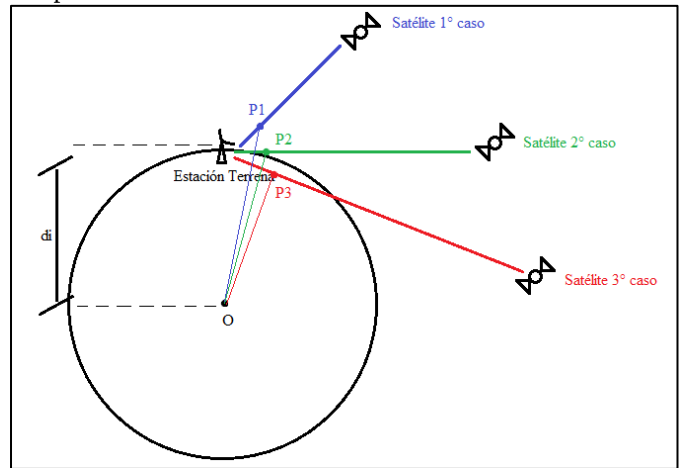


Fig. 6 Visibilidad del Satélite Artificial

Como se puede apreciar, se establece una distancia  $di$  entre el centro de la tierra y el punto donde se encuentra la estación terrena (en el software se piden sus coordenadas geográficas), el cual se transformará a coordenadas cartesianas para un mejor trabajo.

Algo importante, dentro del software es que dentro de la Sección Antena del Segundo Formulario (señalado en la parte de IDE), se encuentran dos datos importantes que son la Visibilidad y la Posición que tendrá que asumir la antena para establecer línea de vista con el satélite artificial.

Las coordenadas de Posición de la Antena se basan en el sistema de coordenadas geométricas (GEO), para un mejor trabajo, señalando el vector unitario de la dirección que debe de asumir la antena. (La dirección simplemente resultará de la sustracción del punto de posición del satélite y el punto de posición de la estación terrena).

Retomando nuevamente la figura, se aprecian tres casos para las distintas posiciones del satélite, los dos primeros casos si establecen línea de vista, el tercero no.

Se señalan tres puntos:  $P_1, P_2, P_3$ ; que serán los puntos resultantes del desplazamiento de la posición de la estación terrena gracias a los vectores unitarios de Posición de la Antena, generados para cada uno de los tres casos mostrados en Fig. 6. (Los vectores unitarios se multiplicarán por 10 para que se trate de unos números más significativos).

Por simple inspección en el 1° y 2° caso (donde el satélite es visible), las distancias  $\overline{OP_1}$  y  $\overline{OP_2}$  son mayores a  $d_i$ , y en el 3° caso (donde el satélite no es visible), la distancia  $\overline{OP_3}$  es menor a  $d_i$ .

Por lo tanto, el procedimiento sería el siguiente para una Estación Terrena de Posición  $Q_1$  y un Satélite de Posición  $Q_2$ , considerando como centro de la tierra el punto  $O$ .

Se halla la DIRECCIÓN DE LA ANTENA bajo el vector unitario  $\hat{q}$ .

$$\hat{q} = \frac{\overline{Q_1Q_2}}{|\overline{Q_1Q_2}|} \quad (39)$$

Se establece un punto imaginario  $Q_3$  que resulta ser el desplazamiento de la estación terrena gracias al vector unitario  $\hat{q}$  multiplicado diez veces.

$$Q_3 = Q_2 + 10\hat{q} \quad (40)$$

Ahora se compara la distancia de  $O$  hacia  $Q_1$  y hacia  $Q_3$ .

*Si  $\overline{OQ_3} > \overline{OQ_1}$  entonces SI EXISTE VISIBILIDAD*  
*Si  $\overline{OQ_3} \leq \overline{OQ_1}$  entonces NO EXISTE VISIBILIDAD*

Ahora si podemos comenzar con el desarrollo del software.

#### IV. DESARROLLO DEL SOFTWARE

##### A. Área de Estudio

La investigación se desarrolló considerando como estación terrena el Laboratorio de Cómputo de la Escuela de Ingeniería Electrónica de la Universidad. Esta locación se encuentra a una latitud de  $15^\circ 49' 27.10''$  Sur y una longitud de  $70^\circ 1' 4.02''$  Oeste.

##### B. Diseño de la IDE

Como primera parte de la implementación del software, es el diseño de su IDE, bajo el cual tendrá que trabajar el operario de la estación terrena encargado de entablar la comunicación

pertinente con el satélite artificial (en nuestro caso el picosatélite).

Nos basamos en una IDE similar al del STK 9. Fig. 7 muestra la ventana de Orbit Wizard. Todo el trabajo se desarrolló en entorno de desarrollo Delphi que utiliza el lenguaje Object Pascal.

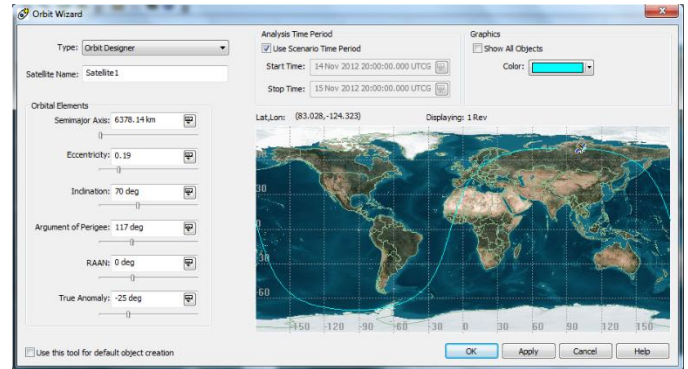


Fig. 7 IDE de Orbit Wizard, Satellite Tool Kit (STK 9)

Como se puede apreciar, una vez que elegimos el Tipo Diseñador de Orbitas, encontramos para establecer los valores de los Elementos Orbitales (Keplerianos), también encontramos el análisis del periodo de tiempo, así como una pequeña opción para el gráfico.

El Proyecto desarrollado se divide en dos Formularios, el primer formulario contiene el ingreso de los datos esenciales para el Software, datos como los Elementos Orbitales Keplerianos, Tiempo Inicial, el Instante de Tiempo a Analizar, así como los botones que realizan el proceso de cálculo y simulación.



Fig. 8 Primer Formulario del Software

La primera parte del primer formulario (mostrado en Fig. 8), contendría el espacio para ingresar los elementos orbitales (keplerianos), en el cual ya se muestra los valores predeterminados para cada elemento orbital, y también se muestran en sus respectivas unidades.

A continuación, se encuentra la sección que contiene el análisis de tiempo, contiene el espacio para colocar tiempo inicial (que se estaría trabajando), así como el tiempo actual (el mismo que el de la PC). Se aprecia que los valores iniciales para horas, minutos y segundos se encuentran en 0, así como los

valores iniciales para días y meses en uno, el valor de años se halla en 2000; todos estos valores predeterminados.

Como una ha podido darse cuenta, en las dos partes anteriores, en ambas se encuentran los botones Validar (ya sea Valores o Tiempo Inicial), estos botones aseguran que los valores escritos se encuentran listos para ser usados en el cálculo de coordenadas geográficas y para el inicio de la simulación, y por ende activan el botón de Cálculo de Coordenadas y el botón de Inicio de la Simulación que se encuentra separado de las demás secciones del primer formulario.

La siguiente sección corresponde al Cálculo de Coordenadas Geográficas del Satélite en un Instante de Tiempo (mostrada en Fig. 9). Al igual que en la sección anterior los valores del Instante de Tiempo se encuentran predeterminados bajo los mismos. De esta manera pasamos a la identificación del segundo formulario, que es aquel que muestra la simulación, este formulario solo aparece en el caso que se active el botón de Inicio de Simulación, botón que se encuentra en el primer formulario.

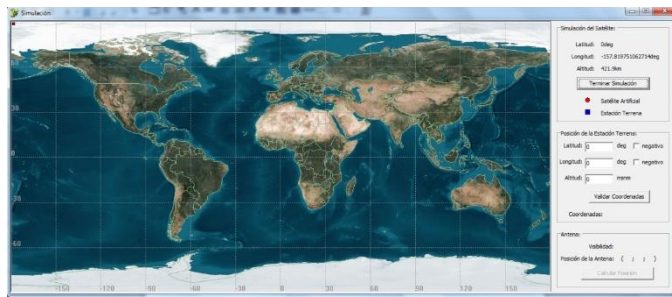


Fig. 9 Segundo Formulario del Software.

La primera sección corresponde a la Simulación del Satélite (se encuentran sus coordenadas geográficas en tiempo real), para eso se usa el Tiempo Actual de la sección de Análisis de Tiempo, así como los elementos orbitales anteriormente definidos.

La siguiente sección es en la cual se establece las coordenadas geográficas de la Estación Terrena, bajo la cual se obtendrá la afirmación de si existe visibilidad, y que posición debería de tener la antena para entablar comunicación.

La siguiente sección, es la referida a la Antena, su visibilidad y posición recomendada. Su botón solo se activa en el caso que se hayan validado las coordenadas de la posición de la Estación Terrena.

## V. CÁLCULO DE COORDENADAS

Esta operación solo se puede realizar mediante la utilización del botón Calcular Coordenadas, que solo se habilita cuando se presionan los botones de Validar Valores (de la Sección Elementos Orbitales Keplerianos) y Validar Tiempo Inicial (de la Sección Análisis de Tiempo), todo esto dentro del Primer Formulario.

Este proceso resulta ser bastante amplio, es por eso que se detallará por partes.

### A. Primera Etapa: Análisis del Instante de Tiempo

Primeramente, se leen los valores escritos en la sección de Coordenadas Geográficas del Satélite en un Instante de Tiempo y se validan.

### B. Segunda Etapa: Diferencia entre el Instante de Tiempo y el Tiempo Inicial

Se halla la diferencia en segundos entre el Instante de Tiempo (Sección Coordenadas Geográficas del Satélite en un Instante de Tiempo) y el Tiempo Inicial (Sección Análisis de Tiempo), para ayudarse en la fecha, se utiliza la fecha arbitraria 01/01/2000.

Todo este procedimiento se da para encontrar la variable “Dif\_sat”, la cual muestra la cantidad de segundos transcurridos desde el momento en el cual se tomaron los elementos orbitales (Tiempo Inicial) hasta el Instante a Analizar, posteriormente este dato se usará para saber cuántas vueltas dio el satélite a la tierra en ese lapso, y cuantos segundos transitó desde el último momento en el cual se encontraba en la misma posición del Tiempo Inicial. (Recuérdese que la órbita del satélite es fija e invariable, lo que varía su posición es la rotación de la Tierra).

### C. Tercera Etapa: Diferencia entre el Instante de Tiempo y el 08/09/2012 19:00:00

Dado el caso de que lo que variará la posición del satélite respecto a la Tierra será la rotación de la misma, es necesario saber cuántos segundos (y por ende también grados) se ha movido la Tierra desde el momento en el cual obtuvimos el valor del ángulo  $m$ , que es aquel formado entre la línea del nodo ascendente y la línea que une el centro de la Tierra con la intersección de la Línea Ecuatorial y el Meridiano de Greenwich, para conocer su nuevo valor y encontrar de manera correcta las coordenadas geográficas del Satélite Artificial. Es por eso que hallamos la diferencia entre el Instante de Tiempo a analizar y el 08/09/2012 a horas 19:00:00 que es el momento en el cual se halló el valor de  $m$ . (Se muestra en la ecuación 38).

$$m = -86,925^\circ, \text{ para el } 08/09/2012 \text{ } 19:00:00:000$$

### D. Cuarta Etapa: Cálculo del nuevo ángulo $m$

Primeramente, se leen los valores escritos en la sección de Coordenadas Geográficas del Satélite en un Instante de Tiempo y se validan.

La Tierra tarda exactamente 23 horas, 56 minutos y 4,0905 segundos en completar una rotación completa, lo cual implica que gira  $360^\circ$  alrededor de su eje.

Justamente esta relación entre segundos y grados es la que usaremos para encontrar el nuevo valor de  $m$  con ayuda de la variable encontrada “Dif\_ear” que representa el tiempo transcurrido desde el momento que calculamos el valor inicial de  $m$ , de acuerdo a (38).

### E. Quinta Etapa: Cálculo de la Anomalía Media

En esta etapa del procedimiento encontramos el Valor de la Anomalía Media, parámetro importante para poder hallar la

Anomalía Excéntrica, que junto a la Excentricidad y el Semieje Mayor arroja las Coordenadas del Satélite en su Plano Orbital.

Para hallar el valor de la Anomalía Media nos basamos en las ecuaciones previamente indicadas:

- Primero la Ecuación (20) del Periodo del Satélite Artificial.
- Segundo la Ecuación (21) de la Velocidad Angular a partir del Periodo.
- Tercero la Ecuación (25) de la Anomalía Media a partir de la Velocidad Angular.

El otro factor mencionado en esta ecuación ( $t - t_p$ ) se refiere al tiempo transcurrido desde que se tomó el valor de los Elementos Orbitales Keplerianos hasta el Instante de Tiempo a Analizar, en pocas palabras nuestra variable “Dif\_sat”, encontrada en la segunda parte. Obviamente este número al ser muy grande implica dentro de él varias vueltas del satélite alrededor de la tierra, así que si queremos hallar el nuevo ángulo formado (Anomalía Media), tendremos que restarle todo lo que representa vueltas alrededor de la Tierra (el Múltiplo más cercano del Periodo del Satélite).

#### F. Sexta Etapa: Cálculo de la Anomalía Excéntrica

Como se mencionó dentro del Marco Teórico, para encontrar el valor de la Anomalía Excéntrica a partir de la Anomalía Media, se usa el Método de Newton-Raphson que es un procedimiento iterativo apropiado para el desarrollo de un Software, la ecuación que los relaciona es la (26).

Y el Método de Newton-Raphson marca lo siguiente:

$$x_{j+1} = x_j - \frac{f(x_j)}{f'(x_j)}$$

Donde  $x$  sería  $E$  y el valor inicial de  $E$  sería  $M$ , trabajamos con una tolerancia (precisión) de 0,001. Quedando la expresión de la siguiente forma:

$$E = \frac{M - e(E \cos E - \sin E)}{1 - e \cos E} \quad (41)$$

#### G. Séptima Etapa: Cálculo de las Coordenadas del Satélite para su Plano Orbital

Para encontrar el valor de las coordenadas del Satélite en su Plano Orbital, es necesario encontrar una ecuación para  $r$  y  $\theta$  en términos de  $E$ .

Para tal caso usamos las siguientes ecuaciones (22) y (23). La ecuación (23) muestra el valor de  $r$  en términos de  $E$ , y con ayuda de la ecuación (22) despejamos el valor de  $\theta$  en términos de  $E$ .

$$\theta = \cos^{-1} \left( \left( \frac{1}{e} \right) \times \left( 1 - \frac{1-e^2}{1-e \cos E} \right) \right) \quad (42)$$

La siguiente parte es encontrar las coordenadas del satélite en su Plano Orbital. Todo este procedimiento (ecuaciones 22, 41, 27, 28 y 29) lo realizamos en el Software.

#### H. Octava Etapa: Cálculo de las Coordenadas GEO del Satélite

Para calcular el valor de las coordenadas GEO a partir de las coordenadas del Satélite en su plano orbital se usa las ecuaciones (31), (32), (33) y (34) de Rotación de Euler.

#### I. Novena Etapa: Cálculo de las Coordenadas Geográficas del Satélite

Una vez obtenidas las coordenadas geométricas o GEO, se pueden obtener las coordenadas geográficas con ayuda de las ecuaciones (35), (36) y (37).

Donde  $d$  es la distancia del satélite hacia el centro de la tierra y tiene la siguiente expresión:

$$d = \sqrt{X_{geo}^2 + Y_{geo}^2 + Z_{geo}^2}$$

Como ya tenemos el nuevo valor de  $m$  de la Cuarta Etapa. Con eso el proceso se encuentra concluido.

### VI. SIMULACIÓN DEL RECORRIDO

El proceso de simulación del recorrido de un satélite artificial se dará gracias al botón Iniciar Simulación que se encuentra en el Primer Formulario (Fig. 8) y solamente se activa cuando se activan los botones Validar Valores y Validar Tiempo Inicial, al igual que el proceso de Calcular Coordenadas.

El Botón de Iniciar Simulación muestra el Segundo Formulario de Simulación (Fig. 9) el cual al mostrarse habilita al Temporizador que realiza la operación de calcular las coordenadas geográficas cada segundo, mostrándolas de forma escrita y también de forma gráfica dentro del Segundo Formulario.

Como también se calculan las coordenadas, el procedimiento es similar a la sección IV, las diferencias son que no existe análisis de tiempo y en la última etapa se aumenta el hecho de mostrar las coordenadas geográficas gráficamente.

### VII. RESULTADOS

#### A. Error Porcentual de Cálculo

Analizamos los resultados del Cálculo de Coordenadas para un instante de tiempo para 30 casos diferentes de elementos orbitales, tanto en el Software diseñado y también en el Satellite Tool Kit, en todos los casos trabajamos con la fecha del 20/11/2012 a horas 20:00:00.

Luego se determinó diferentes errores porcentuales para cada caso, el mayor error porcentual obtenido en esta muestra de 30 casos es de 0.148607%, y el menor error porcentual obtenido es de 0.00001%, que se da en el caso donde la excentricidad es igual a 0, ya que para este valor muchas partes de las ecuaciones se simplifican automáticamente de tal forma que se reduce el error por coma flotante que posee el desarrollo del software.

Para conseguir este grado de exactitud (aproximadamente 99.9257 %  $\pm$  0.0743%), se encontraron algunas dificultades, a continuación, las nombramos y detallamos como es que fueron solucionadas.

### B. Problema de la Anomalía Verdadera

Se identificó un error significativo en los casos donde la anomalía verdadera tenía valores altos, ya que no se consideraba en el procedimiento de cálculo de la posición del satélite. Aunque su valor solo debía servir como referencia para la verificación de resultados, su omisión en metodología generaba inconsistencias debido a que no se tenía en cuenta el tiempo transcurrido desde que los datos fueron tomados hasta el perigeo.

Para corregir esto, se calculó el tiempo entre el instante en que se registraron los datos (Tiempo Inicial) y el momento en que el satélite estaba en el perigeo, utilizando las ecuaciones de manera inversa.

### C. Problema de Excentricidad

Otro problema que generaba errores en el programa ocurría cuando la excentricidad tomaba el valor de 0, ya que la siguiente ecuación (42) producía un valor infinito.

Aunque matemáticamente el valor se reduce a 0, el software no podía deducirlo debido a la presencia de  $1/e$ . Para solucionar esto, se implementó una excepción cuando la excentricidad era 0, de modo que el programa asignara automáticamente un ángulo de 0.

## VIII. CONCLUSIONES

La investigación confirmó que la Mecánica Orbital es una herramienta eficaz para el desarrollo de software de cálculo de órbitas y trayectorias de satélites. Sin embargo, el uso de distintos Sistemas de Referencia hace el trabajo más ordenado, pero también más complejo, requiriendo conocimientos de Mecánica Clásica.

La simulación consistió en una ejecución repetitiva del procedimiento de cálculo, representando gráficamente la posición del módulo dentro de la IDE. En el diseño del IDE, se identificó la necesidad de evitar órbitas que intercepten la superficie terrestre, lo que no es trivial, ya que altas excentricidades pueden generar este problema incluso con un gran semieje mayor.

Los resultados obtenidos para diferentes valores de los Elementos Orbitales Keplerianos fueron comparados con los del Satellite Tool Kit, encontrándose un error porcentual máximo de 0.148607% y un mínimo de 0.00001%, lo que demuestra una alta precisión del software.

Como trabajos futuros se pueden considerar los siguientes:

- *Migración y Modernización del Software:* Reimplementar el sistema en lenguajes modernos (Python, C++ o MATLAB) para mejorar su eficiencia y facilitar la integración con herramientas actuales.
- *Inclusión de Perturbaciones Orbitales:* Incorporar modelos avanzados que consideren el achatamiento terrestre (armónico  $J_2$ ), efectos de arrastre atmosférico

en órbitas bajas (LEO) y perturbaciones por presión de radiación solar y gravitación de terceros cuerpos.

- *Validación con nuevas fuentes de datos reales:* como Two-Line Elements (TLEs) de satélites operativos para comparar resultados con observaciones empíricas.
- *Enfoque en Aplicaciones para Picosatélites:* optimizar el software para misiones con CubeSats, incluyendo simulación de órbitas sincrónicas al Sol (SSO) y dinámica de actitud (rotación + traslación acopladas).

## REFERENCIAS

- [1] J. Guzmán, "Programas espaciales en América Latina: Historia, operaciones actuales y cooperación futura". Revista Fuerza Aérea-EUA, vol. 3, no 3, pp. 22-42, 2021.
- [2] J. Gocłowska-Bolek and D. Blinder, "La investigación espacial en latinoamérica: Cooperación y desarrollo", Papeles de Trabajo, vol. 1, no 2, 2018.
- [3] H. W. Eche, G. A. Espinoza, F. R. Saico and J. R. Zúñiga, "El satélite peruano PeruSAT-1: potencial de aplicaciones para el sector público", MsC Thesis, ESAN Graduated School of Business, Perú, 2019
- [4] R. A. Santa, B. R. Moreno and C. L. Adames, "Arquitectura y diseño de software para picosatélites orientado al monitoreo y predicción del comportamiento de incendios forestales (CAFO-2019)", Ciencia y Poder Aéreo, vol. 19, no 2, pp. 81-94, 2024.
- [5] M. M. Jiménez, "Estudio de las perturbaciones de las órbitas satelitales", Technical Report, Applied Physics Dep., Universidad de Valladolid, España, 2015.
- [6] G. Pou, "Comparativa de Diferentes Tipos de Efemérides GNSS en Cálculo de Grandes Líneas base con Magnet Office", Universidad Politécnica de Madrid, España, 2016.
- [7] R. Parra and M. J. Sevilla, "Cálculo de Efemérides y previsiones de pasos de satélites geodésicos", Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid, Tomo LXVII, Cuaderno Tercero, Madrid, 1973.
- [8] Ordnance Survey, "A Guide to Coordinate Systems in Great Britain: An introduction to mapping coordinate systems and the use of GNSS datasets with Ordnance Survey mapping", Ver. 3.6, Ordnance Survey, UK, 2020.
- [9] ETSIT-UPM, "Comunicaciones por Satélite: Guía de asignatura". Madrid: Universidad Politécnica de Madrid, 2012.