Didactic applications of the Gamma and Beta Function in Analysis, Physics and Statistics

Ruben Dario Mendoza Arenas, Dr.[1][https://orcid.org/0000-0002-7861-7946], Marisol Paola Delgado Baltazar, Mg.[1][https://orcid.org/0000-0002-0278-9557], Jorge Luis Rojas Orbegoso, Mg.[1][https://orcid.org/0000-0002-5688-4963], Ana María Holgado Quispe, Dr.[2][https://orcid.org/0000-0002-7510-9188], Miriam del Rosario Cajahuanca Loli, Mg.[1][https://orcid.org/0000-0002-1364-6084] , César Ángel Durand Gonzáles, Dr.[1][https://orcid.org/0000-0002-2148-5903], Frank Duberlee Álvarez Huertas, Dr.[3][https://orcid.org/0000-0003-2835-1681] [1]Universidad Nacional del Callao, Perú, rdmendozaa@unac.edu.pe, mpdelgadob@unac.edu.pe, jlrojaso@unac.edu.pe, mdrcajahuancal@unac.edu.pe, cadurandg@unac.edu.pe

[2]Universidad Tecnológica del Perú, Perú, c22302@utp.edu.pe

[3]Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Perú, falvarezh@unmsm.edu.pe

Abstract-The GAMMA FUNCTION is defined, studying its convergence and its properties, and then giving applications to the development of physical problems, development of integrals, problems using Laplace transforms, as well as the applications of the Gamma function in the calculation of hope and variance of Gamma Distribution that are part of Statistics and Probability Calculation. Also Applications are given to the calculation of fractional derivatives.

Keywords: Gamma function, beta function, improper integral, gamma function applications.

Aplicaciones didácticas de la Función Gamma y Beta en el Análisis, la Física y la Estadística

Ruben Dario Mendoza Arenas, Dr.[1][https://orcid.org/0000-0002-7861-7946], Marisol Paola Delgado Baltazar, Mg.[1][https://orcid.org/0000-0002-0278-9557], Jorge Luis Rojas Orbegoso, Mg.[1][https://orcid.org/0000-0002-5688-4963], Ana María Holgado Quispe, Dr.[2][https://orcid.org/0000-0002-7510-9188], Miriam del Rosario Cajahuanca Loli, Mg.[1][https://orcid.org/0000-0002-1364-6084] , César Ángel Durand Gonzáles, Dr.[1][https://orcid.org/0000-0002-2148-5903], Frank Duberlee Álvarez Huertas, Dr.[3][https://orcid.org/0000-0003-2835-1681] [1]Universidad Nacional del Callao, Perú, rdmendozaa@unac.edu.pe, mpdelgadob@unac.edu.pe, jlrojaso@unac.edu.pe, mdrcajahuancal@unac.edu.pe, cadurandg@unac.edu.pe

[2]Universidad Tecnológica del Perú, Perú, c22302@utp.edu.pe

[3]Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Perú, falvarezh@unmsm.edu.pe

Resumen-Se define la FUNCIÓN GAMMA, estudiando su convergencia y sus propiedades, para luego dar aplicaciones al desarrollo de problemas físicos, desarrollo de integrales, problemas usando transformadas de Laplace, así como tambien se ve las aplicaciones de la función Gamma en el cálculo de la esperanza y la varianza de la Distibución Gamma que son parte de la Estadística y el Cálculo de Probabilidades. También se dan aplicaciones al cálculo de derivadas fraccionarias.

Palabras clave: Función Gamma, función beta, integral impropia, aplicaciones de la función gamma.

I. INTRODUCCIÓN

La FUNCIÓN GAMMA fue creada por el matemático suizo Leonhard Euler, el cual había desarrollado trabajos afines sobre factoriales de algunos números racionales, asimismo enlazó el Cálculo Integral con el Álgebra de una manera muy compleja como se puede ver en [5]. Se puede ver en [1, 2, 7], que los matemáticos Wallis y Stirling dan algunos resultados usando la FUNCIÓN GAMMA como herramientas, dado por ejemplo en la Fórmula de Stirling: $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}=n!$.

Se prueba también que $\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{\pi}{2}$, puede ser demostrado de dos formas: la primera es usando el Teorema de Cambio de Variable con transformaciones en $\mathbb{R}^2$ y la segunda forma, aplicando transformadas de Laplace, definiendo integrales paramétricas y haciendo el uso de tablas y transformada inversa de Laplace, ver [1, 4].

En las aplicaciones en Estadística y Cálculo de probabilidades, se da dos resultados importantes sobre la esperanza y la varianza de la Distribución Gamma, ver [6].

En las derivadas de orden fraccionario, se da la fórmula y algunos ejemplos, ver [3].

II. PRELIMINARES

Teorema II.1. *Sea* $\lim_{x\to\infty} x^p f(x)=A$. *Entonces:*

$i)$ $\int_a^\infty f(x)dx$ *converge si* $p>1$ *y* A *es finito.*

$ii)$ $\int_a^\infty f(x)$ *diverge si* $p\le 1$ *y* $A\neq 0$ *(puede ser infinito)*

***Ejemplo* II.1.** $\int_0^\infty \frac{x^2dx}{4x^4+25}$ converge pues

$$\lim_{x\to\infty} x^2.\frac{x^2dx}{4x^4+25}=\frac{1}{4}$$

***Ejemplo* II.2.** $\int_0^\infty \frac{xdx}{\sqrt{x^4+x^2+1}}$ diverge pues

$$\lim_{x\to\infty} x.\frac{xdx}{\sqrt{x^4+x^2+1}}=1$$

A. Criterios del cociente para integrales para integrales impropias

Los criterios que siguen se dan para el caso en que $f(x)$ no es acotada en un punto $x=a$ solamente del intervalo $a\le x\le b$. Hay criterios parecidos para cuando $f(x)$ no es acotado en $x=b$ ó en $x=x_0$ con $a<x_0<b$.

Criterio del cociente para integrales de integrando no negativo

$a)$ Si $f(x)\ge 0$ y $g(x)\ge 0$ para $a<x\le b$, y si $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=A\neq 0$ ó ∞, luego $\int_a^b f(x)dx$ e $\int_a^b f(x)dx$ convergen ambas o divergen ambas.

$b)$ Si $A=0$ en (a), e $\int_a^b g(x)dx$ converge, luego $\int_a^b f(x)dx$ converge.

$c)$ Si $A=\infty$ en (a), e $\int_a^b g(x)dx$ diverge, luego $\int_a^b f(x)dx$ diverge.

Teorema II.2. *Sea* $\lim_{x\to a^+}(x-a)^p f(x)=A$. *Entonces:*

$i)$ $\int_a^b f(x)dx$ *converge si* $p<1$ *y* A *es finito.*

$ii)$ $\int_a^b f(x)dx$ *diverge si* $p\ge 1$ *y* $A\neq 0$ *(A puede ser infinito).*

Teorema II.3. *Sea* $\lim_{x\to b^-}(b-x)^p f(x) = B$. *Entonces:*

i) $\int_a^b f(x)dx$ *converge si* $p < 1$ *y* B *es finito.*

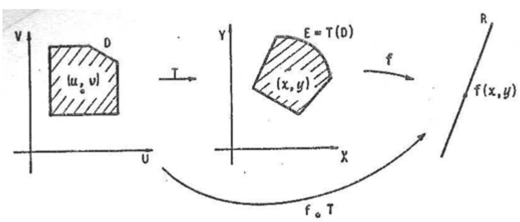
ii) $\int_a^b f(x)dx$ *diverge si* $p \geq 1$ *y* $B \neq 0$ *(*B *puede ser infinito).*

B. Cambio de variables en las integrales dobles

Teorema II.4 (de cambio de variable). *Sea* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *una transformación, tal que* $(x,y) = T(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$, *de clase* $-C^1$ *sobre un conjunto abierto* Ω *del plano* UV *y que, excepto posiblemente para un conjunto de área cero, es univalente con jacobiano no nulo.*

$$J(u,v) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0$$

Sea $D \subset \Omega(\subset$ *Plano* $XY)$ *un conjunto cerrado y acotado que tiene área y sea* $E = T(D)$ *(en el plano* XY*) la imagen del conjunto* D *por la transformación* T.



Entonces, si $f(x,y)$ *es integrable sobre* E, *la función* $f \circ T(u,v)$ *es integrable sobre* D, *y se tiene:*

$$\iint_E f(x,y)dxdy = \iint_E f(x(u,v), y(u,v)) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv$$

Nótese que aquí, el factor de corrección es el valor absoluto del jacobiano (o valor absoluto del determinante jacobiano):

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|$$

C. Transformada inversa de Laplace

Definición de la transformada inversa de Laplace

Si la transformada de Laplace de una función $F(t)$ es $f(s)$, es decir, si $\mathcal{L}\,|F(t)| = f(s)$, entonces $F(t)$ se llama una **transformada inversa de Laplace** de $f(s)$ y se expresa por $F(t) = \mathcal{L}^{-1}\{f(s)\}$, donde $\mathcal{L}^{-1}$ se llama **operador transformada inversa de Laplace**.

***Ejemplo* II.3.** Como $\mathcal{L}\{e^{-3t}\} = \dfrac{1}{s+3}$, se puede escribir:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\} = e^{-3t}$$

Propiedades de convolución

Teorema II.5. *Si* $\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} = F(t)$ *y* $\mathcal{L}^{-1}\{g(s)\} = G(t)$, *entonces:*

$$\mathcal{L}^{-1}\{f(s)g(s)\} = \int_0^t F(u)G(t-u)du = F * G$$

$F * G$ *se llamada convolución de* F *y* G, *y este teorema se llama* ***teorema de convolución*** *o* ***propiedad de convolución***.

Además, $F * G = G * F$.

***Ejemplo* II.4.** Puesto que $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s-1}\right\} = e^t$, y $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s-2}\right\} = e^{2t}$, tenemos:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)(s-2)}\right\} = \int_0^t e^u e^{2(t-u)}du = e^{2t} - e^t$$

III. LAS FUNCIONES GAMMA Y BETA

A. Función Gamma

La función Gamma, que se denota por $\Gamma(n)$, se define por:

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}dx \tag{1}$$

que es convergente para $n > 0$.

Una fórmula de recurrencia para la función gamma es:

$$\Gamma(n+1) = \Gamma(n) \tag{2}$$

donde $\Gamma(1) = 1$. Por (2), $\Gamma(n)$ se puede calcular para todo $n > 0$ si se conocen los valores para $1 \leq n \leq 2$.

En particular, si n es natural,

$$\Gamma(n+1) = n!\ ,\ n = 1, 2, 3, \ldots \tag{3}$$

razón por la cual $\Gamma(n)$ suele llamarse **función factorial**.

Algunas relaciones en que entra la función Gamma

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\operatorname{sen} x\pi}\ ,\ 0 < x < 1 \tag{4}$$

En particular, $x = \dfrac{1}{2}$, $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

$$2^{2x-1}\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right) = \sqrt{x}\Gamma(2x) \tag{5}$$

B. La función Beta

Denota por $B(m,n)$ se define por:

$$B(m,n)=\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx$$

Que es convergente para $m>0$, $n>0$.

Las funciones beta y gamma se relacionan mediante la igualdad.

$$B(m,n)=\frac{\Gamma(n)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \tag{6}$$

Muchas integrales se pueden calcular valiéndose de las funciones beta o gamma. Son útiles los dos resultados siguientes:

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2m-1}\theta\cos^{2m-1}\theta d\theta &= \frac{1}{2}B(m,n)\\ &= \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{2\Gamma(m+n)}\end{aligned} \tag{7}$$

válido para $m>0$, y $n>0$; y

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x}dx &= \Gamma(p)\Gamma(1-p)\\ &= \frac{\pi}{\operatorname{sen}p\pi}\ ,\ 0<p<1\end{aligned} \tag{8}$$

Integrales de Dirichlet

Si V es la región cerrada del primer octante limitada por la superficie $\left(\frac{x}{a}\right)^p+\left(\frac{y}{b}\right)^q+\left(\frac{z}{c}\right)^r=1$ y los planos coordenados, entonces, si todas las constantes son positivas,

$$\begin{aligned}\iiint\limits_V x^{\alpha-1}y^{\beta-1}z^{\gamma-1}dxdydz &= \frac{a^\alpha b^\beta c^\gamma}{pqr}\times\\ &\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{p}\right)\Gamma\left(\frac{\beta}{q}\right)\Gamma\left(\frac{\gamma}{r}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{\alpha}{p}\right)+\frac{\beta}{q}+\frac{\gamma}{r}}\end{aligned} \tag{9}$$

Las integrales de este tipo se llaman **integrales de Dirichlet** y se emplean a menudo para calcular integrales múltiples.

IV. Problemas resueltos

A. Función Gamma

Problema 1. Demostrar:

(a) $\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)$, $n>0$,

(b) $\Gamma(n+1)=n!$, $n=1,2,3,\dots$

Solución

(a)

$$\begin{aligned}\Gamma(n+1)&=\int_0^\infty x^ne^{-x}dx\\ &=\lim_{M\to\infty}\int_0^M x^ne^{-x}dx\\ &=\lim_{M\to\infty}\left\{(x^n)(-e^{-x})\Big|_0^M\right.\\ &\qquad\left.-\int_0^M(-e^{-x})(nx^{n-1})dx\right\}\\ &=\lim_{M\to\infty}\left\{-M^me^{-M}\right.\\ &\qquad\left.+n\int_0^M x^{n-1}e^{-x}dx\right\}\\ &=n\Gamma(n)\ ,\ \text{si } n>0\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\Gamma(1)&=\int_0^w e^{-x}dx\\ &=\lim_{M\to\infty}\int_0^M\int_0^M e^{-x}dx\\ &=\lim_{M\to\infty}(1-e^{-M})=1\end{aligned}$$

Hágase $n=1,2,3,\dots$ en $\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)$, entonces:

$$\begin{aligned}&\Gamma(2)=1\Gamma(1);\\ &\Gamma(2)=2\Gamma(2)=2{,}1=2!;\\ &\Gamma(4)=3\Gamma(4)=3{,}2!=3!\end{aligned}$$

En general: $\Gamma(n+1)=n!$, si n es entero positivo.

Problema 2. Demostrar que:

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

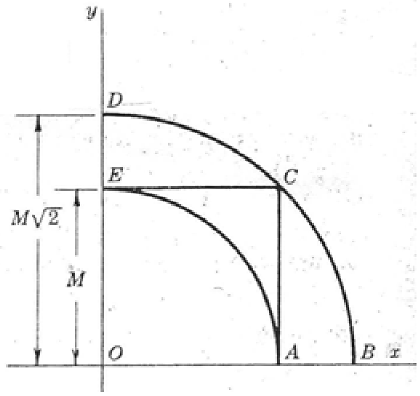
Demostración

Usando integrales dobles, la integral converge, pues: $\lim\limits_{x\to\infty}x^2e^{-x^2}=0$ (por la regla de L'Hospital o de otro modo). Entonces, por el Teorema 1, con $A=0$, $p=2$, la integral dada converge. Sea:

$$I_M=\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\int_0^M e^{-y^2}dy,$$

y sea $\lim\limits_{M\to\infty}I_M=I$ el valor de la integral, entonces:

$$\begin{aligned}I_M^2&=\left(\int_0^M e^{-x^2}dx\right)\left(\int_0^M e^{-y^2}dy\right)\\ &=\int_0^M\int_0^M e^{-(x^2+y^2)}dxdy\\ &=\iint\limits_{R_M}e^{-(x^2+y^2)}dxdy\end{aligned}$$



Siendo R_M el cuadrado OACE de lado M. Como el integrando es positivo, se tiene:

$$\iint_{R_1} e^{-(x^2+y^2)}dxdy \le I_M^2$$
$$\le \iint_{R_2} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$$

Siendo R_1 y R_2 las regiones del primer cuadrante limitadas por los círculos de radios M y $M\sqrt{2}$ respectivamente.

En coordenadas polares y por el teorema de cambio de variable, se tiene:

$$\int_{\phi=0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{\rho=0}^{M} e^{-\rho^2}\rho d\rho d\phi \le I_M^2$$
$$\le \int_{\phi=0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{\rho=0}^{M\sqrt{2}} e^{-\rho^2}\rho d\rho d\phi$$

o

$$\frac{\pi}{4}(1-e^{-M^2}) \le I_M^2 \le \frac{\pi}{4}(1-e^{-2M^2})$$

Y tomando límite para $M \to \infty$ se tiene:

$$\lim_{M\to\infty} I_M^2 = I^2 = \frac{\pi}{4}$$

$$\therefore I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Por otro lado, veamos la demostración usando Transformadas de Laplace:

Definimos:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^{+\infty} e^{-tx^2}dx\right\} = \int_0^{+\infty} e^{-st}\left(\int_0^{+\infty} e^{-tx^2}dx\right)dt$$

Tenemos que:

$$\mathcal{L}\left\{e^{(-x^2)t}\right\} = \int_0^{+\infty} e^{-st}e^{(-x^2)t}dt$$

Entonces:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{\int_0^{+\infty} e^{-tx^2}dx\right\} &= \int_0^{+\infty}\mathcal{L}\left\{e^{(-x^2)t}\right\}dx\\ &= \int_e^{+\infty}\frac{1}{s-(-x^2)}dx\\ &= \int_e^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{s}(\sec\theta)^2 d\theta}{s(\sec\theta)^2}\\ &= \frac{1}{\sqrt{s}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\\ &= \frac{1}{\sqrt{s}}\left(\frac{\pi}{2}\right)\end{aligned}$$

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^{+\infty} e^{-tx^2}dx\right\} = \frac{\pi}{2\sqrt{s}}$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-tx^2}dx = \frac{\pi}{2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{s^{1/2}}\right\}$$

Usando tablas de Transformadas de Laplace:

$$\int_0^{+\infty} e^{-tx^2}dx = \frac{\pi}{2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}(t^{-1/2})$$

pero $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$

$$\left(\int_0^{+\infty} e^{-tx^2}dx\right)\left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx\right) = \frac{\pi}{2s}t^{-1/2}$$

Haciendo $t = 1$:

$$\left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx\right)^2 = \frac{\pi}{4}$$

$$\therefore \int_e^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Problema 3. Demostrar $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

Demostración

$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} x^{-1/2}e^{-x}dx$, con $x = u^2$, esta integral se vuelve:

$$2\int_0^{\infty} e^{-u^2}du = 2\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

Aplicando el problema 2.

Problema 4. Calcular las integrales:

$(a)\ \int_0^{\infty}\sqrt{y}e^{-y^3}dy$

$(b)\ \int_0^{\infty} 3^{-4z^2}dz$

Solución

(a) Con $x = y^3$, la integral se vuelve:

$$\frac{1}{3}\int_0^\infty \sqrt{x^{1/3}}e^{-x}dx = \frac{1}{3}\int_0^\infty x^{1/6}e^{-x}dx$$
$$= \frac{1}{3}\Gamma\left(\frac{7}{6}\right)$$

(b)

$$\int_0^\infty 3^{-4z^2}dz = \int_0^\infty (e^{\ln 3})^{-4z^2}dz$$

Sea $(4\ln 3)z^2 = x$, con lo que la integral se vuelve:

$$\int_0^\infty e^{-(4\ln 3)z^2}dz = \int_0^\infty e^{-x}\left(\frac{x^{1/2}}{2\sqrt{4\ln 3}}\right)dx$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{4\ln 3}}\int_0^\infty x^{-1/2}e^{-x}dx$$
$$= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\sqrt{4\ln 3}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{4\ln 3}}$$

Problema 5. Demostrar que

$$\int_0^1 x^m(\ln x)^n dx = \frac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}}$$

con n natural y $m > -1$.

Haciendo $x = e^{-y}$ la integral se convierte en:

$$\int_0^1 x^m(\ln x)^n dx = (-1)^n\int_0^\infty y^n e^{-(m+1)y}dy$$

Si $(m+1)y = u$, esta última integral se transforma en:

$$(-1)^n\int_0^\infty y^n e^{-(m+1)y}dy = \frac{(-1)^n}{m+1}\int_0^\infty \frac{u^n e^{-u}}{(m+1)^n}du$$
$$= \frac{(-1)^n}{(m+1)^{n+1}}\Gamma(n+1)$$
$$= \frac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}}$$

Problema 6 (Un problema físico).

Una partícula es atraída hacia un punto fijo O con una fuerza inversamente proporcional a su distancia instantánea a partir de O. si la partícula se deja libre desde el reposo, hallar el tiempo en que llega a O.

Solución

En el tiempo $t = 0$ supóngase la partícula sobre el eje $x = a > 0$ y sea O el origen. Entonces, por la segunda ley de Newton:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{x} \tag{10}$$

Siendo m la masa de la partícula y $k > 0$ una constante de porporcionalidad.

Sea $\dfrac{dx}{dt} = v$ la velocidad de la partícula, entonces:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}.\frac{dx}{dt} = v.\frac{dx}{dt}$$

Y (10) se convierte en:

$$mv.\frac{dx}{dt} = -\frac{k}{x} \text{ o } \frac{mv^2}{2} = -k\ln x + c \tag{11}$$

Después de integrar. Como $v = 0$ en $x = a$, se tiene $c = k\ln a$, luego:

$$\frac{mv^2}{2} = k\ln\frac{a}{x} \text{ o } v = \frac{dx}{dt} = -\sqrt{\frac{2k}{m}}\sqrt{\ln\frac{a}{x}} \tag{12}$$

Tomándose el signo negativo porque x decrece al aumentar t.

Así se encuentra que el tiempo T que la partícula invierte para ir de $x = a$ a $x = 0$ está dada por la expresión:

$$T = \sqrt{\frac{m}{2k}}\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{\ln\frac{a}{x}}} \tag{13}$$

Haciendo $\ln\dfrac{a}{x} = u$ o bien $x = ae^{-u}$

$$T = a\sqrt{\frac{m}{2k}}\int_0^\infty u^{-1/2}e^{-u}du$$
$$= a\sqrt{\frac{m}{2k}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = a\sqrt{\frac{\pi m}{2k}}$$

V. FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN

Definición V.1. Decimos que X es una variable aleatoria que sigue una distribución Gamma de parámetros $\alpha > 0$ y $\beta > 0$, si su función de densidad es

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\frac{x}{\beta}} & , \ x > 0 \\ 0 & , \text{ otro caso} \end{cases} \tag{14}$$

Ahora veamos el papel que desempeñan los parámetros α y β en esta distribución.

Comencemos analizando la influencia del parámetro α. Este se conoce como el "parámetro de forma". Cuando toma valores pequeños, $\alpha \leq 1$, podemos observar que $f_X(x)$ es decreciente en todo su soporte. Por otro lado, para $\alpha > 1$ el máximo valor de la función densidad se consigue en $x = (\alpha-1)\beta$. Conseguimos este máximo derivando $f_X(x)$ e igualándolo a 0. El valor máximo de la función densidad es $\frac{(\alpha-1)^{\alpha-1}e^{-(\alpha-1)}}{\beta\Gamma(\alpha)}$.

La función distribución indica la probabilidad de que la variable aleatoria tenga un valor menor o igual que un cierto x. Por ello, también es conocida como función de probabilidad acumulada. A continuación, veremos la función de probabilidad de la distribución gamma que conseguimos integrando por partes (14).

Definición V.2. Sea $X \sim Ga(\alpha, \beta)$ la función distribución asociada a X es

$$F_X(t) = P(X \leq t) = \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^t x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}} dx$$

VI. ESPERANZA Y VARIANZA DE LA FUNCIÓN GAMMA

Trataremos ahora sobre la esperanza y la varianza de la función Gamma.

Proposición VI.1. *Sea X una variable aleatoria tal que $X \sim Ga(\alpha, \beta)$ entonces $E(X) = \alpha\beta$.*

***Demostración*.**

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx \\ &= \int_0^\infty x \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}} dx \\ &= \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^\alpha e^{-\frac{x}{\beta}} dx \end{aligned} \tag{15}$$

Hagamos un cambio de variable, de manera que

$$\begin{aligned} u = \tfrac{x}{\beta} \quad &\longrightarrow \quad x = \beta u \\ du = \tfrac{dx}{\beta} \quad &\longrightarrow \quad dx = \beta du \end{aligned}$$

Así, realizando el cambio en (15) tenemos que

$$\begin{aligned} E(x) &= \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^\infty (u\beta)^\alpha e^{-u} \beta du \\ &= \frac{\beta}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty u^\alpha e^{-u} du \\ &= \frac{\beta \Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)} = \frac{\beta\alpha\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} = \alpha\beta \end{aligned}$$

■

Proposición VI.2. *Sea X una variable aleatoria tal que $X \sim Ga(\alpha, \beta)$ entonces $Var(X) = \alpha\beta^2$.*

***Demostración*.** Sabemos que $Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$, con lo cual calculemos $E(X^2)$.

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x) dx \\ &= \int_0^\infty x^2 \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}} dx \\ &= \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^\infty x^{\alpha+1} e^{-\frac{x}{\beta}} dx \end{aligned} \tag{16}$$

Hagamos un cambio de variable, de la forma

$$\begin{aligned} u = \tfrac{x}{\beta} \quad &\longrightarrow \quad x = \beta u \\ du = \tfrac{dx}{\beta} \quad &\longrightarrow \quad dx = \beta du \end{aligned}$$

Así, realizando este cambio en (16) tenemos que

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^\infty (u\beta)^{\alpha+1} e^{-u} \beta du \\ &= \frac{\beta^2}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty u^{\alpha+1} e^{-u} du \\ &= \frac{\beta^2 \alpha(\alpha+1)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} \end{aligned}$$

Entonces obtenemos que $E(X^2) = (\alpha+1)\alpha\beta^2$. Con lo cual, como $Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$ podemos concluir que

$$Var(X) = (\alpha+1)\alpha\beta^2 - (\alpha\beta)^2 = \alpha\beta^2$$

■

VII. CÁLCULO DE DERIVADAS FRACCIONARIAS

Se define la n-ésima derivada de ax^b (donde n es un número natural) por:

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dx^n}(ax^b) &= (b-n+1)\ldots(b-2)(b-1)bax^{b-n} \\ &= \frac{b!}{(b-n)!} ax^{b-n}, \end{aligned}$$

como $n! = \Gamma(n+1)$ entonces

$$\frac{d^n}{dx^n}(ax^b) = \frac{\Gamma(b+1)}{\Gamma(b-n+1)} ax^{b-n},$$

donde n puede ser cualquier número donde la función Gamma esté bien definida.

Así por ejemplo:

- $$\begin{aligned} \frac{d^{1/3}}{dx^{1/3}}(x^3) &= \frac{\Gamma(4)}{\Gamma(\frac{11}{3})} x^{8/3} \\ &= \frac{6}{\Gamma(\frac{11}{3})} x^{8/3} \end{aligned}$$

- $$\frac{d^{3/2}}{dx^{3/2}}(x^4) = \frac{\Gamma(5)}{\Gamma(\frac{7}{2})} x^{5/2} = \frac{64}{5\sqrt{\pi}} x^{5/2}$$

VIII. CONCLUSIONES

A partir de las nociones básicas del cálculo diferencial e integral y el cálculo en varias variables, demostramos las propiedades de la función Gamma, que en realidad es una integral paramétrica impropia.

Vemos en este artículo que la función Gamma tiene asociada su distribución de probabilidad y su función de densidad en Estadística y Cálculo de Probabilidades, y que sus propiedades como la esperanza y la varianza se pueden demostrar usando la función Gamma.

REFERENCIAS

[1] Edwards-Penney, *Cálculo con Geometría Analítica*, Cuarta Edición, Prentice Hall, Hispanoamericana S.A., 1994.

[2] Gavilán Gonzales, M. y Gonzales Bohorquez, M., *The Gamma Function: basic properties and some applications*, SELECCIONES MATEMÁTICAS, Universidad Nacional de Trujillo, 2017.

[3] La Función Gamma-Monografías.com; en https://www.monografias.com

[4] Merino Cabrera, F., Tesis para optar el título de Graduado en Matemáticas: *Las funciones eulerianas Gamma y Beta complejas*, Universidad Laguna, España, 2016.

[5] Nicolás Bourbaki, *Elementos de la Historia de la Matemática*, Springer, 1985.

[6] Troncoso de la Cuesta, Rita, Trabajo de Fin de Grado: *La distribución Gamma*, Universidad de Santiago de Compostela, España, 2020/2021.

[7] Wikipedia; Función Gamma; en: http://es.wikipedia.org/wiki/Funci %C3 % B3n_gamma