

Aproximaciones numéricas de la solución de la ecuación diferencial con retardo para análisis poblacionales

Guerra Anthony¹, Mayorga Carlos², Narváez Wilmer³, Bermeo Mario⁴, Serrano Sebastián⁵

¹Escuela Politécnica Nacional, anthony.guerra01@epn.edu.ec, ^{2,3,4,5} Universidad Central del Ecuador, cjmayorga@uce.edu.ec, anarvaez@uce.edu.ec, mpbermeo@uce.edu.ec, jsserranol@uce.edu.ec

Abstract- En este artículo se plantean soluciones numéricas para la ecuación diferencial del crecimiento poblacional, pero esta vez con un detalle de haber tomado en cuenta un retardo en el planteamiento de la DDE, para el análisis de el comportamiento de los resultados en base a instancias anteriores, se ha logrado con este cambio conocer el comportamiento oscilatorio de la función dándonos muestras de la estabilidad o inestabilidad de la convergencia para ciertos valores del modelo planteado, se denota que en esta investigación el modelo de crecimiento poblacional puede ser orientado a otros tipos de poblaciones no necesariamente humanas.

Keywords - Ecuaciones Diferenciales con retardo, DDE, Diferencias Finitas no estándar, Métodos Numéricos

1. Introducción

1.1. Ecuaciones diferenciales con retardo

A lo largo del tiempo las ecuaciones diferenciales ya sean ordinarias o parciales nos han servido para la construcción de varios modelos matemáticos usados en ciencias y tecnología, que básicamente describen la tasa de cambio o la relación entre una variable junto con su tasa de cambio, este tipo de ecuaciones modela gran cantidad de fenómenos de la vida real como :

- Circuitos eléctricos y flujo de corriente
- Vibraciones mecánicas
- Crecimiento de tumores y enfermedades infecciosas
- Comportamiento de mercados financieros
- Crecimiento bacteriano

f. Sistemas de control

g. Procesos químicos

Sin embargo debemos tomar en cuenta que todas estas aproximaciones son de tipo lineal, por lo que es necesario plantear una evolución sobre el sistema lo que nos dará como resultado un sistema en el que se emplean *ecuaciones diferenciales con retardo* [1] .

También conocidas en inglés como *Delay Differential Equation* son un conjunto de ecuaciones diferenciales que principalmente dependen de un valor (retardo) de dicha función en un momento anterior, este término es el que le da su carácter distintivo con respecto a otro tipo de ecuaciones diferenciales ya sean estas ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) las cuales se diferencian de las ecuaciones diferenciales con retardo (EDR), dependiendo de la variable dependiente y de su derivada [2], tal como lo podemos ver a continuación :

$$y'(t) = -k \cdot y(t) \quad (1)$$

$$y'(t) = -k \cdot y(t - \tau) \quad (2)$$

Como se puede apreciar en ambas ecuaciones se está modelando el mismo fenómeno, es decir el decaimiento exponencial, donde la primera ecuación (1) corresponde a una EDO, donde su función $y(t)$ describe la función de t con relación a una tasa constante k , por otro lado tenemos la segunda ecuación (2) que corresponde a una EDR, pero con la gran diferencia de que esta ED incluye un término de retardo τ que depende del valor de y en un momento anterior, lo que podemos definir como el *retardo* dentro de nuestra ED. Además, al estar asociado con sistemas previos, esto nos brinda una gran ventaja, ya que podemos obtener más soluciones para describir nuestro sistema de interés de manera más completa. No olvidemos que la variación del estado de y en cada estado de tiempo de t , no es exclusivo de $y(t)$ como lo podemos apreciar en (1), sino que en (2) también depende de los valores en cada estado de tiempo de y . El retardo se lo puede describir en uno o varios instantes, de tal manera que se lo puede expresar de forma general como :

$$y'(t) = f(t, x(t), x(t - \tau_1), \dots, x(t - \tau_n)) \quad (3)$$

Digital Object Identifier: (only for full papers, inserted by LACCEI).
ISSN, ISBN: (to be inserted by LACCEI).
DO NOT REMOVE

de tal forma que una ecuación diferencial con retardo en la forma general se ve de la siguiente forma:

$$y'(t) = f(x(t), x(t - \tau)) \quad (4)$$

Como podemos ver las ecuaciones (4) y (2) son bastante similares, donde podemos apreciar que existe el retardo dentro de ambas ecuaciones pero para asegurar la condición dentro de las mismas debemos asegurar que se cumpla $\tau > 0$ y $k > 0$, así estaremos asegurando el retardo en (2), de una manera mas simple y cercana a la vida cotidiana, lo podemos relacionar con el calentamiento del agua en una ducha, con la ecuación (1) nos estamos refiriendo a que el agua se calienta de manera exponencial es decir que no tomamos en cuenta de que al agua le toma un determinado tiempo en calentarse y le toma otro tiempo moverse por todas las tuberías en su trayectoria hasta salir por la regadera, ahora si le agregamos el retardo generado por los factores mencionados anteriormente tenemos la ecuación (2), donde se toma en cuenta de que no todo sucede en un instante de tiempo determinado exacto, con una tasa de crecimiento exponencial constante sin retardo alguno, pero como sabemos esto no sucede, por lo tanto los valores que están variando dentro de esta EDR son τ y a .

Pero debemos tomar en cuenta que tenemos principalmente 2 casos para analizar las DDE, estos son, uno cuando $\tau = 0$ es decir cuando no existe retardo o no se produce el mismo, las soluciones de (1) tendrán la forma:

$$y(t) = e^{\lambda t} \quad (5)$$

$$\lambda e^{\lambda t} = -k e^{\lambda t} \quad (6)$$

Y el otro, si asumimos que $\tau > 0$, es decir que el retardo existe, tomando en cuenta que lo que tenemos en (2) no siempre será tan sencillo de integrar y el comportamiento de sus soluciones siempre estará ligado a las raíces del polinomio característico. Para esto tomamos como referencia a (2) donde haremos una sustitución directa usando $e^{\lambda t}$ de tal manera que obtenemos:

$$\lambda e^{\lambda t} = -k e^{\lambda(t-\tau)} \quad (7)$$

Los valores característicos de esta ecuación están ligados a las raíces de esta ecuación trascendente que a su vez determinan el comportamiento de las soluciones, donde al final obtendríamos :

$$P(\lambda) = \lambda + k e^{-\lambda \tau} \quad (8)$$

Para el siguiente sistema si tomamos los valores característicos como : $\lambda = x + iy$ obtendremos:

$$\begin{cases} x = -a e^{-x\tau} \cos(y\tau) \\ y = a e^{-x\tau} \sin(y\tau) \end{cases} \quad (9)$$

¹una función trascendental esta constituida de funciones exponenciales, logarítmicas, trigonométrica, hiperbólica y Gamma

²Es común enunciar el teorema de Picard en términos más generales, incluyendo para sistemas de ecuaciones diferenciales y EDO con retardo.

Entonces es necesario saber donde las raíces cambian de comportamiento lo que provoca un cambio en las soluciones, lo que si debemos tener muy claro son las condiciones suficientes y necesarias para nuestras soluciones en este caso para las raíces de λ en (7) con la diferencia que en este caso tendremos que igualar a cero esa expresión, lo que nos terminaría dando $\lambda + k e^{\lambda \tau} = 0$ que es muy similar a (8), por lo tanto definiremos como $k, \tau \in (0, \infty)$, como consecuencia tenemos que λ debe ser una solución para cuando nuestro polinomio característico adopte un valor de $P(\lambda) = 0$ donde básicamente nuestro polinomio dejaría de ser uno y pasaría a ser una función trascendente ¹ [3] ya que la solución no se podría expresar en términos de coeficientes enteros como lo hacen los polinomios, ya que como podemos ver en (8) nuestra expresión esta constituida por un termino exponencial, lo que nos daría una función trascendente como :

$$P(\lambda) = \lambda + k e^{\lambda \tau} \quad (10)$$

Asumiendo que $\lambda = 0$ no es una raíz, se nos da la facilidad de poder hacer un cambio donde $z = \frac{1}{\lambda}$, reemplazando en (10) obtenemos la siguiente expresión :

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} + k e^{\frac{1}{z}\tau} &= 0 \\ k z e^{\frac{1}{z}\tau} &= 1 \\ \frac{\tau}{k z e^z} &= 1 \end{aligned}$$

Ahora obtenemos una nueva función que es $g(z)$, la cual tiene una breve peculiaridad y que si usamos $z = 0$, esta tiene una singularidad además de que no se llega a anular en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, para poder apoyar nuestro desarrollo debemos hacer un breve uso del teorema de Picard.

Teorema 1 (Teorema de Picard) *Se establece que si $f(x, y)$ es una función continua y localmente Lipschitz con respecto a y en una región abierta que contiene al punto (x_0, y_0) , entonces el problema de valores iniciales $y'(x) = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ tiene una única solución en un intervalo que contiene a x_0 .*

2

Teorema 2 (Teorema de Lipschitz) *Sea $\dot{y} = f(t, y)$ una ecuación diferencial donde f es una función Lipschitz continua con respecto a la variable y , es decir, existe una constante L tal que para cualquier t y y_1, y_2 , se tiene que $|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$.*

Entonces, para cualquier punto inicial (t_0, y_0) , existe una única solución $y(t)$ definida en un intervalo $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$, donde δ es un número positivo que depende de L y de la elección de y_0 .

Entonces usando el teorema 1 podemos decir que la función inversa de g evaluada en 1 tiene una cantidad infinita de elementos ($g^{-1}(1)$), es decir que las soluciones que obtenemos de la ecuación característica conforma un conjunto que es de la forma $\{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ con $|\lambda_k| \rightarrow \infty$, lo que a su vez implica que la ecuación diferencial tiene una cantidad infinita de soluciones complejas que se asemejan a la forma:

$$y(t) = e^{\lambda_k t}$$

El resultado es que bajo cualquier combinación lineal en el campo de los números complejos se tiene una dimensión infinita, pero también es válido en el caso de que necesitemos o estemos interesados en todas sus soluciones reales. Algo que cabe destacar dentro de esto es que x es una solución en el campo de los complejos **si y solo si** el recorrido de x como la imagen de x sean soluciones en los reales.

1.2. Modelos poblacionales

Los modelos poblacionales básicamente son herramientas matemáticas, usadas para poder describir el comportamiento de las poblaciones de algún ser vivo dentro de un ambiente determinado, este tipo de modelos son ampliamente usados en varios campos como la biología, epidemiología, demografía y también en la gestión de recursos naturales entre otros. [4] Existe una gran cantidad de factores que afectan al crecimiento de una población ya sea la limitación de recursos, contaminación o conflictos bélicos.

Para lograr el crecimiento o reducción de la población, se deben considerar principalmente tres procesos: el crecimiento natural, que se calcula a partir de la diferencia entre el número de nacimientos y muertes en un territorio durante un período de tiempo determinado; el crecimiento social, que depende de los movimientos poblacionales como la migración hacia otras regiones o dentro de un área local y el crecimiento total, que incluye ambos tipos de crecimiento mencionados anteriormente, lo que nos da una idea de como crece o decrece la población demográficamente para a futuro poder planificar; pero en este caso vamos a centrarnos específicamente en la *generación z*, la cual comprende a todas las personas nacidas entre 1997 - 2012 [5], también en base al criterio de otros autores muchas veces se lo suele tomar desde 1995 en adelante para hacer referencia a todas las personas que pertenecen a la generación z, pero la relación que tienen con el crecimiento poblacional es que han vivido momentos importantes en la economía global como la caída de las torres gemelas o la recesión económica de 2008, por lo tanto les toma mas tiempo independizarse, además de que muchos de ellos cursan

o cursaron carreras universitarias lo que hace que lleguen a independizarse mucho mas tarde con respecto a generaciones anteriores o directamente con relación a sus progenitores, los cuales formaron una familia a una edad mas temprana y además también tuvieron varios hijos mucho ántes que sus propios hijos.

Según proyecciones del INEC, para el 2030 la población adulta mayor estará por debajo de 2.1, lo que quiere decir que el cambio generacional tomará mucho más tiempo del que debería, lo cual no asegura un cambio generacional debido a que no existe otra generación de igual tamaño que la pueda sustituir.

2. Metodología

Con la información proporcionada en las secciones anteriores tenemos algunas nociones sobre EDR, pero para ser más específicos hablaremos sobre el modelo logístico con retardo [6] tiene la ventaja de permitir una descripción más detallada y precisa de cómo una población cambia en el tiempo, ya que considera el impacto de eventos pasados en su crecimiento actual y en las siguientes secciones entraremos en la aplicación de la teoría anteriormente expuesta, además del uso de MATLAB que es una poderosa plataforma para la programación junto con el énfasis que tiene hacia el cálculo numérico lo que nos favorece para nuestros objetivos, además permite el análisis de datos, junto con la creación de modelos y algoritmos para su posterior resolución.

3. Desarrollo

El modelo que mejor se adapta para nuestra necesidad es el de la ecuación logística, se basa en la idea de que la tasa de crecimiento de la población está en función de la cantidad de individuos en cada edad, lo que permite predecir la estructura de edad de la población en el futuro.

Este modelo se basa en la simple premisa de basarse en la suposición de que la tasa de crecimiento de una población disminuye a medida que la población se acerca a su capacidad máxima de carga [7], nuestro modelo como una ED se la puede expresar como:

$$\frac{dy}{dt} = ry \left(1 - \frac{y}{K}\right) \quad (11)$$

donde:

- $\frac{dy}{dt}$ representa la tasa de cambio de la población y en el tiempo t .
- r es la tasa de crecimiento intrínseca de la población.
- t es el tamaño actual de la población.

- K es la capacidad de carga del entorno, que es la cantidad máxima de individuos que el entorno puede sostener..

Esta ecuación se conoce como una ecuación diferencial ordinaria de primer orden porque solo involucra la primera derivada de la función $y(t)$ con respecto al tiempo t . La solución de esta ecuación describe cómo la población cambia con el tiempo, y se puede obtener mediante técnicas analíticas o numéricas, como la integración numérica.

3.1. Modelo propuesto

Para poder plantear la ecuación para este caso, tomaremos como referencia (11) ya que nos estamos basando en ese modelo, donde las soluciones de este sistema pueden ser utilizadas para hacer predicciones sobre el crecimiento y la estructura futura de la población, y para evaluar el impacto de diferentes políticas o intervenciones en la población.

Sin embargo, hay que recordar que todos los modelos matemáticos tienen limitaciones y este no es la excepción, y es bastante importante nombrarlas para poder tenerlas en cuenta [8] :

- No tiene en cuenta factores externos: La ecuación logística se basa en la idea de que la población crece en un entorno ideal sin limitaciones externas, pero en la realidad hay muchos factores que pueden afectar el crecimiento de una población, como cambios en el clima, la disponibilidad de recursos y la competencia con otras especies.
- No considera la variabilidad genética: La ecuación logística asume que todos los individuos de una población son idénticos y que no hay variabilidad genética. En la realidad, la variabilidad genética puede influir en la supervivencia y el éxito reproductivo de los individuos, lo que a su vez puede afectar el crecimiento y la evolución de la población.
- No es adecuada para poblaciones pequeñas: La ecuación logística es más adecuada para modelar poblaciones grandes, ya que puede no ser precisa en poblaciones pequeñas donde el crecimiento no sigue un patrón predecible.

$$\frac{dN}{dt'} = rN \left(1 - \frac{N(t' - \tau)}{K} \right) \quad (12)$$

donde $N(t)$ es la población de la generación Z en el tiempo t , r es la tasa de crecimiento máxima, K es la capacidad de carga del ambiente para la población y τ es el tiempo de retardo. Esta ecuación describe cómo la población de la generación Z cambia con el

tiempo, teniendo en cuenta el efecto de eventos pasados en su crecimiento actual, además de estos parámetros, también se necesitan las condiciones iniciales, es decir, el valor de la población en el tiempo inicial $N(t_0)$, donde t_0 es el momento en el que comienza la simulación.

Para poder obtener los valores de esta EDR mediante un método numérico primero debemos obtener las tasas requeridas para nuestra ecuación, lo que recae en la fiabilidad de los datos para poder obtener una solución bastante precisa ya que estos la pueden afectar. Y no vemos importante también se debe tener en cuenta que criterios se deben tomar en cuenta la elección de valores para el retardo τ ya que estos afectan directamente a la solución y la estabilidad [9] de la EDR, pero antes hay que hacer ciertos ajustes donde tenemos que hacer ciertas sustituciones como $y = N/K$ y $t = t'/\tau$, ya que es deseable que nuestra ecuación sea adimensional, donde luego se podrá observar los resultados de la derivación de y y τ

$$y = \frac{N}{K}$$

$$N = Ky \rightarrow \frac{dN}{dy} = K$$

$$t = \frac{t'}{\tau} \rightarrow \frac{dt}{dt'} = \frac{1}{\tau}$$

ahora con estos cambios podemos usar (12), usamos la regla de la cadena en nuestra ecuación original, dN/dt :

$$\frac{dN}{dt'} = \frac{dN}{dy} \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dt'}$$

$$\frac{dN}{dt'} = K \frac{dy}{dt} \frac{1}{\tau}$$

regresando a la ecuación que tenemos en un principio (12), ahora hacemos una sustitución para N , K , t' y dN/dt' :

$$\frac{dN}{dt'} = rN \left[1 - \frac{N(t' - \tau)}{K} \right]$$

$$K \frac{dN}{dt'} \frac{1}{\tau} = r y k \left[1 - y \left(\frac{N(t' - \tau)}{\tau} \right) \right]$$

En la parte izquierda de la ecuación se reemplazó dN/dt' por lo que se empleó la regla de la cadena y en el lado opuesto sustituimos empleando N/K , luego en la parte interna, dividimos para τ para que nuestra expresión quede en términos de t , recordando la sustitución $t = t'/\tau$, podemos ver hacia atrás que ese paso fue necesario, además ver que es más sencillo resolver nuestra ecuación actual para dy/dt :

$$\frac{dy}{dt} = \frac{k}{k} r y \tau \left[1 - y \left(\frac{t' - \tau}{\tau} \right) \right]$$

$$\frac{dy}{dt} = r y \tau [1 - y(t - 1)]$$

Para poder obtener la ecuación en su forma final tenemos que hacer una última sustitución con $\alpha = r\tau$, obteniendo al final nuestra EDR en una forma adimensional:

$$\frac{dy}{dt} = \alpha y [1 - y(t - 1)] \quad (13)$$

Ahora podemos usar nuestra ecuación (13) para poder generar gráficas usando MATLAB. Una vez que tenemos la ecuación se deben obtener los factores necesarios para su planteamiento, se investigan los datos de 2021 debido a que de ese año en cuestión se tienen los datos netos requeridos completos. N-> número de individuos ; B -> natalidad ; D -> mortalidad; M -> migración ;F-> individuos que fluctúan / fecundidad métricas de poblaciones y similar: https://www.ecuadorencifras.gob.ec/documentos/web-inec/Poblacion_y_Demografia/Proyecciones_poblacionales/presentacion.pdf (INEC)

Como siguiente paso tenemos la investigación y obtención de datos por medio de entes dedicados a estudios estadísticos o demográficos para el año 2021, donde según el INEC la tasa fue de 14.21 nacidos (vivos) por cada 1000 habitantes, por otro lado la tasa de mortalidad fue de 5.9 por cada 1000 habitantes [10], también la tasa de migración durante el mismo período fué de 0.139 por cada 1000 habitantes y la tasa de fecundidad es de 2.00.

3.2. Aplicación en MATLAB

Este es un poderoso software matemático para simulación, el cual nos ofrece varias herramientas para resoluciones de EDR. En este caso vamos a emplear *DDE23*³, en el cual se empleará la siguiente estructura proporcionada por Mathworks que está en la propia documentación⁴, la cual tiene la siguiente sintaxis:

```
solucion=dde23('funcion',
retrasos, valor_inicial, intervalo)
```

con (13) podemos variar los valores de α , para meros métodos de experimentación podemos asignarle valores pequeños como $\alpha = 1$ o $\alpha = 2$, pero debemos tener en cuenta que las EDR se basan en tiempos pasados para la obtención de resultados, en el caso de que $y(t) = 0.5$ en el intervalo de $-1 \leq t \leq 0$ y con el retardo con el valor de $\tau = 1$, que es lo que está representado en el siguiente código en MATLAB:

```
sol = dde23(@h,1,0.5,[0,40]);
plot(sol.x,sol.y)
grid on
```

³DDE23 emplea el método numérico Runge-Kutta para la solución de DDE, por lo tanto no es necesario escribir el código para usar algún otro método numérico.

⁴<https://la.mathworks.com/help/matlab/ref/dde23.html>

```
title('EDR con en la generación
z \alpha=2.0')
xlabel('t')
ylabel('y')
set(gcf, 'PaperPosition',
[0,0,4,3])
set(gcf, 'PaperSize', [4,3])
```

```
function v = h(t,y,Z)
v = (2).*y.*(1-Z);
end
```

La gran ventaja que tiene el uso de DDE23 es que después del primer parámetro de la función donde le asignamos el valor de 1 debido a que es el tiempo de retardo ($\tau = 1$), en el siguiente parámetro indicamos el valor inicial el cual lo definimos dentro de un intervalo, y como último parámetro definimos el dominio de la misma dentro del plot.

Hay que denotar que en el código tenemos una función anónima que recibe 3 parámetros que son $h(t,y,Z)$, donde:

El primer parámetro representa a la variable en un tiempo estándar.

El segundo parámetro es la presentación de $y(t)$ en (13),

Pero el último parámetro de la función es distinto al resto al que representa el retraso en el tiempo de la función $y(t - \tau)$ ya que este solver extrae el valor de τ de nuestro script como parámetro de DDE23, y solamente digitamos Z dentro de nuestra función.

En nuestro caso de aplicación y es la fracción de población que representa la generación Z en el presente o un tiempo determinado y por otro lado α representa la tasa de natalidad de esta generación, no menos importante la interacción ($[1 - y(t - 1)]$) por la competencia de recursos limitados ya sean estas oportunidades laborales, vivienda, educación y otros recursos escasos, lo que limita el crecimiento poblacional de una generación en cierto período, esto nos ayuda a comprender mejor las tendencias de crecimiento poblacional y a tomar decisiones informadas sobre la planificación del crecimiento y el desarrollo sostenible a largo plazo.

4. Resultados

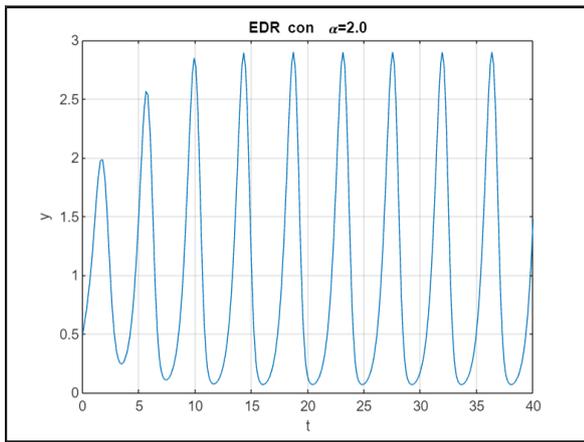


Figura 1: Oscilación de una solución con valores de $\alpha = 2$

5. Conclusiones

- I. En este trabajo se ha implementado el valor de retardo para valores que han de considerar los diferentes factores que pueden afectar al crecimiento poblacional en tiempos actuales.
- II. Este modelo puede ser aplicado para tipos de poblaciones diferentes, esto quiere decir que no solamente puede ser relacionado con la población humana, sino que también de otro tipo.
- III. Las Ecuaciones diferenciales con retardo casi siempre presentan un tipo de gráficas oscilatorias, esto quiere decir que existen ciertos puntos críticos que afectan al crecimiento o decrecimiento, esto puede ser explicado por algunas anomalías que surgen dentro de las poblaciones.
- IV. Se concluye que existiendo factores propios, por ejemplo de un habitat de microorganismos, existen factores antagonistas que hacen que la velocidad de crecimiento sea desacelerada en ciertas etapas.

Referencias

- [1] T. Erneux, *Applied delay differential equations*, vol. 3. Springer Science & Business Media, 2009.
- [2] N. finite difference schemes for general linear delay differential systems, “Castro, m.a. sirvent, a. rodríguez, f,” *Math. Meth. Appl. Sci.*, no. 44, pp. 3985–3999, 2021.
- [3] V. Kolmanovskii and A. Myshkis, *Introduction to the theory and applications of functional differential equations*, vol. 463. Springer Science & Business Media, 2013.
- [4] R. Lee, “The demographic transition: three centuries of fundamental change,” *Journal of economic perspectives*, vol. 17, no. 4, pp. 167–190, 2002.
- [5] B. in a non-standard numerical scheme for a class of positivity-preserving ODEs, “Alexander, m.e. summers, a.r. moghadas, s.m. neimark–sacker,” *Proc. R. Soc. A Math. Phys. Eng. Sci.*, no. 462, p. 3167–3184, 2006.
- [6] S. Ruan, “Delay differential equations in single species dynamics,” in *Delay differential equations and applications*, pp. 477–517, Springer, 2006.
- [7] S. from exact scheme to nonstandard finite difference scheme for linear delay differential equation, “Garba, s.m. gumel, a.b. hassan, a.s. lubuma j.m.-s,” *Appl. Math. Comput.*, no. 258, pp. 388–403, 2015.
- [8] Exact and nonstandard finite difference schemes for coupled linear delay differential systems, “García m.a. castro m.a. martín j.a. rodríguez f,” *Mathematics.*, vol. 7, p. 1038, 2019.
- [9] C. K. Yuan and M. Mohamad, “The study of population dynamics by delay differential equations,” *Enhanced Knowledge in Sciences and Technology*, vol. 2, no. 1, pp. 313–322, 2022.
- [10] V. O. Angela Pérez, Gabriela Lugmaña, “Estadísticas vitales, registro estadístico de defunciones generales de 2021.” INEC, 2022. Accedido el 24 de marzo de 2023. En línea.
- [11] R. Monti, “Introduction to ordinary differential equations.” Online, jun 2010.
- [12] C. T. Baker and C. A. Paul, “A global convergence theorem for a class of parallel continuous explicit runge–kutta methods and vanishing lag delay differential equations,” *SIAM journal on numerical analysis*, vol. 33, no. 4, pp. 1559–1576, 1996.
- [13] M. E. Gurtin, “A system of equations for age-dependent population diffusion,” *Journal of Theoretical Biology*, vol. 40, no. 2, pp. 389–392, 1973.
- [14] M. Castro, A. Sirvent, and F. Rodríguez, “Nonstandard finite difference schemes for general linear delay differential systems,” *Math. Meth. Appl. Sci.*, 44, 3985–3999, vol. 2, no. 1, pp. 313–322, 2021.
- [15] A. nonstandard numerical scheme of predictor–corrector type for epidemic models., “Arenas, a.j. gonzález-parra, g. chen-charpentier, b.m,” *Comput. Math. Appl.*, no. 59, pp. 3740–3749, 2010.

- [16] N. difference equations with constant delay, “B. I. s. prakasa rao,” *Journal of Difference Equations and Applications*, vol. 4, no. 4, pp. 365–379, 1998.
- [17] S. criteria for certain second-order delay differential equations with mixed coefficients, “Cahlon, b. schmidt, d,” *J. Comp. Appl. Math.*, no. 170, pp. 79–102, 2004.
- [18] A. D. D. Equations, “Erneux, t,” *Springer*, 2009.
- [19] N. methods for delay differential equations, “G. samaey and k. j. engelborghs,” *Acta Numerica*, vol. 25, pp. 659–744, 2016.
- [20] A. introduction to numerical integrators preserving physical properties. In Applications of Nonstandard Finite Difference Schemes, “Gander, m.j. meyer-spasche, r,” *World Scientific*, pp. 181–246, 2000.
- [21] Exact and nonstandard numerical schemes for linear delay differential models, “García, m.a. castro, m.a. martín, j.a. rodríguez, f,” *Appl. Math. Comput.*, no. 338, pp. 337–345, 2018.
- [22] O. the asymptotic stability properties of Runge-Kutta methods for delay differential equations, “number=Guglielmi,” no. 77, pp. 467–485, 1997.
- [23] Exact and nonstandard numerical schemes for linear delay differential models, “García, m.a. castro, m.a. martín, j.a. rodríguez, f,” *Appl. Math. Comput.*, no. 338, pp. 337–345, 2018.
- [24] D. analysis of a generalized hepatitis B epidemic model and its dynamically consistent discrete model, “Hoang, m.t,” *Math. Comput. Simul.*, no. 205, pp. 291–314, 2023.
- [25] N. solution of delay differential equations using matrix exponentials, “J. t. betts and k. r. lajos,” *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 131, no. 1-2, pp. 119–133, 2001.
- [26] a Matlab package for bifurcation analysis of delay differential equations, “K. j. engelborghs, t. luzyanina, and g. samaey, "dde-biftool v. 2.00," *ACM Transactions on Mathematical Software*, vol. 28, no. 1, pp. 1–21, 2002.
- [27] I. to the Theory and A. of Functional Differential Equations, “address=Kolmanovskii, V. Myshkis,” *Kluwer Academic Publishers*, 1999.
- [28] A. of Nonstandard Finite Difference Schemes World ScientificK, “Mickens, r.e. (ed.),” 2000.
- [29] A. on Applications of Nonstandard Finite Difference Schemes, “Mickens, r.e. (ed.),” *World Scientific*, 2005.
- [30] N. F. D. S. Methodology and Applications, “Mickens, r.e,” *World Scientific*, 2021.
- [31] N. discretizations of interacting population models satisfying conservation laws, “Mickens, r.e. washington, t.m,” *Comput. Math. Appl.*, no. 66, pp. 2307–2316, 2013.
- [32] T. N. H. of Mathematical Functions, “Olver, f. lozier, d. boisvert, r. clark, c,” *Cambridge University Press*, 2010.
- [33] K. R. Patidar *A non-standard finite difference scheme for a class of predator–prey systems with non-monotonic functional response*, no. 27, pp. 1310–1328, 2021.
- [34] A. non-standard finite difference scheme for a class of predator–prey systems with non-monotonic functional response, “Patidar, k.c. ramanantoanina,” *J. Differ. Equ. Appl.*, no. 27, pp. 1310–1328, 2021.
- [35] N. finite difference methods Recent trends and further developments, “Patidar, k.c,” *J. Differ. Equ. Appl.*, no. 22, pp. 817–849, 2016.
- [36] Differential and difference equations, “Potts, r.b,” *Am. Math. Mon.*, no. 89, pp. 402–407, 1982.
- [37] M. of Delay Differential Equations, “Rodríguez, f. cortés, j.c. castro, m.a. (eds.),” *MDPI Basel*, 2021.
- [38] S. O. with MATLAB, “Shampine, l.f. gladwell, i. thompson, s,” *Cambridge University Press*, 2003.
- [39] A. I. to Delay Differential Equations with Applications to the Life Sciences, “Smith, h,” *Springer*, 2011.
- [40] N. dynamics of a nonstandard finite difference method for a class of delay differential equations, “Wang, y. li, w. ding, x,” *J. Math. Anal. Appl.*, vol. 400, no. 17, pp. 25–34, 2012.
- [41] T. on the Theory of Bessel Functions, “Watson, g,” *Cambridge University Press*, 1944.
- [42] U. approaches to approximate biological systems with nonstandard finite difference methods, “Wood, d.t. kojouharov, h.v. dimitrov, d.t,” *Math. Comput. Simul.*, no. 133, pp. 337–350, 2017.
- [43] S. preserving NSFD scheme for a delayed viral infection model with cell-to-cell transmission and general nonlinear incidence, “Xu, j. geng, y,” *J. Differ. Equ. Appl.*, no. 23, pp. 893–916, 2017.
- [44] v.-t.-c. Global dynamics of a discrete viral infection model with time delay and cell-to-cell transmissions, “Zhou, j. yang, y,” *J. Differ. Equ. Appl.*, no. 23, pp. 1853–1868, 2017.