

Analysis and simulation of the mathematical model love dynamics through autonomous system of ordinary differential equations

1^{er} Richar Marlon Mollinedo Chura

*Departamento Académico de Ciencias Físico Matemáticas
Universidad Nacional del Altiplano
Puno, Perú
rmollinedo@unap.edu.pe*

2^{do} Eliseo Pumacallahui Salcedo

*Departamento Académico de Ciencias Básicas
Universidad Nacional Intercultural de Quillabamba
Quillabamba, Perú
eliseo.pumacallahui@uniq.edu.pe*

3^{er} Roger Ccama Alejo

*Departamento Académico de Ciencias Físico Matemáticas
Universidad Nacional del Altiplano
Puno, Perú
rccama@unap.edu.pe*

4^{to} Fredy Gonzalo Copari Romero

*Departamento Académico de Ciencias Básicas
Universidad Nacional de Juliaca
Juliaca, Perú
fcopari@unaj.edu.pe*

Abstract— In the present research work inspired by Strogatz [3], we qualitatively analyze the mathematical model of love in which two people can find themselves: Romeo and Juliet, this analysis is based on four possible states of love: he does not pay attention to his heart, fire and ice, soul mate and Romeo the robot, with the aim of anticipating the evolution over time of love bond, by means of an autonomous system of ordinary differential equations. Finally, simulations were carried out using Matlab software to represent the phase portraits and thus observe the stability of the critical points.

Keywords— Romeo and Juliet, love model, romantic relationships, differential equation system

Análisis y simulación del modelo matemático dinámicas de amor mediante sistema autónomo de ecuaciones diferenciales ordinarias

1^{er} Richar Marlon Mollinedo Chura
 Departamento Académico de Ciencias Físico Matemáticas
 Universidad Nacional del Altiplano
 Puno, Perú
 rmollinedo@unap.edu.pe

2^{do} Eliseo Pumacallahui Salcedo
 Departamento Académico de Ciencias Básicas
 Universidad Nacional Intercultural de Quillabamba
 Quillabamba, Perú
 eliseo.pumacallahui@uniq.edu.pe

3^{er} Roger Ccama Alejo
 Departamento Académico de Ciencias Físico Matemáticas
 Universidad Nacional del Altiplano
 Puno, Perú
 rccama@unap.edu.pe

4^{to} Fredy Gonzalo Copari Romero
 Departamento Académico de Ciencias Básicas
 Universidad Nacional de Juliaca
 Juliaca, Perú
 fcopari@unaj.edu.pe

Resumen—En el presente trabajo de investigación inspirada en Strogatz [3], analizamos cualitativamente el modelo matemático dinámicas de amor es decir los tipos de aventuras amorosas en las que se pueden encontrar dos personas Romeo y Julieta, este análisis se fundamenta en cuatro estados posibles de enamoramiento: no hace caso a su corazón, fuego y hielo, alma gemela y Romeo el robot, con objetivo de anticipar la evolución a lo largo del tiempo de vínculo amoroso, mediante sistema autónomo de ecuaciones diferenciales ordinarias. Finalmente se llevaron a cabo simulaciones usando el software Matlab para representar los retrato de fases y así observar la estabilidad de los puntos críticos.

Palabras Clave— Romeo y Julieta, modelo de amor, relaciones románticas, sistema de ecuación diferencial

I. INTRODUCCIÓN

Las interacciones entre personas en la sociedad actual adoptan diversas modalidades, abarcando relaciones románticas, vínculos padre-hijo, amistades, camaradería, encuentros casuales, relaciones de amigos con beneficios, conexiones consideradas almas gemelas, así como citas originadas a través de internet. De todas estas relaciones interpersonales, que constituye un fenómeno destacado y esencial en la vida social y la interacción humana, es la relación romántica [1].

La relación romántica es, sin duda, una de las formas más significativas y complejas de conexión interpersonal en la sociedad actual. Se caracteriza por la atracción emocional, física y, en muchos casos, el compromiso a largo plazo entre dos individuos. Este tipo de relación puede manifestarse de diversas maneras, y su dinámica varía según las culturas, las experiencias individuales y las expectativas personales [2].

Las ecuaciones diferenciales ordinarias se han utilizado ampliamente para estudiar fenómenos dinámicos en una amplia gama de campos. que van desde las ciencias físicas, naturales, biológicas hasta las sociales [10]. El modelo básico

que se plantea en este artículo fue originalmente propuesto por Strogatz [3] con la intención de motivar a sus alumnos en los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinales, más tarde en su libro [4] en la sección 5.3, para despertar su interés en la clasificación de los sistemas lineales que para describir una historia de amor y, sin embargo, hace una serie de interesantes predicciones.

Los modelos matemáticos que discuten la dinámica del amor entre dos personas han ganado recientemente la atención entre muchos investigadores que han proporcionado extensiones al modelo fundamental de Strogatz. Por ejemplo [12], [13], [14] después de ver las limitaciones del modelo básico, decide analizar los efectos de las no-linealidades, finalmente [5], [11] se centran en algo muy común hoy en día la aparición de una tercera persona en una relación y modifica el modelo no lineal para incluir a este tercer individuo en la relación, que puede ser tanto un hijo, un amigo, o un amante, en la misma línea [7], realiza un estudio profundo sobre el modelo inicial, modelo no-lineal y triángulos amorosos.

II. MATERIALES Y MÉTODOS

Esta sección ha sido organizada de la siguiente manera: definiciones básicas, teoremas relacionados con la teoría de sistema de ecuaciones diferenciales lineales, modelo matemático dinámicas de amor y finalmente presentamos los principales resultados.

A. Sistemas autónomos

Definición 1: Un sistema de dos ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden es una expresión del tipo [6]

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= F(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= G(x, y) \end{aligned} \quad (1)$$

en donde t es la variable independiente no aparece explícitamente en las funciones F y G del segundo miembro, la ecuación (1) se denomina sistema autónomo.

Un sistema autónomo es lineal [8], cuando lo podemos escribir la ecuación (1) como

$$\begin{aligned} x' &= ax + by \\ y' &= cx + dy \end{aligned} \quad (2)$$

donde a , b , c y d son constantes, $x = x(t)$ y $y = y(t)$. Entonces el sistema lineal (2) se puede escribir de forma más compacta en forma matricial como

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (3)$$

o bien,

$$X' = AX \quad (4)$$

Cuando se interpreta t como un parámetro, la solución $(x(t), y(t))$ del sistema (1) define una curva en el plano de fases xy que se denomina trayectoria u órbita [9].

Al conjunto de vectores $F(x, y) = (F(x, y), G(x, y))$ tangente a las trayectoria se le denomina campo de direcciones o campo vectoriales del sistema (1)

Además, los puntos (x_0, y_0) tales que $F(x_0, y_0) = (0, 0)$ se denominan puntos de equilibrio o puntos estables del sistema autónomo (1).

B. Estabilidad de puntos de equilibrio

Definición 2: Se dice que un punto crítico [4] del sistema (1) es.

- 1) estable, si una órbita que está cerca del punto de equilibrio, se mantiene cerca a lo largo del tiempo.
- 2) asintóticamente estable, si las órbitas no solo se mantienen cerca del punto de equilibrio, sino que se aproximan al punto de equilibrio a lo largo del tiempo.
- 3) inestable, si las órbitas que están cerca del punto de equilibrio, se mantiene lejos a lo largo del tiempo.

C. Clasificación de los planos fase y los puntos de equilibrio

El único punto de equilibrio de los sistemas (4) es el origen $X_0 = (0, 0)$, siempre que el determinante de A sea distinto de cero, para entender el comportamiento cualitativo de las soluciones de la ecuación (4), basta estudiar su forma canónica de Jordan [15], ahora bien, si denotamos por λ_1 y λ_2 a los autovalores de A .

Definición 3: Consideremos un sistema autónomo (1). En función del comportamiento de las trayectorias, el punto crítico se denominará: nodo, punto de silla, centro, foco, atractor o rectas [6]

- 1) El punto crítico es un nodo, este ocurre cuando los autovalores λ_1 , λ_2 son reales y del mismo signo. El diagrama de fases tiene las siguientes características:
 - a) Si $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$, todas las órbitas se acercan al origen, de manera que el punto de equilibrio es un nodo atractor y será asintóticamente estable.

- b) Si $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$, todas las órbitas se alejan del origen, de manera que el punto de equilibrio es un nodo repulsor y será inestable.

- 2) El punto crítico es un punto silla cuando los autovalores λ_1 , λ_2 son reales y de distinto signo ($\lambda_1 < 0$ y $\lambda_2 > 0$). En este caso, nos encontramos con órbitas que se acercan al origen y otras que se alejan de él. Esto nos permite concluir que el punto silla es inestable.
- 3) El punto crítico es un centro cuando los autovalores son imaginarios puro ($\lambda_1 = i\beta$ y $\lambda_2 = -i\beta$). En este caso, nos encontramos con que las órbitas son curvas cerradas que rodean al origen, por lo que ninguna órbita tiende a él. Estos puntos son estables, pero no asintóticamente estables.
- 4) El punto crítico es un foco cuando los autovalores son complejos conjugados y tienen parte real no nula. Las órbitas son curvas en forma de espiral y puede ocurrir:
 - a) Si $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ y $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ con $\alpha < 0$, todas las órbitas se acercan al origen. Es asintóticamente estable.
 - b) Si $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ y $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ con $\alpha > 0$, todas las órbitas se alejan del origen. Es inestable.
- 5) El punto crítico es un atractor o un repulsor, cuando los autovalores λ_1 , λ_2 son reales, del mismo signo, pero además iguales. El diagrama de fases tiene las siguientes características:
 - a) Si $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$, todas las órbitas se acercan al origen en forma de rayos. Es atractor estable.
 - b) Si $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$, todas las órbitas se alejan del origen en forma de rayos. Es repulsor inestable.
- 6) Los punto crítico son rectas, cuando hay infinitos puntos de equilibrio, todos sobre una recta y ocurre cuando uno o ambos autovalores son cero.

D. La traza y el determinante de la matriz de coeficientes

Recordemos cómo encontrar autovalores y autovectores. En general, los autovalores de un matriz A de la ecuación (4) están dadas por la ecuación característica $\det(A - \lambda I) = 0$, donde I es el matriz de identidad [4]. Luego la ecuación característica de la ecuación (3) está dado por

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix} &= 0 \\ \lambda^2 - T\lambda + D &= 0 \end{aligned}$$

donde

$$T = \text{traza}(A) = a + d \quad (5)$$

$$D = \det(A) = ad - bc \quad (6)$$

entonces $\lambda_1 = \frac{T + \sqrt{T^2 - 4D}}{2}$, $\lambda_2 = \frac{T - \sqrt{T^2 - 4D}}{2}$ son los autovalores de la ecuación (3), además se cumple que

$$\lambda_1 + \lambda_2 = T \quad (7)$$

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = D \quad (8)$$

Atendiendo a los diferentes valores de T y D , se tiene:

- 1) Si $T^2 - 4D < 0$, entonces los autovalores λ_1 y λ_2 son complejos conjugados con parte real igual a $T/2$. Se tienen los siguientes casos:
 - a) Los autovalores son imaginarios puros si $T = 0$ (centro y estabilidad).
 - b) Los autovalores tienen parte real negativa cuando $T < 0$ (foco y estabilidad asintótica).
 - c) Los autovalores tienen parte real positiva cuando $T > 0$ (foco e inestabilidad).
- 2) Si $D < 0$ entonces se tiene $T^2 - 4D > 0$. En este caso los autovalores son reales y de distinto signo, lo que significa que se presentarán puntos silla e inestabilidad.
- 3) Si $D > 0$ y $T^2 - 4D \geq 0$, entonces los autovalores son reales y tienen el mismo signo que T . Los casos posibles son:
 - a) Si $T < 0$, pero $T^2 - 4D = 0$ los autovalores son iguales y negativos (atractor y estabilidad asintótica) o $T^2 - 4D > 0$ los autovalores son reales, distintos y negativos (nodo atractor y estabilidad asintótica).
 - b) $T > 0$, pero $T^2 - 4D = 0$ los autovalores son iguales y positivos (repulsor e inestabilidad) o $T^2 - 4D > 0$ los autovalores son reales, distintos y positivos (nodo repulsor e inestabilidad).
- 4) Si $D = 0$, entonces uno o ambos autovalores son cero.
 - a) Si $T = 0$ (origen), entonces ambos autovalores son cero (recta de puntos de equilibrio y trayectorias paralelas a dicha recta).
 - b) Si $T > 0$, entonces un autovalor es cero y el otro es positivo (recta de puntos de equilibrio inestables y trayectorias rectas que se alejan de la recta de puntos de equilibrio).
 - c) Si $T < 0$, entonces un autovalor es cero y el otro es negativo (recta de puntos de equilibrio asintóticamente estables y trayectorias rectas que tienden a la recta de puntos de equilibrio).

Podemos mostrar la clasificación de los planos fase y los puntos de equilibrio en la Fig. 1

III. PLANTEAMIENTO DEL MODELO

El objeto principal de este modelo se basa en examinar los sentimientos amorosos entre dos individuos, centrándose exclusivamente en las emociones que comparten mutuamente, sin tomar en cuenta ningún otro elemento adicional. Para ello, Strongatz [3] considera una historia de amor entre Romeo y Julieta, donde $R(t)$ es el amor de Romeo por Julieta en el tiempo t con un valor positivo que significa amor y un valor negativo que significa odio y de manera similar $J(t)$ es el amor de Julieta por Romeo.

Consideremos los sentimientos de Romeo hacia Julieta, donde se pueden dar dos situaciones:

- 1) La ausencia de los sentimientos de ella hacia él, es decir Julieta es voluble, por lo que simplemente tendremos

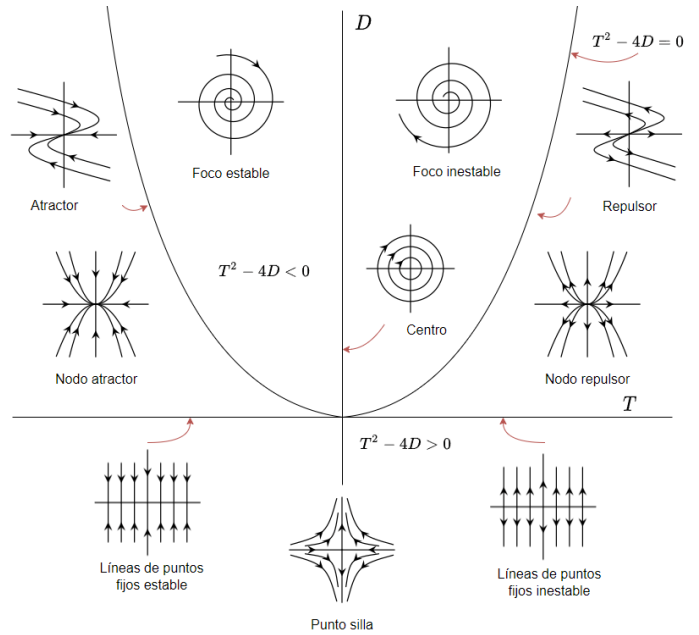


Fig. 1. Plano T - D con todas las posibilidades de planos fase [4].

en cuenta el amor u odio de Romeo hacia Julieta, esto es:

$$\frac{dR}{dt} = aR(t) \quad (9)$$

donde la constante a define la reacción de Romeo hacia sus propios sentimientos. Si $a > 0$ significa que cuanto más la ama Romeo, más quiere Julieta huir y esconderse. Por otro lado, si $a < 0$ significa que cuando Romeo se desanima y retrocede, Julieta comienza a encontrarlo extrañamente atractivo.

- 2) Julieta tiene sentimientos hacia Romeo (positivos o negativos), considerando esta situación la ecuación (9) toma la siguiente forma:

$$\frac{dR}{dt} = aR(t) + bJ(t) \quad (10)$$

donde la constante b define la reacción de Romeo ante los sentimientos que tiene Julieta hacia él. Si $b > 0$ significa que Romeo imitará los sentimientos de Julieta hacia él, pero si $b < 0$, actuará de forma contraria a ella.

Similarmente si consideremos los sentimientos de Julieta hacia Romero, donde se pueden dar dos posibilidades.

Por lo tanto, el modelo lineal planteado es el siguiente.

$$\begin{aligned} \frac{dR}{dt} &= aR(t) + bJ(t) \\ \frac{dJ}{dt} &= cR(t) + dJ(t) \end{aligned} \quad (11)$$

donde los parámetros a , b , c y d pueden tener cualquier signo. Una selección de signos específico representa un estilo romántico.

A. Estilos Románticos

Romeo puede exhibir uno de cuatro estilos románticos dependiendo de los signos de a y b , con nombres adaptados sugeridos por Strogatz [3] y sus alumnos:

- 1) Castor ansioso (o entusiasta): $a > 0$, $b > 0$ (Romeo se siente alentado tanto por sus propios sentimientos como por los de Julieta).
- 2) Nerd narcisista (o el narcisista): $a > 0$, $b < 0$ (Romeo quiere más de lo que siente, pero se aleja de los sentimientos de Julieta).
- 3) Amante cauteloso (o seguro): $a < 0$, $b > 0$ (Romeo se aleja de sus propios sentimientos, pero los de Julieta lo alientan).
- 4) Ermitaño (o el solitario): $a < 0$, $b < 0$ (Romeo se aleja tanto de sus propios sentimientos como de los de Julieta).

Los amantes cautelosos son el tipo de personas más común, para el caso de Julieta se puede clasificar exactamente de la misma manera, en total se pueden crear 16 tipos distintos de parejas, con comportamientos totalmente diferentes:

B. Punto de Equilibrio

Calculando los puntos de equilibrio de la ecuación (11) tenemos

$$aR(t_0) + bJ(t_0) = 0 \quad (12)$$

$$cR(t_0) + dJ(t_0) = 0 \quad (13)$$

resolviendo la ecuación (12) y (13) y considerando que $\det A \neq 0$ se obtiene el único punto de equilibrio $(R(t_0), J(t_0)) = (0, 0)$, correspondiente a la apatía mutua, o una meseta amorosa.

los autovalores de la ecuación (11) se calculan similar a la sección II-D

IV. RESULTADOS

Considerando 4 casos especiales en los que se analiza los diferentes relaciones, teniendo en cuenta los autovalores, los cuales dependen de los parámetros a , b , c y d y las condiciones iniciales, tal como fue propuestos originalmente por [3]. Las figuras fueron obtenidas con software Matlab.

A. No hace caso a su corazón

Supongamos que tanto Romeo como Julieta no están en contacto con sus propios sentimientos y solo responden al otro, es decir $a = d = 0$, luego reemplazando en (5), tenemos

$$T = 0 \quad (14)$$

Finalmente reemplazando a la ecuación (7) tenemos.

$$\lambda_1 = -\lambda_2 \quad (15)$$

Luego, son posibles tres casos.

- 1) Dos entusiastas: $b > 0$ y $c > 0$, luego usando la ecuación (6), tenemos

$$D = -bc < 0 \quad (16)$$

Además

$$T - 4D = 0 - 4(-bc) > 0 \quad (17)$$

Por tanto considerando la ecuación (16) que coincide con la parte 2) de sección II-D, significa que el punto crítico presenta una silla e inestabilidad, es decir esta relación terminará con amor u odio mutuo, en función de las condiciones iniciales, tal como se puede verificar en Fig. 2 el correspondiente plano de fase para $a = 0$, $b = 3$, $c = 5$ y $d = 0$

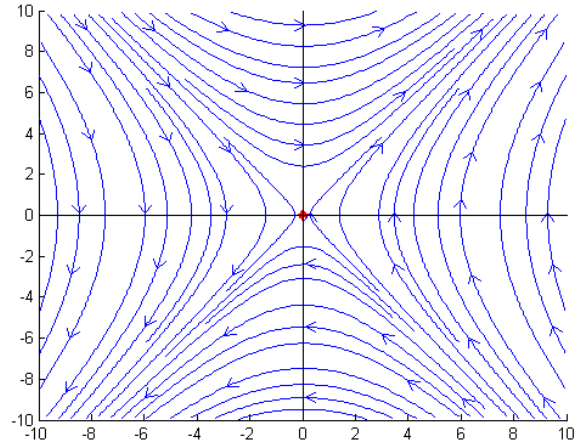


Fig. 2. Plano de planos fase ($b = 3$, $c = 5$)

- 2) Dos narcisistas: $b < 0$ y $c < 0$, luego usando la ecuación (6), tenemos $D < 0$, significaría también que el punto crítico presenta una silla e inestabilidad, es decir esta relación terminará con uno de ellos enamorado y el otro odia, en función de las condiciones iniciales, tal como se puede verificar en Fig. 3 el correspondiente plano de fase para $a = 0$, $b = -3$, $c = -5$ y $d = 0$

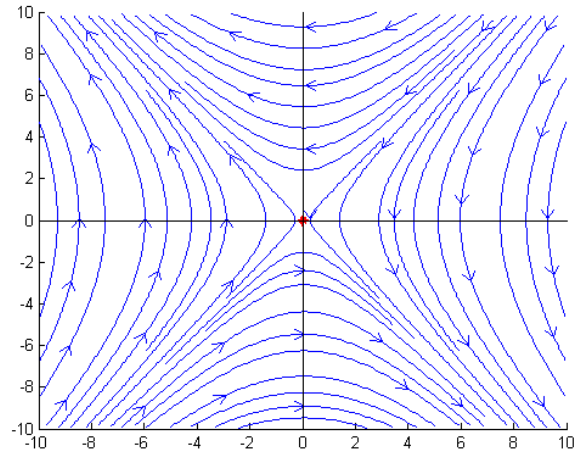


Fig. 3. Plano de planos fase ($b = -3$, $c = -5$)

- 3) El narcisista y el entusiasta: $bc < 0$, luego usando la ecuación (6), tenemos $D = -bc > 0$ es decir

$$T^2 - 4D = 0 - 4D < 0 \quad (18)$$

Por tanto considerando la ecuación (14) y (18) que coincide con la parte 1-a de la sección II-D, significa que el punto crítico presenta un centro, en otras palabras esta relación terminará con un ciclo interminable de amor-odio, tal como se puede verificar en Fig. 4 el correspondiente plano de fase para $a = 0$, $b = -3$, $c = 4$ y $d = 0$

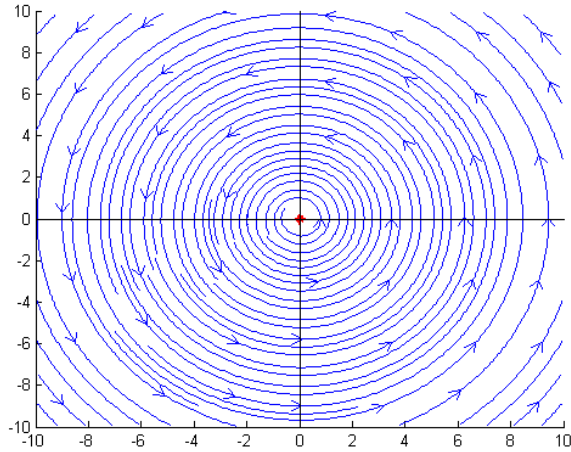


Fig. 4. Plano de planos fase ($b = -3$, $c = 4$)

B. Fuego y hielo

Si dos personas son exactamente opuestas, es decir $c = -b$ y $a = -d$ (entusiasta y solitario) o (narcisista y seguro), luego hay dos posibilidades y reemplazando en la ecuación (5), tenemos

$$T = 0 \quad (19)$$

y reemplazando a la ecuación (7) tenemos

$$\lambda_1 = -\lambda_2 \quad (20)$$

Ademas sustituyendo en la ecuación (6), tenemos

$$D = a(-a) - b(-b) = b^2 - a^2 \quad (21)$$

Considerando la ecuación (21) también hay dos posibilidades, por lo que en realidad habrá cuatro combinaciones:

- 1) Entusiasta y solitario: ($a > 0$, $b > 0$) y ($d < 0$, $c < 0$)
 - a) $|a| > |b|$ es decir cuando el individuo responde más hacia sus sentimientos que hacia los que tienen por él, luego usando la ecuación (21), tenemos

$$D < 0 \quad (22)$$

esto coincide con la condición de la parte 2) de la sección II-D, significa que el punto crítico presenta una silla e inestabilidad, es decir esta relación

terminará en un conflicto (uno de ellos enamorado de su pareja mientras que esta le odia), tal como se puede verificar en Fig. 5 el correspondiente plano de fase para $a = 5$, $b = 3$, $c = -3$ y $d = -5$

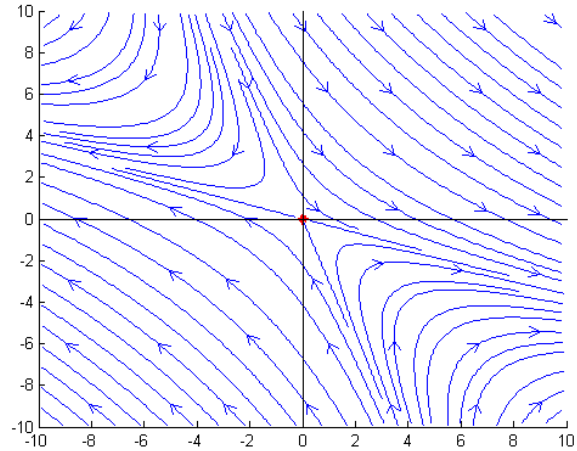


Fig. 5. Plano de planos fase ($a = 5$, $b = 3$)

- b) $|a| < |b|$ es decir cuando el individuo responde más hacia los sentimientos que tienen por él que hacia los suyos propios, luego usando la ecuación (21), tenemos $D > 0$ es decir

$$T - 4D = 0 - 4D < 0 \quad (23)$$

considerando la ecuación (28) y (23), esto coincide con la condición de la parte 1-a de la sección II-D, significa que el punto crítico presenta un centro, es decir esta relación terminará en un ciclo interminable de odio y amor, tal como se puede verificar en Fig. 6 el correspondiente plano de fase para $a = 3$, $b = 5$, $c = -5$ y $d = -3$

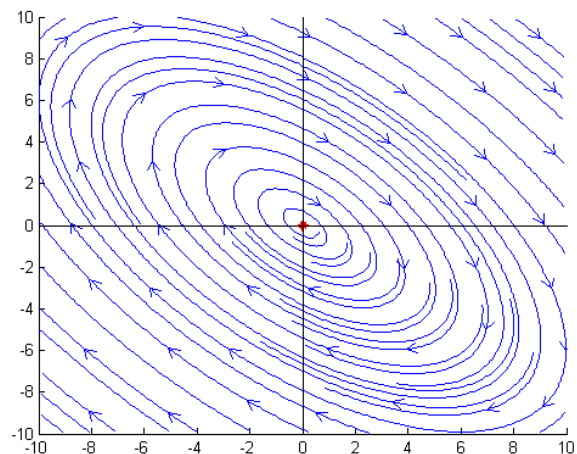


Fig. 6. Plano de planos fase ($a = 3$, $b = 5$)

2) narcisista y seguro: ($a > 0, b < 0$) y ($d < 0, c > 0$)

- a) $|a| > |b|$ es decir cuando el individuo responde más hacia sus sentimientos que hacia los que tienen por él, luego usando la ecuación (21), tenemos

$$D < 0 \quad (24)$$

esto coincide con la condición de la parte 2) de la sección II-D, significa que el punto crítico presenta una silla e inestabilidad, es decir esta relación terminará en profundamente enamorada o en una guerra total (amor o en odio mutuo), tal como se puede verificar en Fig. 7 el correspondiente plano de fase para $a = 5, b = -3, c = 3$ y $d = -5$

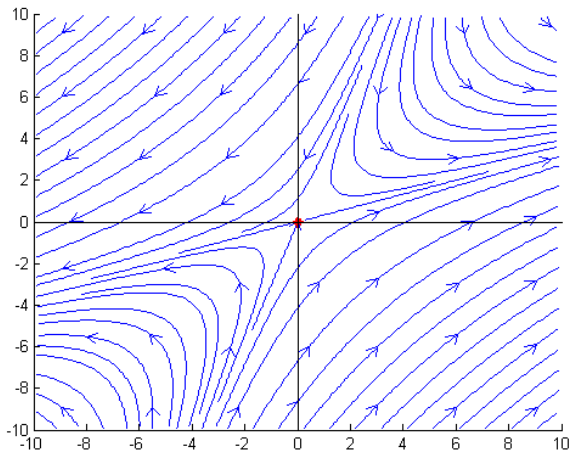


Fig. 7. Plano de planos fase ($a = 5, b = -3$)

- b) $|a| < |b|$ es decir cuando el individuo responde más hacia los sentimientos que tienen por él que hacia los suyos propios, luego usando la ecuación (21), tenemos $D > 0$ es decir

$$T - 4D = 0 - 4D < 0 \quad (25)$$

considerando la ecuación (28) y (25), esto coincide con la condición de la parte 1-a de la sección II-D, significa que el punto crítico presenta un centro, es decir esta relación terminará nuevamente en un ciclo interminable de odio y amor, tal como se puede verificar en Fig. 8 el correspondiente plano de fase para $a = 3, b = -5, c = 5$ y $d = -3$

Entonces “los opuestos se atraen”, pero la mayoría de las veces terminan odiándose.

C. Alma gemela

Por otro lado, vamos a considerar a dos personas exactamente iguales en el amor, es decir, $c = b$ y $d = a$. En este nuevo caso, existirán 4 posibles parejas formadas por dos entusiastas, dos narcisistas, dos seguros o dos solitarios y reemplazando en la ecuación (5), tenemos

$$T = 2a \quad (26)$$

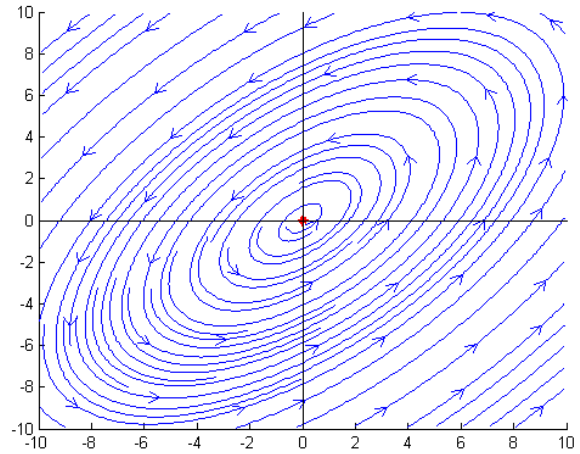


Fig. 8. Plano de planos fase ($a = 3, b = -5$)

Ademas sustituyendo en la ecuación (6), tenemos

$$D = a(a) - b(b) = a^2 - b^2 \quad (27)$$

Considerando la ecuación (27) también hay dos posibilidades, pero los autovalores son $\lambda_{1,2} = a \pm |b|$ es decir no depende del signo del b , por lo que en realidad habrá cuatro combinaciones:

- 1) entusiasta o narcisistas: $a > 0$

- a) $|a| > |b|$ es decir cuando el individuo responde más hacia sus sentimientos que hacia los que tienen por él, luego usando las ecuaciones (26) y (27), tenemos $T > 0$ y $D > 0$, ademas

$$T^2 - 4D = (2a)^2 - 4(a^2 - b^2) = 4b^2 \quad (28)$$

esto coincide con la condición de la parte 3-b de la sección II-D, significa que si $b = 0$ el punto crítico presenta un repulsor e inestabilidad, es decir esta relación terminará en conflicto, tal como se puede verificar en Fig. 9 el correspondiente plano de fase para $a = 2, b = 0, c = 0$ y $d = 2$, pero si $b \neq 0$ el punto crítico presenta un nodo repulsor e inestabilidad, es decir esta relación terminará en amor-odio mutuo, tal como se puede verificar en Fig. 10 el correspondiente plano de fase para $a = 5, b = 3, c = 3$ y $d = 5$

- b) $|a| < |b|$ es decir cuando el individuo responde más hacia los sentimientos que tienen por él que hacia los suyos propios, luego usando la ecuaciones (26) y (27), tenemos $T > 0$ y $D < 0$, ademas $0 < |a| < |b|$, entonces

$$T^2 - 4D = 4b^2 > 0 \quad (29)$$

considerando la ecuación (29), esto coincide con la condición de la parte 2) de la sección II-D, significa que el punto crítico presenta una silla e inestable, es decir la pareja no alcanzará la apatía mutua, tal como se puede verificar en Fig. 11 el

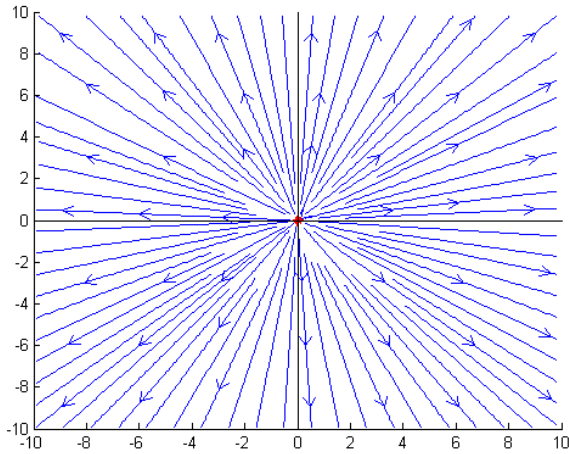


Fig. 9. Plano de planos fase ($a = 2, b = 0$)

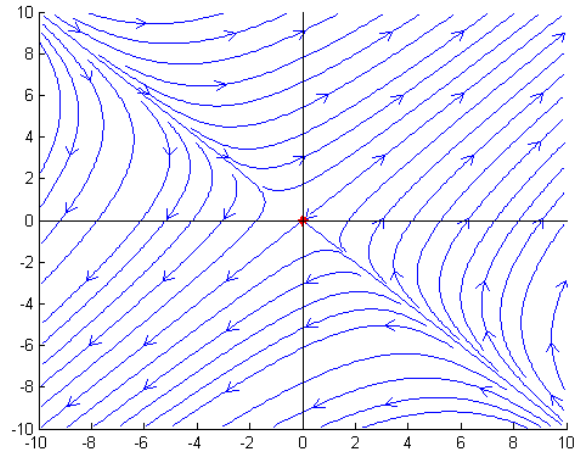


Fig. 11. Plano de planos fase ($a = 3, b = 5$)

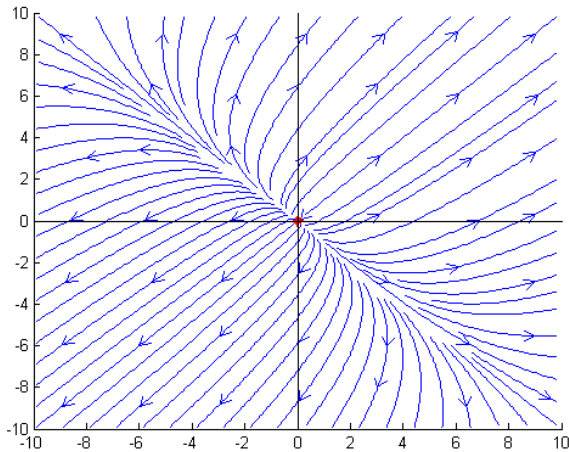


Fig. 10. Plano de planos fase ($a = 5, b = 3$)

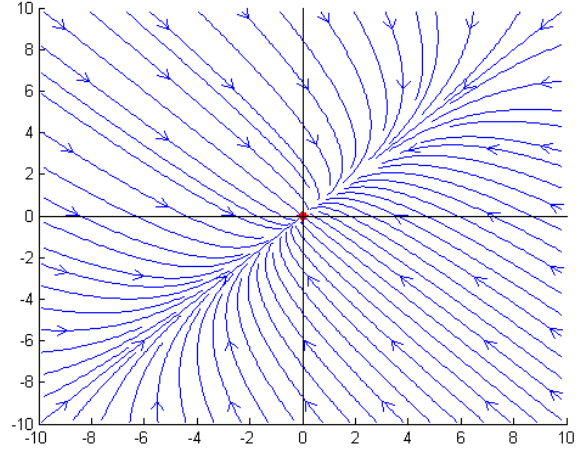


Fig. 12. Plano de planos fase ($a = -5, b = 3$)

correspondiente plano de fase para $a = 3, b = 5, c = 5$ y $d = 3$

2) seguro o solitario: $a < 0$

a) $|a| > |b|$ es decir cuando el individuo responde más hacia sus sentimientos que hacia los que tienen por él, luego usando las ecuaciones (26) y (27), tenemos $T < 0$ y $D > 0$, además $|b| < |a| < 0$

$$T^2 - 4D = (2a)^2 - 4(a^2 - b^2) = 4b^2 > 0 \quad (30)$$

esto coincide con la condición de la parte 3-a de la sección II-D, significa que el punto crítico presenta un nodo atractor y estabilidad asintótica, es decir Romeo y Julieta terminan en un estado de apatía, tal como se puede verificar en Fig. 12 el correspondiente plano de fase para $a = -5, b = 3, c = 3$ y $d = -5$

b) $|a| < |b|$ es decir cuando el individuo responde más hacia los sentimientos que tienen por él que hacia los suyos propios, luego usando las ecuaciones (26) y (27), tenemos $T < 0$ y $D < 0$, por otro lado $a < 0$ es decir $|a| > 0$ entonces $0 < |a| < |b|$, por tanto

$$T^2 - 4D = 4b^2 > 0 \quad (31)$$

esto coincide con la condición de la parte 2) de la sección II-D, significa que el punto crítico presenta una silla e inestable, es decir la pareja terminará en amor o en odio mutuo sin límite, tal como se puede verificar en Fig. 13 el correspondiente plano de fase para $a = -3, b = 5, c = 5$ y $d = -3$

D. Romeo, el robot

Este es el último caso que analizaremos en este modelo; se trata de un caso poco común. Suponemos que los sentimientos

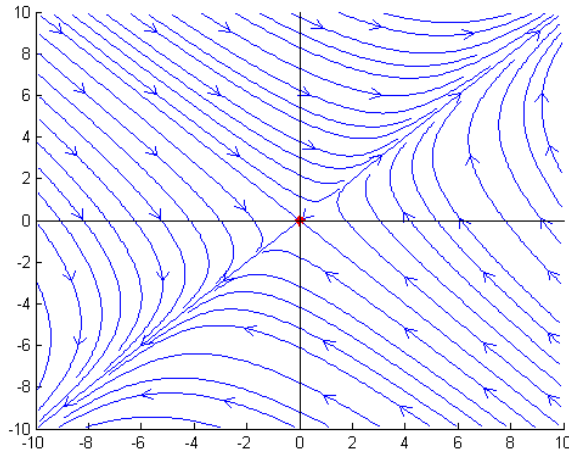


Fig. 13. Plano de planos fase ($a = -3, b = 5$)

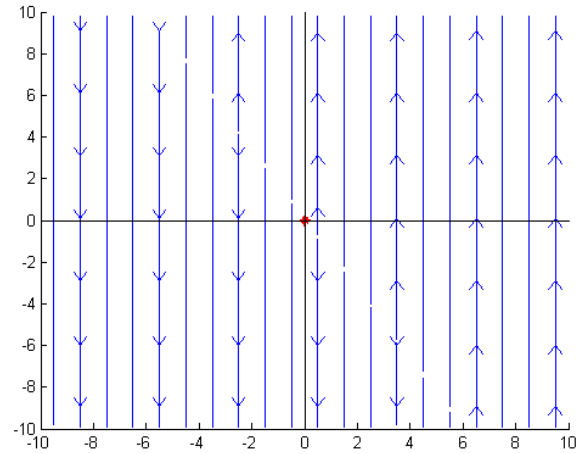


Fig. 14. Plano de planos fase ($c = 5, d = 3$)

de Romeo hacia Julieta no se ven afectados ni por sus propios sentimientos ni por los de Julieta, esto es $R(t)$ es constante $a = b = 0$, reemplazando en la ecuaciones (5) y (6), tenemos $T = d$ y $D = 0$ y finalmente reemplazando estos valores en las ecuaciones (7) y (8), tenemos

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = d$$

asimismo, en este caso el punto crítico es $(R(t_0), -\frac{c}{d}R(t_0))$. por tanto hay dos combinaciones

- 1) Cuando $d > 0$ y $c > 0$ o $c < 0$, luego $T > 0$ que coincide con la parte 4-b de la sección II-D, lo que significa que la recta del puntos críticos es inestable y trayectorias rectas que se alejan de la recta de puntos de equilibrio, es decir dependiendo de las condiciones iniciales, ésta relación acabará con Julieta amando u odiando a Romeo sin fin, tal como se puede verificar en Fig.14 el correspondiente plano de fase para $a = 0, b = 0, c = 5$ y $d = 3$
- 2) Cuando $d < 0$ y $c > 0$ o $c < 0$, luego $T < 0$ que coincide con la parte 4-b de la sección II-D, lo que significa que la recta de puntos críticos es asintóticamente estables y trayectorias rectas que tienden a la recta de puntos de equilibrio, es decir dependiendo de las condiciones iniciales, siendo ella una amante segura, siempre se alcanza un equilibrio, tanto de odio como de amor, tal como se puede verificar en Fig.15 el correspondiente plano de fase para $a = 0, b = 0, c = 5$ y $d = -3$

V. DISCUSIÓN

Se observa que, dependiendo de la personalidad de cada individuo, las relaciones tienen un destino u otro, como era de esperar. Este modelo contiene unas ecuaciones muy sencillas, ya que solo toma en cuenta los sentimientos de la pareja [3], pero se puede obtener modelos más aplicables a las situaciones cotidianas [4]. Sin embargo, en este modelo se da por hecho

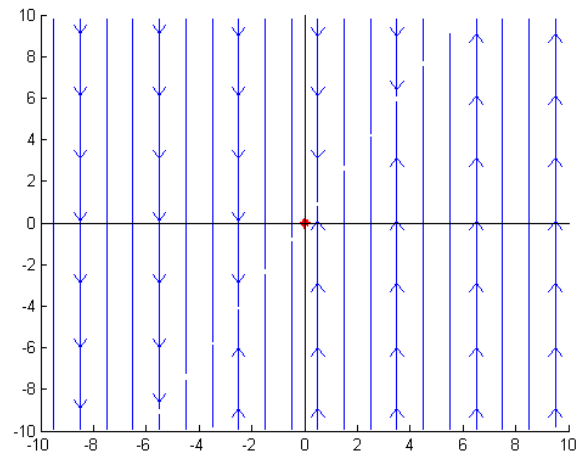


Fig. 15. Plano de planos fase ($c = 5, d = -3$)

que tanto Romeo como Julieta responden de forma mecánica, sin dejarse influenciar por nada que ocurra en el exterior y llegando a amar u odiar hasta el infinito. En cambio, la realidad es que, en general, somos muy influenciados y espontáneos.

VI. CONCLUSIONES

En general, hemos observado cómo las relaciones toman diferentes direcciones dependiendo de la personalidad de cada individuo, sus parámetros y condiciones iniciales. Al analizar el modelo inicial, que solo considera los sentimientos de Romeo hacia Julieta y el amor correspondiente de Julieta, nos encontramos con resultados más complejos de lo anticipado. No obstante, este modelo no es completamente realista, en parte porque un sistema lineal no es la forma más precisa de medir el amor. Hemos asumido que los individuos, a pesar de ser influenciados, responden de manera mecánica, sin ser afectados por factores externos.

Realizamos las simulaciones del modelo matemático

dinámicas de amor mediante sistema de ecuaciones diferenciales acopladas usando software Matlab, para diferentes valores de parámetros a , b , c y d , así representar mejor este fenómeno.

AGRADECIMIENTOS

Estamos muy agradecidos con los profesores del departamento de Físico-Matemáticas, por su apoyo y colaboración a la presente investigación llevada a cabo en la Universidad Nacional del Altiplano-Puno.

Agradecemos también al Fondo Especial de Desarrollo Universitario (FEDU) de la Universidad Nacional del Altiplano por su financiamiento.

REFERENCIAS

- [1] W. Furman, L.S. Hand, "the slippery nature of romantic relationships: issues in de nition and dierentiation, in Romance and Sex in Adolescence and Emerging Adulthood: Risks and Opportunities", (A. Crouter and A. Booth), Erlbaum, Mahwah, NJ, 2006, pp. 171-78.
- [2] I. Stange, A. Ortega, A. Moreno, y C. Gamboa, "Aproximación al concepto de pareja. Psicología para América Latina", (29), 2017, pp. 7-22.
- [3] S.H. Strogatz, "Love affairs and diferencial equations". Math. Magazine, vol. 61, pp. 35, Febrero 1988.
- [4] S.H. Strogatz, Nonlinear dynamics and chaos: with applications in to physics, biology, chemistry and engineering. Addison-Wesley, Reading, 1994.
- [5] J.C. Sprott, "Dynamical models of love". Nonlinear Dynamics, Psychology, and Life Sciences, vol. 8, pp. 303-313, 2004.
- [6] R. Benazic, Tópicos de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Universidad Nacional de Ingenierías, 2006.
- [7] V. Munoa, "Modelos dinámicos para las relaciones románticas," Trabajo fin de grado, Universidad del País Vasco, 2020.
- [8] L. Perko, *Differential Equations and Dynamical Systems*. Springer Verlag, New York, 1991.
- [9] J. Sotomayor, *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*. Euclides. Brasil, 1979.
- [10] J. Stephen, R. Gregson, *Nonlinear Dynamical Systems Analysis for the Behavioral Sciences Using Real Data*. Taylor y Francis Group. United States of America, 2011.
- [11] R. J.Sternberg, "The triangular theory of love". Psychological Review, and Life Sciences, vol. 2, pp. 119-135, 1986.
- [12] N. Bielczyk, M. Bodnar and U. Foryś, "Delay can stabilize: Love affairs dynamics". Applied Mathematics and Computation, vol. 219(8), pp. 3923-3937, 2012.
- [13] K. Ghosh, "Love between Two Individuals in a Romantic Relationship: A Newly Proposed Mathematical Model". Proceedings of The 7th IMT-GT International Conference on Mathematics, Statistics and its Applications, vol. 219(8), pp. 97-104, 2011.
- [14] I. Elishakoff, "Differential Equations of Love and Love of Differential Equations". Journal of Humanistic Mathematics, vol. 9(2), pp. 226-246, 2019.
- [15] M. Hirsh, *Ecuaciones Diferenciales, Sistemas Dinámico y Álgebra Lineal*. Alianza Editorial. Madrid, 1983.