

Laminar Flow Simulation Between Parallel Flat Plates using OpenFOAM

Hector Espinoza-Roman, Dr.¹, Juan Cuellar-Mendoza, Mg.³, Libis Valdez-Cervantes, Dr.^{1,2}

¹Fundación Universitaria Antonio de Arévalo UNITECNAR, Colombia, hector.espinoza@unitecnar.edu.co,
decano.fadi@unitecnar.edu.co

²LACCEI Latin American and Caribbean Consortium of Engineering Institutions, USA

³Instituto Técnico Nacional de Comercio Simón Rodríguez INTENALCO, Colombia, redeslab@intenalco.edu.co

Abstract– Internal flow is a type of flow present in many industrial applications. A particular case of internal flow is the flow between parallel flat plates also known as plane channel flow. This is a bidimensional flow which has analytical solution for the case of fully developed flow. In the present work this flow is simulated and compared with analytical solution. The finite volume method was used by means of open-source software OpenFOAM. Due to the geometry of the problem a structured mesh was used. In addition, a mesh sensitivity analysis was done which serves as a guide for the elaboration of meshes for the simulation of laminar flow in internal flow in general. The pressure in the flow direction, velocity profile, friction factor and maximum velocity to average velocity ratio were determined. Simulation results are perfectly in agreement with the analytical solution.

Keywords: velocity profile, steady state, computational fluid dynamics

Simulación de Flujo Laminar entre Placas Planas Paralelas usando OpenFOAM

Hector Espinoza-Roman, Dr.¹, Juan Cuellar-Mendoza, Mg.³, Libis Valdez-Cervantes, Dr.^{1,2}

¹Fundación Universitaria Antonio de Arévalo UNITECNAR, Colombia, hector.espinoza@unitecnar.edu.co, decano.fadi@unitecnar.edu.co

²LACCEI Latin American and Caribbean Consortium of Engineering Institutions, USA

³Instituto Técnico Nacional de Comercio Simón Rodríguez INTENALCO, Colombia, redeslab@intenalco.edu.co

Resumen – El flujo interno es un tipo de flujo presente en muchas aplicaciones industriales. Un caso particular de flujo interno es el flujo entre placas planas paralelas también conocido como flujo plano en canal. Este es un flujo bidimensional que tiene solución analítica para el caso de flujo completamente desarrollado. En el presente trabajo se simula este flujo y se compara con la solución analítica. Se utilizó el método de volúmenes finitos mediante el software código abierto OpenFOAM. Se usó una malla estructurada por la geometría del problema. Además, se hizo un análisis de sensibilidad a la malla que sirve como guía para elaborar mallas para simulación de flujo laminar en flujo interno. Se determinó la presión en la dirección de flujo, el perfil de velocidad, el factor de fricción y la relación velocidad máxima a promedio. Los resultados obtenidos de la simulación concuerdan con la solución analítica.

Palabras Clave – perfil de velocidad, estado estable, dinámica de fluidos computacional

I. INTRODUCCIÓN

El flujo en ductos y tuberías está presente en muchas aplicaciones industriales de la ingeniería mecánica, química y civil. Se conoce como flujo interno, flujo de Poiseuille o flujo de Hagen-Poiseuille. Además, el modelo de fluido incompresible Newtoniano es muy usado para modelar o simular fluidos comunes como el agua [12]. En el caso particular de placas planas paralelas separadas una distancia muy pequeña el flujo tiende a un flujo de Stokes conocido como flujo de Hele-Shaw [14].

Ente los aspectos que influyen el flujo está la densidad del fluido, la viscosidad dinámica del fluido, la forma y tamaño de la sección transversal de la tubería y la longitud [4], [24], [30].

A. Enfoques de Análisis

El análisis del flujo en tuberías se puede hacer de varias formas: enfoque analítico, enfoque experimental y enfoque computacional.

En el enfoque analítico se resuelven las ecuaciones del flujo de manera exacta y se obtiene una solución analítica. Este enfoque tiene la ventaja de que se gana conocimiento profundo del fenómeno y se obtiene una solución exacta. El desafío de este enfoque es que solo se puede aplicar a geometrías o casos sencillos en los que se pueda hallar una solución exacta [10], [22], [23].

En el enfoque experimental se miden valores de interés realizando experimentos en el laboratorio [3], [21], [26], [29], [32]. Este enfoque tiene la ventaja que es lo más real posible.

Los desafíos de este enfoque radican en el costo de cada experimento y de los instrumentos de medición.

En el enfoque computacional se resuelven las ecuaciones del flujo de forma aproximada usando una computadora [1], [8], [17], [25], [28]. La solución obtenida se acerca cada vez más a la exacta a medida que se usan más elementos en la malla computacional. La ventaja de este enfoque es que se puede aplicar a diversas geometrías y estados estacionarios o transientes. Los desafíos de este enfoque consisten en tener un software de simulación suficientemente verificado, validado y con la física necesaria implementada [2], [18].

B. Dinámica de Fluidos Computacional

En este artículo emplearemos el enfoque computacional mediante OpenFOAM v1812 [20]. OpenFOAM es un software de código abierto que implementa el método de volúmenes finitos mediante licencia GPL (GNU General Public License). El uso de software código abierto con licencia copy-left es indispensable para la ciencia abierta en el campo de la simulación computacional. Un flujo incompresible (densidad constante) monofásico isotérmico en estado estable (también conocido como estado estacionario) se puede describir con el vector velocidad $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = (u(\mathbf{x}), v(\mathbf{x}), w(\mathbf{x}))$ y la presión $p(\mathbf{x})$ donde $\mathbf{x} = (x, y, z)$ es cualquier punto del espacio. La velocidad y presión deben cumplir las ecuaciones de Navier-Stokes.

C. Flujo entre placas planas

El flujo en canales, ductos y tuberías de sección transversal arbitraria se caracteriza por el diámetro hidráulico D_h definido como

$$D_h = \frac{4A}{p_c}, \quad (1)$$

donde A es el área de la sección transversal y p_c es el perímetro de la sección transversal. Para placas planas paralelas separadas una distancia c se tiene que

$$D_h = 2c. \quad (2)$$

Algunos autores definen $D_h = c$ [16] y otros lo definen como $D_h = c/2$ [15] con las respectivas modificaciones de las ecuaciones que contienen este término. En este artículo se usa la definición (2).

En la Fig. 1 se puede ver la geometría del ducto donde c es la separación entre placas planas, d es el ancho de las placas y L es la longitud de las placas.

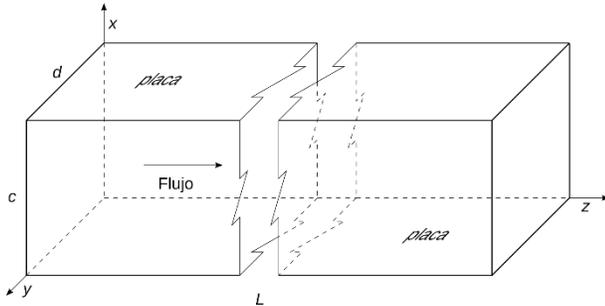


Fig. 1 Geometría del ducto.

La velocidad promedio V del fluido a través de una sección transversal A de forma arbitraria se define como

$$V = \frac{1}{A} \int_A v \cdot n \, dA, \quad (3)$$

donde dA es el diferencial de área, n es el vector normal unitario a dA y la integral representa una integral de superficie.

El flujo de un fluido se puede cuantificar por el caudal o flujo volumétrico Q definido como

$$Q = V A. \quad (4)$$

Para el caso de flujo bidimensional se usa el flujo volumétrico por unidad de ancho definido como

$$q = \frac{Q}{a} = V c. \quad (5)$$

Además, el régimen de flujo se caracteriza por el número de Reynolds (Re) definido como

$$Re = \frac{\rho V D_h}{\mu}, \quad (6)$$

donde ρ es la densidad del fluido y μ es su viscosidad dinámica. Nótese que esta definición usa como velocidad a la velocidad promedio V [6]. Existen otras definiciones que usan la velocidad máxima w_{max} [15].

El número de Reynolds permite clasificar un flujo como laminar, de transición y turbulento. En la literatura se pueden encontrar varios valores del número de Reynolds debajo del cual el flujo entre placas planas paralelas es laminar. Algunos valores son obtenidos de análisis teórico y otros de experimentos. Según la notación y definiciones presentadas en este artículo, el flujo es laminar para $Re < 2800$ basado en experimentos según [11]. Por otro lado, según [15], el flujo sería laminar para $Re < 15392$ basado en análisis teórico. Otro estudio teórico define la transición de laminar a turbulento a $Re = 2380$ [13]. Cabe resaltar que el valor depende de la definición de D_h y la velocidad que se use en la definición del número de Reynolds como se mencionó anteriormente dando como resultado valores de número de Reynolds crítico distintos numéricamente, pero equivalentes. Por ejemplo, el valor de

Reynolds definido según sus respectivas definiciones es 1400 [11], 5772 [15] y 1190 [13].

La viscosidad del fluido también se puede expresar como viscosidad cinemática ν definida como

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}. \quad (7)$$

La presión también se puede expresar como presión cinemática P definida como

$$P = \frac{p}{\rho}. \quad (8)$$

Otro aspecto importante en el flujo es el concepto de flujo en desarrollo y flujo completamente desarrollado. Se dice que un flujo está completamente desarrollado cuando su perfil de velocidad se mantiene constante en la dirección de flujo. Por otro lado, el flujo está en desarrollo cuando el perfil de velocidad cambia en la dirección de flujo y se puede cuantificar por medio de la longitud de entrada L_e definida para flujo laminar entre placas planas [16] como

$$L_e = 0.0125 Re D_h. \quad (9)$$

La caída de presión se puede calcular como

$$\Delta p = f \frac{L}{D_h} \rho \frac{V^2}{2}, \quad (10)$$

donde L es la longitud de la tubería y f es el factor de fricción de Darcy-Weisbach. Algunas definiciones usan el factor de fricción de Fanning ($f/4$). El factor de fricción se encuentra comúnmente en forma gráfica en el diagrama de Moody. Sin embargo, para flujo laminar entre placas planas [30] se tiene que

$$f Re = 96. \quad (11)$$

El perfil de velocidad $w(x)$ para flujo laminar completamente desarrollado entre placas planas [30] se puede expresar como

$$w(x) = w_{max} \left(1 - \frac{\left(\frac{x - \frac{c}{2}}{\frac{c}{2}} \right)^2}{\left(\frac{c}{2} \right)^2} \right). \quad (12)$$

Finalmente, la relación de velocidades para este flujo según [30] es

$$\frac{w_{max}}{V} = \frac{3}{2} = 1.5. \quad (13)$$

Se han encontrado soluciones analíticas para flujo laminar en desarrollo [7], aunque en este artículo estamos concentrados en el caso de flujo desarrollado.

II. METODOLOGÍA

A continuación, se describe la metodología usada para definir la geometría, imponer condiciones de contorno, generar la malla, simular el flujo y visualizarlo. Para mayor detalle el lector puede acceder a los archivos anexos de la simulación en OpenFOAM. Se decidió hacer la simulación a $Re = 960$ de tal forma que no sea tan bajo ni tan cercano al límite 2000. La

intención es siempre tener números sin tantos decimales, no unitarios y bien definidos en los datos y en los resultados. La idea de tener valores no unitarios es que influyan efectivamente en los resultados cambiando su valor numérico. La simulación de este artículo se define por las siguientes magnitudes fijas tomadas como constantes tal como se ve en la Tabla I: separación de las placas planas paralelas, longitud de las placas, velocidad promedio, densidad y viscosidad dinámica. Además, hay otras magnitudes derivadas de las anteriores tales como viscosidad cinemática, diámetro hidráulico, número de Reynolds, flujo volumétrico y flujo bidimensional. Por otro lado, las cosas que se calculan de la simulación son: campo de velocidad, campo de presión, caída de presión por unidad de longitud y velocidad máxima.

TABLA I
VALORES DE DATOS Y MAGNITUDES DERIVADAS

Dato	Valor	Magnitud Derivada	Valor
c	0.3 m	ν	2E-3 m ² /s
d	0.5 m	D_h	0.6 m
L	12 m	Re	960
V	3.2 m/s	Q	0.48 m ³ /s
ρ	2 kg/m ³	q	0.96 m ² /s
μ	0.004 Pa s	-	-

A. Geometría

La geometría del caso y su ubicación con respecto a los ejes coordenados se muestra en la Fig. 1. El caso consiste en dos placas planas paralelas separadas una distancia c con una longitud L . La dimensión en el eje y se toma como ($d = 0.5$ m) debido a que en OpenFOAM la malla en 2D es realmente una malla en 3D con un elemento en su espesor. El dominio espacial se extiende desde el punto $(x, y, z) = (0,0,0)$ hasta el punto (c, d, L) . El dominio espacial también se puede expresar como $(0, c) \times (0, d) \times (0, L)$. Se tomó $c = 0.3$ m para tener un valor no unitario de tamaño de lado. Así mismo pasa con d . Luego se tomó $L = 12$ m para tener una relación $L/D_h = 20$ y estar lejos de la longitud de flujo en desarrollo que según (9) es $L_e/D_h = 12$. Debido a la simplicidad geométrica del caso no se genera la geometría por separado, sino que simplemente se usa blockMesh para generar la geometría, imponer condiciones de contorno y generar la malla todo en un solo paso.

B. Condiciones de contorno

Las condiciones de contorno se resumen en la Tabla II y se pueden ver en la Figura 2. En la entrada se especificó un flujo volumétrico fijo. De esta manera no se impone el perfil de velocidad, sino que aparece automáticamente de la simulación computacional. Además, se utilizó el modificador extrapolateProfile para tratar que el flujo sea completamente

desarrollado desde el principio. En la salida se usó la condición típica de salida para flujo interno que consiste en presión fija nula y velocidad libre. En la superficie de las dos placas planas se usó la condición de no deslizamiento dado que es un flujo viscoso. Finalmente, en se usó la condición del tipo empty para las dos superficies denotadas como planoszx.

TABLA II
CONDICIONES DE CONTORNO

ID	Velocidad	Presión
entrada	flowRateInletVelocity	zeroGradient
salida	inletOutlet	fixedValue
pared	noSlip	zeroGradient
planoszx	empty	empty

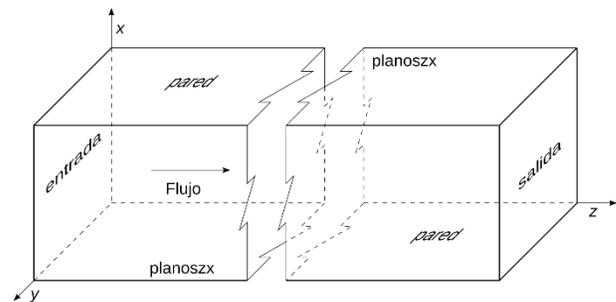


Fig. 2 Condiciones de contorno

C. Malla

En OpenFOAM las simulaciones en 2D realmente utilizan una malla 3D con un solo elemento en la tercera dimensión. Según los ejes coordenados usados en este trabajo ese eje es y y por lo tanto $N_y = 1$. Además, se usó un número de elementos par en la dirección x (N_x) para tener un nodo en el centro de la sección transversal. Se usaron valores de $N_x = 10, 20$ y 40 denotados como Malla10, Malla20 y Malla40 para obtener distintos grados de resolución numérica. Un ejemplo de malla para $N_x = 10$ se muestra en la Fig. 3. Adicionalmente, se utilizó una distribución de tamaño de elementos uniforme en x dado que la intención es simplemente obtener una buena resolución espacial, pero de ningún modo es encontrar la distribución óptima de elementos.

Dado que se desea una solución de flujo completamente desarrollado en todo el dominio espacial porque es un flujo en estado estacionario era deseable y posible usar pocos elementos en la dirección z (N_z). De todas formas, no se podía usar tan pocos elementos en la dirección z para evitar errores introducidos por las condiciones de contorno de entrada y/o salida. Se decidió usar $N_z = 120$ para que el error introducido por las condiciones de contorno de entrada y/o salida sea insignificante y de tal manera que sea un múltiplo de L . Para realizar la malla se usó blockMesh. Solamente se usó un bloque dada la simplicidad de la geometría.

III. RESULTADOS

Empezaremos presentando la variación de la presión en la dirección corriente abajo (z) y finalmente el perfil de velocidad.

A. Variación de presión

En la Fig. 4 se ve la variación de presión cinemática en la dirección corriente abajo en el centro del flujo.

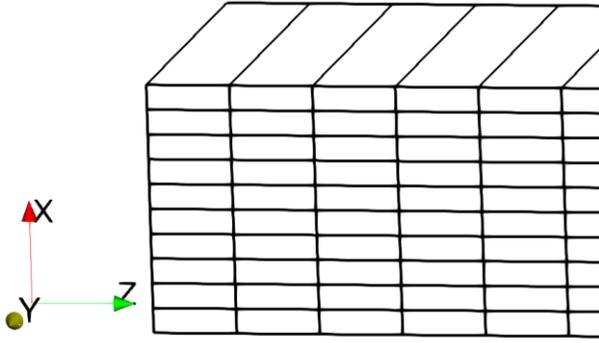


Fig. 3 Ejemplo de malla para $N_x=10$

D. Solución computacional

Para la resolución se usó simpleFoam ya que el flujo es incompresible, viscoso, laminar y en estado estable. También se pudo haber usado icoFoam debido a que para este caso tanto icoFoam como simpleFoam se deberían comportar de la misma forma. Los esquemas de volúmenes finitos se muestran en la Tabla III. Todos los esquemas utilizados son los usuales usados en simpleFoam.

E. Recursos computacionales

Los recursos computacionales usados para simular el flujo se pueden resumir en un computador portátil con sistema operativo Fedora 28 de 64bits. El computador tiene un procesador Intel Core i5-8250U con 16GB de memoria RAM DDR4 2400MHz en doble canal (8GB + 8GB) y un disco SSD OCZ Vector 150 de 240GB conectado por SATA III.

TABLA III
COMPARACIÓN DE GRADIENTE DE PRESIÓN

Esquema	Tipo
ddtSchemes	steadyState
gradSchemes	Gauss linear
div(phi,U)	Gauss upwind
laplacianSchemes	Gauss linear corrected
interpolationSchemes	linear
snGradSchemes	corrected

F. Recursos de software adicionales

Para realizar los gráficos se usó gnuplot 5.0 [31]. Para manipular los datos generados con OpenFOAM y para generar la solución analítica se usó Python [9] con NumPy 1.14.5 [19]. Para realizar el texto del artículo se usó TeX Live 2017 y Geany 1.35 [5], [27].

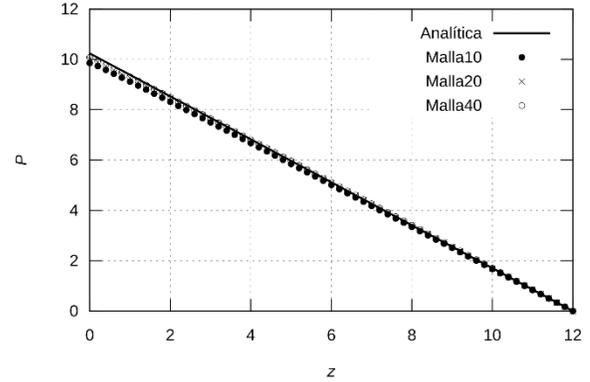


Fig. 4 Presión vs. Coordenada longitudinal (z)

Para apreciar mejor el resultado se grafica la pendiente de la curva calculada punto a punto como se ve en la Fig. 5. El cálculo de la derivada se hizo con la siguiente ecuación:

$$\frac{dP}{dz} = \frac{P_i - P_{i-1}}{z_i - z_{i-1}}, \quad i = 1, 2, \dots, N_z. \quad (14)$$

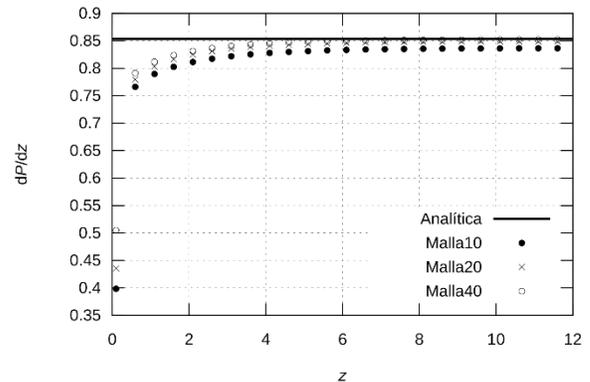


Fig. 5 Gradiente de presión

En la Tabla IV se puede ver una comparación de los valores obtenidos de dP/dz , f y $f Re$ para las distintas mallas.

TABLA IV
COMPARACIÓN DE GRADIENTE DE PRESIÓN, FACTOR DE FRICCIÓN Y PRODUCTO DE FACTOR DE FRICCIÓN Y NÚMERO DE REYNOLDS

Malla	dP/dz	f	$f Re$	Error $f Re$ (%)
Malla10	0.8358	0.0979	93.98	2.10
Malla20	0.8484	0.0994	95.42	0.60
Malla40	0.8517	0.0998	95.81	0.20
Analítica	0.8533	0.1	96	0

B. Perfil de velocidad

Se decidió obtener el perfil de velocidad en $z = 3/4L$ ya que según la Fig. 5 se ve que el perfil está completamente desarrollado en esa posición. Además, se mantiene una distancia con respecto a la superficie de la salida. En la Fig. 6 se puede ver el perfil de velocidad en $y = 0$ y $z = 3/4L$ y en la Tabla V se puede ver una comparación de la velocidad máxima y relación de velocidad máxima a velocidad promedio.

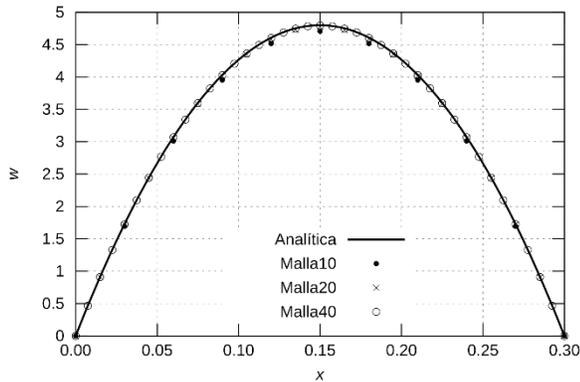


Fig. 6 Perfil de velocidad

TABLA V
COMPARACIÓN DE VELOCIDADES

Malla	w_{max}	w_{max}/V	Error w_{max}/V (%)
Malla10	4.7067	1.4708	1.95
Malla20	4.7768	1.4927	0.49
Malla40	4.7946	1.4983	0.11
Analítica	4.8	1.5	0

C. Consumo computacional

En la Tabla VI se ve el tiempo de cálculo requerido para cada malla y la memoria RAM consumida.

TABLA VI
COMPARACIÓN DE TIEMPO DE CÁLCULO Y MEMORIA CONSUMIDA

Malla	Tiempo (s)	Memoria (MB)
Malla10	1.7	108
Malla20	2.7	109
Malla40	9.7	113

D. Distancia adimensional a la pared

En la Tabla VII se ve la distancia adimensional a la pared (y^+). En notación OpenFOAM se escribiría yPlus. Se muestran el mínimo (min), promedio (prom) y máximo (max) globales. Además, se muestra el valor local promedio en la zona en que el flujo es completamente desarrollado ($y = 0, z = 3/4L$).

TABLA VII
COMPARACIÓN DE VALORES DE YPLUS PARA LAS DISTINTAS MALLAS

Malla	Global			Local
	min	prom	max	
Malla10	2.6	2.7	2.7	2.7
Malla20	1.3	1.3	1.3	1.3
Malla40	0.6	0.7	0.7	0.7

E. Discusión

El resultado de la simulación con respecto a la presión cinemática en función de z es muy bueno tal como se mostró en la Fig. 4. Se ve que sigue la tendencia lineal y se captura bien la pendiente y la caída total de presión. Dado que el error en esta gráfica es de naturaleza acumulativa se decidió graficar la pendiente en función de z como se ve en la Fig. 5. Allí sale a la luz el error introducido por la condición de contorno de entrada. Este error, aunque significativo, no interfiere tanto y nos permite ver que Malla40 y los esquemas numéricos elegidos reproducen muy bien la solución analítica de flujo completamente desarrollado.

El resultado de perfil de velocidad de la Fig. 6 muestra otra vez que Malla40 ofrece una resolución espacial suficiente para que la simulación sea fiel la solución exacta.

IV. CONCLUSIONES

Se simuló el flujo laminar incompresible isotérmico entre placas planas paralelas usando software código abierto OpenFOAM. Se obtuvo una excelente correlación entre la solución computacional y la solución analítica. Se corroboró de forma computacional que $f Re$ se acerca al valor analítico de 96. Además, w_{max}/V se acerca al valor analítico de 1.5. Adicionalmente, se comprobó que el perfil de velocidad es parabólico. Por otro lado, se determinó que para simular de forma precisa se necesita discretizar el fluido entre las placas con alrededor de 40 elementos. Finalmente, el caso presentado en este artículo debido a su contenido conceptual y rapidez de ejecución sirve para verificación y validación en dinámica de fluidos computacional y como una introducción a la dinámica

de fluidos computacional para estudiantes de ingeniería, física y matemáticas.

En cuanto a investigaciones futuras y nuevas rutas de investigación en el tema se pueden examinar problemas de flujo más complejo con soluciones analíticas o resultados experimentales para realizar la comparación con herramientas computacionales.

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos al departamento de I+D+i del Grupo INMEDIT S.A.S. por el apoyo computacional brindado.

REFERENCIAS

- [1] S. Ahmad, T. Hayat, A. Alsaedi, Z.H. Khan, and M.W.A. Khan, "Finite difference analysis of time-dependent viscous nanofluid flow between parallel plates," *Communications in Theoretical Physics*, vol. 71 no. 11, 2019.
- [2] N. Ashton and V. Skaperdas, "Verification and validation of OpenFOAM for high-lift aircraft flows," *Journal of Aircraft*, vol. 56, no. 4, pp. 1641-1657, 2019.
- [3] E. Aydin and H. Leutheusser, "Plane-Couette flow between smooth and rough walls," *Experiments in Fluids*, vol. 11, pp. 302-312, 1991.
- [4] G. Bar-Meir, *Basics of Fluid Mechanics*, Potto Project, 2013.
- [5] K. Berry, *The TeX Live Guide*, TUG, 2017.
- [6] M. Cavazzuti, M. A. Corticelli, and Tassos G. Karayiannis, "Compressible Fanno flows in micro-channels: An enhanced quasi-2D numerical model for laminar flows," *Thermal Science and Engineering Progress*, vol. 10, pp. 10-26, 2019.
- [7] A. Colli and J. Bisang, "Validation of theory with experiments for local mass transfer at parallel plate electrodes under laminar flow conditions," *Journal of The Electrochemical Society*, vol. 160, no. 1, pp. 5-11, 2012.
- [8] G. Demirkaya, C. Wafo Soh, and O.J. Ilegbusi, "Direct solution of Navier-Stokes equations by radial basis functions," *Applied Mathematical Modelling*, vol. 32, no. 9, pp. 1848-1858, 2008.
- [9] A. Downey, *Think Python*, Green Tea Press, 2015.
- [10] J. du Plessis and M. Collins, "A new definition for laminar flow entrance lengths of straight ducts," *N&O Joernaal*, vol. 25, pp. 11-16, 1992.
- [11] R. Fox, A. McDonald, and J. Mitchell, *Fox and McDonald's Introduction to fluid mechanics*, John Wiley & Sons, 2020.
- [12] A. Ghanbari, Z. Mousavi, M. Heuzey, G. Patience, and P. Carreau, "Experimental methods in chemical engineering: Rheometry," *The Canadian Journal of Chemical Engineering*, vol. 98, no. 7, pp. 1456-1470, 2020.
- [13] H. Kanda, "Laminar-turbulent transition in channel flow: wall effects and critical Reynolds number," *Electron.Trans. Numer. Anal.*, vol. 51, pp. 547-569, 2019.
- [14] A. Kislaya, A. Deka, P. Veenstra, D. Tam, and J. Westerweel, "Psi-PIV: a novel framework to study unsteady microfluidic flow," *Experiments in Fluids*, vol. 61, no. 2, 2020.
- [15] R. Kumar and A. Walton, "Amplitude-dependent three-dimensional neutral modes in plane Poiseuille-Couette flow at large Reynolds number," *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, vol. 72, no. 1, pp. 87-130, 2019.
- [16] B. Lautrup, *Physics of continuous matter*, CRC Press, 2011.
- [17] M. Mawlood, S. Basri, W. Asrar, A. Omar, A. Mokhtar, and M. Ahmad, "Solution of Navier-Stokes equations by fourth-order compact schemes and AUSM flux splitting," *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, vol. 16, no. 1, pp. 107-120, 2006.
- [18] H. Noriega, F. Guibault, M. Reggio, and R. Magnan, "A case-study in open-source CFD code verification, part I: Convergence rate loss diagnosis," *Mathematics and Computers in Simulation*, vol. 147, pp. 152-171, 2018.
- [19] NumPy Community, *NumPy User Guide*, NumPy Project, 2018.
- [20] OpenCFD Ltd., *OpenFOAM User Guide v1812*, OpenCFD Ltd., 2018.
- [21] S. Park, T. Irvine, and M. Capobianchi, "Experimental and numerical study of friction factor for a modified power law fluid in a rectangular duct," *Experimental Thermal and Fluid Science*, vol. 9, no. 1, pp. 61-68, 1994.
- [22] F. Peters, "Analytical and experimental investigation of laminar channel flow with respect to flow metering," *Journal of Fluids Engineering*, vol. 121, no. 4, pp. 757-761, 1999.
- [23] R. Sadri and J. Floryan, "Entry flow in a channel," *Computers & Fluids*, vol. 31, no. 2, pp. 133-157, 2002.
- [24] R. Shah and A. London, *Laminar Flow Forced Convection in Ducts*, Academic Press, 1978.
- [25] K. Shimomukai and H. Kanda, "Numerical study of normal pressure distribution in entrance flow between parallel plates. I. finite difference calculations," *Electronic Transactions on Numerical Analysis*, vol. 23, pp. 202-218, 2006.
- [26] A. Talamelli, K. Westin, and P. Alfredsson, "An experimental investigation of the response of hot-wire X-probes in shear flows," *Experiments in fluids*, vol. 28, no. 5, 425-435, 2000.
- [27] E. Troger, N. Treleaven, F. Laniz, C. Wendling, and M. Brush, *Geany: a fast, light, GTK+ IDE*, Geany contributors, 2019.
- [28] M. Usman, T. Zubair, M. Hamid, and R. Haq, "Novel modification in wavelets method to analyze unsteady flow of nanofluid between two infinitely parallel plates", *Chinese Journal of Physics*, vol. 66, pp. 222-236, 2020.
- [29] A. Wailanduw, P. Adiwibowo, and B. Hasyim, "Experimental study of the boundary layer development on the flat plate at laminar flow," *Jurnal Teknik Mesin Indonesia*, vol. 15, no. 1, pp. 7-10, 2020.
- [30] F. White, *Fluid Mechanics*, McGraw-Hill, 2011.
- [31] T. Williams and C. Kelley, *gnuplot 5.0*, gnuplot team, 2017.
- [32] Z. Wu, L. Zeng, K. Chen, J. Chen, and Y. Zhang, "Experiments on laminar flow between parallel plates with a heterogeneous slip/no-slip surface," *Tribology Transactions*, vol. 62, no. 5, pp. 801-811, 2019.