




State-space control applied to the balance of a linear inverted pendulum

García Pérez, Herlis Galdamis¹ , Chávez Acuña, Carla Alexandra² , Manzano Ramos, Edgar Andre, Magister³ 
Universidad Nacional de Trujillo, Perú, hgarciap@unitru.edu.pe, t033600120@unitru.edu.pe, emanzano@unitru.edu.pe

Abstract—The present document includes the development and implementation of a linear inverted pendulum, along with an exploration of various control methodologies applied to inverted pendulums to evaluate their effectiveness in stabilizing the system under different conditions and disturbances. A state-space controller was designed specifically for the linear inverted pendulum system. Transmission was achieved using a belt and pulley DC motor, and an encoder was incorporated into the carriage rod to measure the pendulum's angular position. The pendulum was successfully controlled within a short period of time. Results are based on pole analysis and the successful implementation of a pole-placement controller in a physical inverted pendulum system. This work integrates concepts of electronics and control of unstable systems to achieve an implemented system that operates via pole-placement control.

Keywords—State-space control, linear inverted pendulum, encoder, Arduino, power transmission.

State-space control applied to the balance of a linear inverted pendulum

Abstract—The present document includes the development and implementation of a linear inverted pendulum, along with an exploration of various control methodologies applied to inverted pendulums to evaluate their effectiveness in stabilizing the system under different conditions and disturbances. A state-space controller was designed specifically for the linear inverted pendulum system. Transmission was achieved using a belt and pulley DC motor, and an encoder was incorporated into the carriage rod to measure the pendulum's angular position. The pendulum was successfully controlled within a short period of time. Results are based on pole analysis and the successful implementation of a pole-placement controller in a physical inverted pendulum system. This work integrates concepts of electronics and control of unstable systems to achieve an implemented system that operates via pole-placement control.

Keywords—State-space control, linear inverted pendulum, encoder, Arduino, power transmission.

I. INTRODUCCIÓN

El péndulo invertido, un sistema clásico en control automático, ha sido objeto de numerosos estudios y desarrollos debido a su complejidad y comportamiento no lineal. Es un sistema intrínsecamente inestable con dinámicas no lineales. Pertenece a la categoría de sistemas mecánicos subactuados, caracterizados por tener menos entradas de control que grados de libertad. El péndulo invertido se convierte en un estándar clásico para el diseño y prueba de diversas técnicas de control. Dada su inestabilidad, es considerado uno de los problemas más desafiantes en la ingeniería de control [1]. Este proyecto se propone investigar y aplicar técnicas de posicionamiento de polos en el contexto del control del péndulo invertido y toma como referencia investigaciones de diversos autores y sus respectivos métodos de control utilizados.

En [1], el péndulo invertido es un sistema no lineal altamente inestable e impredecible con menos entradas de control que grados de libertad, el objetivo es lograr que el sistema se comporte de tal manera que el carro alcance una posición deseada y el péndulo invertido se estabilice en posición vertical. Lo que se realizó fue la simulación en Simulink y Matlab, y para el análisis, las ecuaciones de modelado a las que llegaron los autores, fueron, en primer lugar, la de modelado de la fuerza de balance del sistema en el eje x :

$$(M + m)\ddot{x} - ml\sin\theta\dot{\theta}^2 + ml\cos\theta\ddot{\theta} = u \quad (1)$$

Siendo estas variables las obtenidas de la Fig. 1. Además para el torque, se obtuvo:

$$m\ddot{x}\cos\theta + ml\ddot{\theta} = mg\sin\theta \quad (2)$$

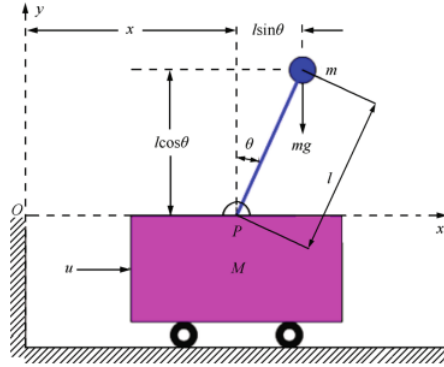


Fig. 1 Modelo de péndulo invertido en carro.

Además, se empleó el método LQR (Regulador Lineal Cuadrático), una técnica de control óptimo que considera los estados del sistema y la entrada de control para tomar decisiones óptimas. Después de la linealización de las ecuaciones del sistema no lineal alrededor de la posición de equilibrio vertical (inestable), se obtiene una ecuación de espacio de estados lineal. El valor de control óptimo del LQR se suma de manera negativa al valor de control PID para lograr un control óptimo combinado. La sintonización de los controladores PID, ya sea como control PID puro o en combinación con LQR, se realiza mediante el método de prueba y error, observando las respuestas del sistema para lograr la optimización.

En [2], se realizó un análisis para 3 tipos de péndulo invertido, iniciando con un controlador PID, luego con 2 y finalmente con 3. Se analizó los 3 tipos de péndulo invertido (Fig. 3), utilizando modelos de ecuación de Lagrange y modelos de ecuaciones de estado, así como una simplificación del ajuste de parámetros de controladores PID para lograr la estabilización del sistema.

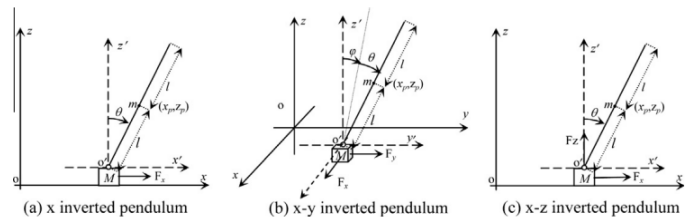


Fig. 2 Estructura de 3 tipos de péndulo invertido estudiados.

En la referencia [6] se aplican las leyes de Newton en el modelado y control de un péndulo invertido sobre un carro.

Se desarrolla un modelo matemático y se utiliza el método de asignación de polos para diseñar el controlador. Se valida el controlador utilizando simulaciones en Simulink/MATLAB y se demuestra su eficacia para mantener la estabilidad del sistema. Este trabajo proporciona una base teórica y una metodología adaptable para el diseño de controladores lineales aplicados a sistemas no lineales.

En [3], se presenta la implementación experimental de un sistema de control de péndulo invertido. Se miden los ángulos del péndulo invertido y la posición del carro mediante encoders. Estos encoders impulsan controladores PID para estabilizar el sistema de péndulo invertido. Se ha demostrado que el enfoque de pequeños ángulos mejora el rendimiento del controlador PID, logrando la estabilización incluso en presencia de fricciones desconocidas. Muestra también un modelo de referencia del mecanismo de péndulo (Fig. 3) y las ecuaciones del controlador genérico PID al cual se ingresan los parámetros calculados según su estudio.

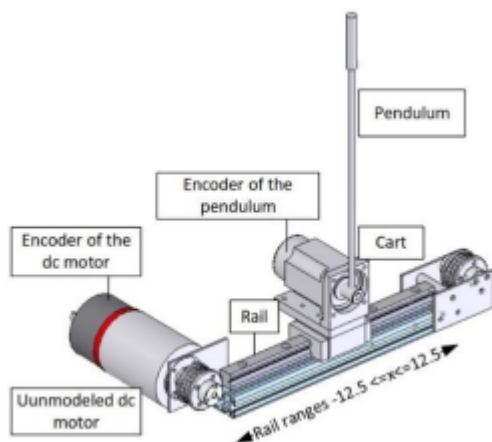


Fig. 3 Modelo de mecanismo de péndulo utilizado en [3].

En la referencia [4], es propuesta una técnica de control óptimo para estabilizar un péndulo invertido-carro. Modela y linealiza el sistema, inicialmente utilizando un controlador PID y luego implementando el Regulador Cuadrático Lineal (LQR) para evaluar la robustez del sistema ante disturbios. Además, se incorpora un controlador predictivo basado en modelo (MPC) que anticipa eventos futuros. La comparación de rendimiento muestra que la combinación LQR + PID es efectiva, robusta y superior a utilizar solo PID, tanto con como sin perturbaciones.

En [5] muestra la aplicación exitosa de un control de retroalimentación de estados con un estimador de estado completo en un sistema de péndulo invertido en carro. Las ganancias (K) y (L) se obtuvieron mediante el Regulador Cuadrático Lineal y el método de colocación de polos, respectivamente. La simulación indica que el sistema puede lograr la posición y el ángulo deseados con respuestas óptimas. Se observa que los sistemas con y sin observador de estado completo tienen respuestas similares debido al compartimiento de las mismas variables de estado. La implementación práctica podría brindar

más información sobre la respuesta del sistema en situaciones reales. Para este trabajo,

En [6] se detalla la aplicación de las leyes de la dinámica de Newton en el modelado y control de un sistema de péndulo invertido sobre un carro. Mediante un modelo matemático de se describen las ecuaciones que rigen la dinámica no lineal del sistema, así como una representación en espacio de estados por asignación de polos para el diseño del controlador. Se desarrolla un algoritmo computacional utilizando la función ODE45 de MATLAB para demostrar la no linealidad del sistema. Los resultados indican que el método utilizado en el diseño del controlador logra su objetivo, lo que proporciona una base teórica para el diseño de controladores lineales en sistemas no lineales y una metodología adaptable para otros tipos de controladores lineales.

En la referencia [7] se aplicó realimentación de estados para un péndulo invertido traslacional. Los resultados, obtenidos mediante simulación, predicen la regulación del estado del péndulo invertido, los cuales son posteriormente validados experimentalmente con el prototipo de laboratorio. Asimismo, se lleva a cabo un análisis de técnicas avanzadas de control y se consideran términos de no linealidad en los modelos para mejorar la precisión del sistema.

En la implementación de un controlador para un péndulo invertido, además del espacio de estados, un método es el control PID, como se describe en [8], en donde se desarrolla un modelo matemático para un sistema no lineal de péndulo invertido sobre una base móvil. Se diseñan dos controladores PID: uno para mantener el péndulo vertical y otro para centrar la base móvil.

Otro método es el control lineal cuadrático gaussiano (LQG) y ubicación de polos con filtro de Kalman, como es desarrollado en [9]. Se desarrolla el modelo matemático del péndulo invertido sobre un carro en tiempo continuo y discreto. Se diseñan los servo-controladores en MATLAB y se realizan pruebas, donde los resultados muestran que el servo-controlador LQG supera al servo-controlador por ubicación de polos con filtro de Kalman en respuesta temporal, optimización de energía y rechazo de perturbaciones y señales estocásticas.

II. ESPACIO DE ESTADOS

Según [10], en el contexto del control de sistemas dinámicos, el enfoque de espacio de estados proporciona una representación matemática integral de un sistema dinámico en forma de ecuaciones de estado. Esta representación describe el comportamiento dinámico del sistema en función de un conjunto de variables de estado, junto con las entradas y salidas del sistema. Las ecuaciones de estado capturan las relaciones dinámicas entre las variables de estado, las entradas y las salidas, lo que permite modelar y analizar el comportamiento del sistema en el dominio del tiempo. Es necesario para la selección de variables de estado, seleccionar variables físicas relevantes, determinar el mínimo necesario, elige variables que describan la dinámica interna y sean medibles, evitar redundancias y seleccionar aquellas que afecten la dinámica

de control. La forma general de representación de entradas, salidas y variables de estado es:

$$\dot{x} = A(t)x(t) + B(t)u(t) \quad (3)$$

$$y = C(t)x(t) + D(t)u(t) \quad (4)$$

A. Posicionamiento de polos

El posicionamiento de polos como una técnica fundamental en el diseño de controladores [9]. Permite ubicar los polos del sistema en posiciones deseadas en el plano complejo para alcanzar un rendimiento específico. Esta técnica implica la selección cuidadosa de los polos del sistema cerrado para lograr características de respuesta deseables, como la rapidez de respuesta, la estabilidad y la amortiguación.

III. MATERIAL Y MÉTODO

A. Materiales

La implementación del proyecto se llevó a cabo utilizando los siguientes componentes y materiales:

- Arduino Nano
- Motor DC con encoder de 1000RPM 12V
- Driver Pololu MAX14870
- Sensor de final de carrera
- V-Slot 2040 de 70cm de largo
- Carro para V- Slot
- Polea loca V-Slot GT2-D17mm
- Encoder para la barra
- Barra de fibra de carbomo de 3mm
- Soportes varios de impresión 3D

B. Metodología

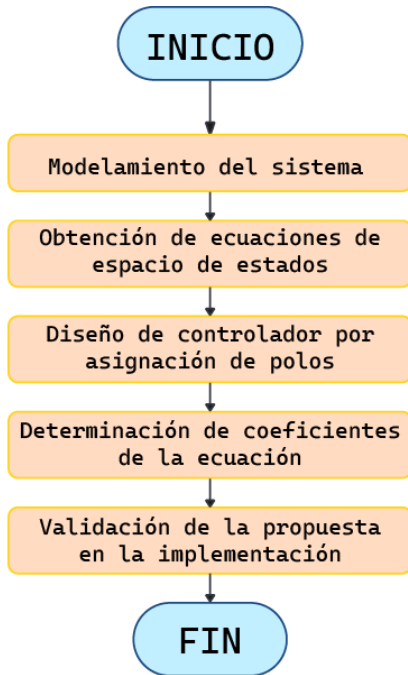


Fig. 4 Diagrama de flujo de la metodología empleada.

En el diagrama de flujo de la figura 4 se muestra el proceso de la metodología desarrollada en el presente paper, que incluye la parte del análisis del control del sistema.

1) *Modelado del sistema de péndulo invertido:* Para el modelado del sistema, observamos el diagrama de la figura 5. En este, se incluye el motor que va a ser el impulsor del carro. Se utilizarán poleas dentadas para transmitir la potencia en este sistema de correa.

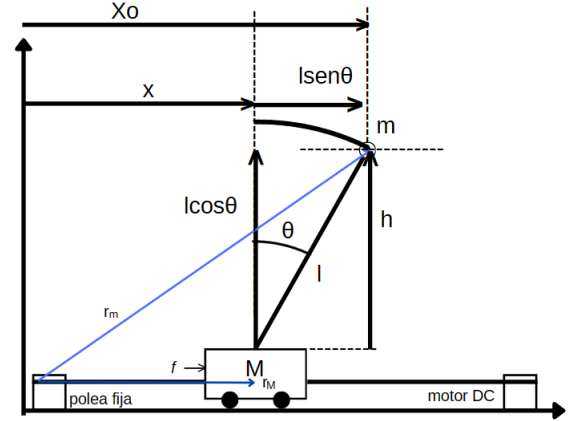


Fig. 5 Modelo de péndulo invertido en carro y sus respectivas variables.

Donde:

- M: Masa del carro
- m: masa del péndulo
- l: Longitud de la barra
- u: Fuerza aplicada al carro
- x: Posición del carro
- θ : Ángulo del péndulo respecto al eje Y

Para el sistema en general, el carro de masa M y el péndulo unido a la carga de masa m tienen como posición de centro de masa a los puntos:

$$r_M = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$r_m = \begin{bmatrix} x + l \sin \theta \\ l \cos \theta \end{bmatrix} \quad (6)$$

Aplicando la 2da ley de Newton en el movimiento de traslación (5) y de rotación (6), obtenemos las ecuaciones siguientes

$$M\ddot{x} + F_x = u(t) \quad (7)$$

$$I\ddot{\theta} = F_y l \sin \theta - F_y l \cos \theta \quad (8)$$

Donde F_x representa el movimiento horizontal del péndulo y F_y , el movimiento vertical. En cuanto a F_x , se expresa por (7):

$$F_x = m x_{cg} \quad (9)$$

$$F_x = m \ddot{x} + m \ddot{a} \quad (10)$$

Donde a es la aceleración lineal del carro. Aplicando la siguiente equivalencia para simplificar la ecuación anterior:

$$\ddot{a} = \frac{d^2}{dt^2} \text{sen}\theta \quad (11)$$

$$a = (\text{cos}\theta)\ddot{\theta} - (\text{sen}\theta)\dot{\theta}^2 \quad (12)$$

$$F_x = m\ddot{x} + ml\ddot{\theta}\text{cos}\theta - ml\dot{\theta}^2\text{sen}\theta \quad (13)$$

En cuanto al movimiento vertical, tenemos:

$$F_y = my_{cg} + mg \quad (14)$$

La ecuación para el movimiento general vertical se muestra en ():

$$F_y = ml\ddot{b} + mg \quad (15)$$

Siendo el término:

$$\ddot{b} = \frac{d^2}{dt^2} \text{cos}\theta \quad (16)$$

Tenemos la siguiente expresión para:

$$\frac{d^2}{dt^2} \text{cos}\theta = -(\text{sen}\theta)\ddot{\theta} - (\text{cos}\theta)\dot{\theta}^2 \quad (17)$$

Entonces mediante las ecuaciones descritas, se obtiene la representación del movimiento vertical del péndulo

$$F_y = -ml\ddot{\theta}\text{sen}\theta - ml\dot{\theta}^2\text{cos}\theta + mg \quad (18)$$

Para el movimiento rotacional del péndulo se obtiene la ecuación:

$$I\ddot{\theta} = [-ml\ddot{\theta}\text{sen}\theta - ml\dot{\theta}^2\text{cos}\theta + mg]\text{sen}\theta - [m\ddot{x} + ml\ddot{\theta}\text{cos}\theta - ml\dot{\theta}^2\text{sen}\theta]l\text{cos}\theta \quad (19)$$

Suponemos un momento de inercia igual a cero debido a que la masa se encuentra en el extremo superior del péndulo. Reemplazamos esta simplificación en la ecuación (16):

$$(mgl)\text{sen}\theta = ml^2\ddot{\theta} + (mg\ddot{x})\text{cos}\theta \quad (20)$$

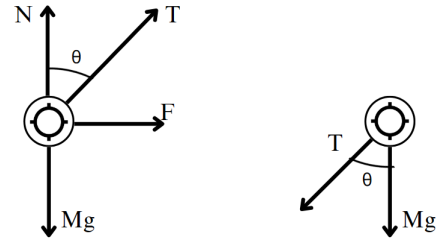
La ecuación (17) representa el movimiento rotacional del péndulo. Para obtener la ecuación del movimiento traslacional del sistema se relacionan las ecuaciones (5) y (11) obteniendo (19):

$$(M + m)\ddot{x} - ml^2\dot{\theta}^2\text{sen}\theta + ml\ddot{\theta}\text{cos}\theta = u(t) \quad (21)$$

El movimiento del sistema está limitado a dos grados de libertad y su modelo matemático no lineal se representa por las ecuaciones (18) y (19). Las ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales del sistema en forma matricial se representan en la ecuación (20).

$$\begin{bmatrix} ml & m\text{cos}\theta \\ ml\text{cos}\theta & (M + m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} mg\text{sen}\theta \\ u(t) + ml\dot{\theta}^2\text{sen}\theta \end{bmatrix} \quad (22)$$

Las ecuaciones contienen términos no lineales. Dado que se asume que el péndulo siempre rota cerca al punto de



Centro de masa del carro

Centro de masa de la carga

Fig. 6 Diagrama de cuerpo libre del carro y carga representados por su centro de masa.

equilibrio, $\theta \approx 0$, entonces utilizamos las aproximaciones para los términos no lineales: $\text{sen}\theta \approx \theta$, $\text{cos}\theta \approx 1$, $\dot{\theta}^2 \approx 0$, $\dot{\theta}\ddot{\theta} \approx 0$. Con las expresiones anteriores se obtienen las ecuaciones (21) y (22).

$$mg\theta = ml\ddot{\theta} + m\ddot{x} \quad (23)$$

$$(M + m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} = u(t) \quad (24)$$

Se aplica la transformada de La Place a la ecuación que relaciona \ddot{x}

$$\frac{\Theta(s)}{U(s)} = -\frac{1}{Ml} \frac{1}{s^2 - g \frac{(M+m)}{Ml}} \quad (25)$$

Reemplazando los valores del sistema desarrollado, tenemos la siguiente ecuación de transferencia:

$$\frac{\Theta(s)}{U(s)} = -\frac{1}{0.0805s^2 - 1.6677} \quad (26)$$

2) *Modelo ecuación de espacio estados:* Para modelar el sistema en ecuación de espacio de estados, obtenemos las siguientes ecuaciones a partir de la función de transferencia, ecuaciones que también son planteadas por Ogata [11]

$$\begin{cases} Ml\ddot{\theta} = (M + m)g\theta - u \\ m\ddot{x} = u - mg\theta \end{cases} \quad (27)$$

Posteriormente se considerarán los siguientes estados como entradas y salidas. Se muestran en la tabla 1.

TABLA I

Variables de estado para el modelo del péndulo invertido.

| Estados | Entradas | Salidas |
|----------------------|----------|--------------|
| $x_1 = x$ | $u=u$ | $y = \theta$ |
| $x_2 = \dot{x}$ | | |
| $x_3 = \theta$ | | |
| $x_4 = \dot{\theta}$ | | |

Reemplazando estos estados en las ecuaciones () y (), se obtiene:

$$\dot{x}_2 = \frac{(M + m)}{Ml}gx_1 - \frac{1}{Ml}u(t) \quad (28)$$

$$\dot{x}_4 = -\frac{m}{M}gx_1 + \frac{1}{M}u(t) \quad (29)$$

A partir del diagrama de la figura 4, tenemos para \dot{x} y para y las expresiones mostradas a continuación en (28) y (29)

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-mg}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{(M+m)g}{Ml} & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/M \\ 0 \\ -\frac{1}{Ml} \end{bmatrix} u \quad (30)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (31)$$

La forma general que tienen \dot{x} y para y es:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (32)$$

$$y = Cx + Du \quad (33)$$

$$(M + m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} = u \quad (34)$$

TABLA II

Características de los eslabones del robot.

| Parámetro | Valor |
|----------------------|---------|
| Masa de la bola | 0.009kg |
| Masa del carro | 0.161kg |
| Longitud de la barra | 50cm |

3) *Diseño de controlador por posicionamiento de polos:* Se implementa el posicionamiento de polos como técnica principal para diseñar el controlador del sistema. Analizamos los polos del sistema sin controlar. Se analiza para ello, la función característica del sistema sin controlar para observar sus polos.

IV. DISEÑO DEL EXPERIMENTO DEL PÉNDULO INVERTIDO

En cuanto a la implementación del sistema, se utilizó los materiales mostrados en la sección de material y método. La estructura realizada fue una base de perfil de aluminio y un carro para V-slot que se desplace en el carril del perfil. En la parte superior se incorporó un encoder en el eje del rodamiento para medir la posición de la varilla. El motor DC que efectúa la fuerza sobre el carro se sitúa a un lado del V-slot de aluminio, y al otro lado de este, se encuentra una polea para completar la transmisión del movimiento. En la punta de la varilla se incluyó una pelota ligera de plástico para simplificar la inercia de la carga a solo la esfera.

El circuito del sistema implementado se muestra en la figura 13 .

V. RESULTADOS

A. Modelado del sistema del péndulo invertido

Dado que existen polos que inestabilizan el sistema, se

Se obtuvo la ecuación de transferencia de la forma mostrada en la ecuación (), que relaciona a la posición angular del péndulo y la fuerza aplicada sobre el carro, en este caso, fuerza que es ejercida por el carro.

$$\frac{\Theta(s)}{U(s)} = -\frac{1}{Ml} \frac{1}{s^2 - g \frac{(M+m)}{Ml}} \quad (35)$$

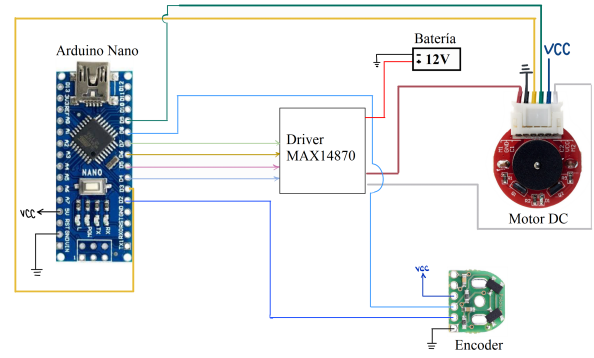


Fig. 7 Circuito para el sistema de péndulo invertido.

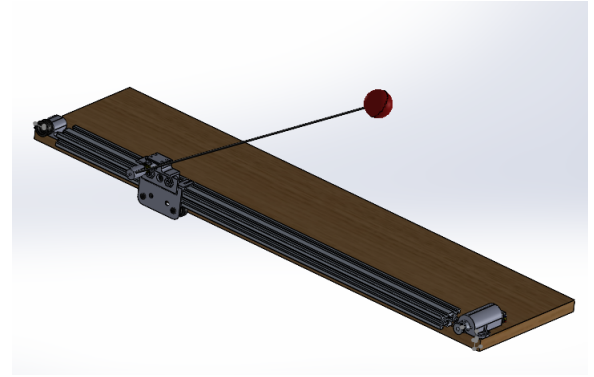


Fig. 8 Modelo CAD en SolidWorks del sistema.

B. Modelo de ecuación de espacio de estados

En cuanto al modelamiento por espacio de estados, las ecuaciones obtenidas para el modelamiento, son:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-mg}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{(M+m)g}{Ml} & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/M \\ 0 \\ -\frac{1}{Ml} \end{bmatrix} u \quad (36)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (37)$$

C. Diseño de controlador por posicionamiento de polos

Tras el análisis de la ecuación característica del sistema, los polos obtenidos del sistema sin controlar son los siguientes, y se muestran en la gráfica de la figura 9:

- -4.6554+0i
- 4.6554+0i
- 0+0.9777i
- 0-0.9777i

Para la simulación del sistema se ha usado la herramienta Simulink, con la que se ha creado el diagrama de bloques de la figura 9 y se graficó la respuesta a entrada escalón unitario representada en la figura 10.

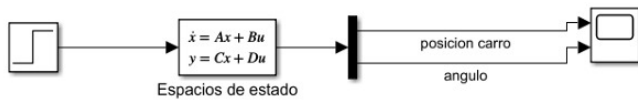


Fig. 9 Diagrama de bloques de la simulación del sistema lazo abierto mediante espacio de estados.

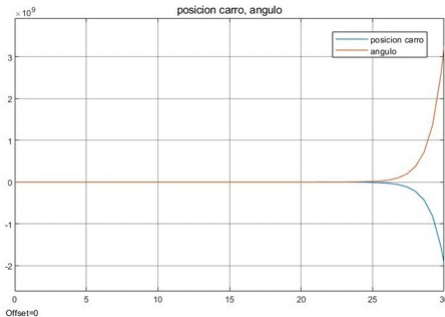


Fig. 10 Respuesta al escalón unitario del sistema en lazo abierto mediante espacio de estados.

Una vez listas las matrices de estados y sus respectivas relaciones, se crea el sistema de espacio de estados,

Como podemos ver en la figura 11, la planta es inestable debido a la ubicación de un polo en el lado derecho del eje real. Entonces se procede a elaborar el controlador, mediante la matriz de controlabilidad, de la cual su matriz es 4, por lo que podemos afirmar que es un sistema que sí es controlable. De acuerdo a ello, se hallan los otros polos que hacen estable al sistema.

$$\text{Ctrl} = \begin{bmatrix} 0 & 6.2112 & 0 & 1.7031 \\ 6.2112 & 0 & 1.7031 & 0 \\ 0 & -3.1056 & 0 & -64.3378 \\ -3.1056 & 0 & -64.3378 & 0 \end{bmatrix}$$

Fig. 11 Matriz de controlabilidad del sistema.

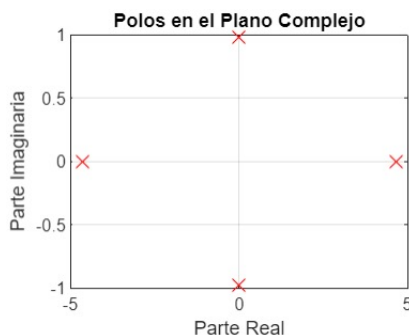


Fig. 12 Polos del sistema graficados en Matlab.

D. Implementación

Como resultado se obtuvo un péndulo invertido ya implementado que funciona de acuerdo al posicionamiento de estados como controlador. Se muestra en la figura 13, y abarca los materiales mencionados previamente. Para su funcionamiento,

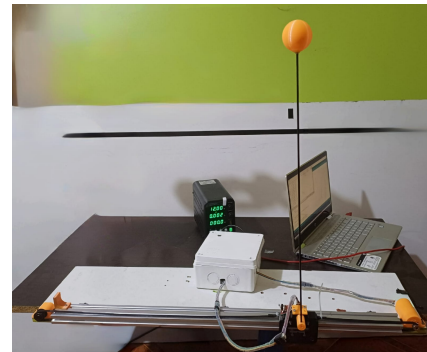


Fig. 13 Fotografía del sistema de péndulo invertido implementado en físico.

y la elección de los polos por el método de posicionamiento se consideró un tiempo de establecimiento de 0.5 segundos y un sobrepico máximo de 15%.

VI. CONCLUSIONES

En el presente informe se logró implementar un sistema de péndulo invertido controlado mediante posicionamiento de polos, se desarrolló el modelo matemático, se obtuvo la matriz de espacio de estados para el péndulo con sus respectivas variables según la estructura general presentada en [10] y se estableció variables por control de posicionamiento de polos del sistema para obtener un sistema implementado que integra los conceptops de electrónica y controladores de sistemas inestables.

REFERENCIAS

- [1] L.B. Prasad, B. Tyagi, and H.O. Gupta, "Optimal Control of Nonlinear Inverted Pendulum System Using PID Controller and LQR: Performance Analysis Without and With Disturbance Input," in *International Journal of Automation and Computing*, vol. 11, pp. 661–670, 2014. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11633-014-0818-1>
- [2] J. Wang, "Simulation studies of inverted pendulum based on PID controllers," *Simulation Modelling Practice and Theory*, vol. 19, no. 1, pp. 440–449, 2011. DOI: 10.1016/j.simpat.2010.08.003.
- [3] A. Gün, A. Karamancioğlu, "PID control of an inverted pendulum with experimental friction model estimation", *Afyon Kocatepe Univ. J. Sci. Eng.*, vol. 21, núm. 5, pp. 1078–1085, 2021.
- [4] E. S. Varghese, A. K. Vincent, y V. Bagyaveereswaran, "Optimal control of inverted pendulum system using PID controller, LQR and MPC", *IOP Conf. Ser. Mater. Sci. Eng.*, vol. 263, p. 052007, 2017.
- [5] I. Siradjuddin et al., "State-feedback control with a full-state estimator for a cart-inverted pendulum system," *Int. J. Eng. Technol.*, vol. 7, no. 4.44, pp. 203–209, December 2018., doi: 10.14419/ijet.v7i4.44.26985.
- [6] J. García, L. Ramírez, X. Siordia, T. Martínez, "Las leyes de Newton en el modelado y control del péndulo invertido sobre un carro," *Revista Tecnología e Innovación*, vol. 3, no. 9, pp. 11–19, diciembre 2016. Recibido: abril 26, 2016. Aceptado: octubre 5, 2016. [Online]. Disponible: ECORFAN-Bolivia
- [7] L. Herrera, U. Melo, R. Alzate, "Control Local en el Espacio de Estados para un Prototipo Real de Péndulo Invertido Traslacional," *INGE CUC*, vol. 10, no. 2, pp. 36–42, 2014. EISSN: 2382-4700

- [8] L. G. Triviño, "Modelado, simulación y control de un péndulo invertido," Trabajo de Fin de Grado, Dept. Elec. Ing. de Sist., UAB, Barcelona, 2020.
- [9] H. J. Rosas, "Diseño y análisis comparativo de un sistema de péndulo invertido aplicando técnicas de control lineal cuadrático gaussiano," Tesis de grado, UCSM, Arequipa, 2022.
- [10] B. C. Kuo, *Automatic Control Systems*, Nueva York: Prentice Hall, 9^a ed., 1995.
- [11] K. Ogata, *Ingeniería de Control Moderna*, 3^a ed., Madrid: Prentice Hall Hispanoamericana, 1998.