Leibniz's Rule and its application in differential equations

Marisol Paola Delgado Baltazar,[1][https://orcid.org/0000-0002-0278-9557], Ruben Dario Mendoza Arenas, Dr.[1][https://orcid.org/0000-0002-7861-7946], Jenny María Ruiz Salazar, Dr.[2][https://orcid.org/0000-0001-9882-3133], Frank Duberlee Álvarez Huertas, Dr.[3][https://orcid.org/0000-0003-2835-1681], Ana María Holgado Quispe, Dr.[4][https://orcid.org/0000-0002-7510-9188], Mónica Beatriz La Chira Loli, Dr.[5][https://orcid.org/0000-0003-6387-1151], José Ricardo Rasilla Rovegno, Dr.[1][https://orcid.org/0009-0006-4747-1864]
[1]Universidad Nacional del Callao, Perú, mpdelgadob@unac.edu.pe, rdmendozaa@unac.edu.pe, jrrasillar@unac.edu.pe
[2]Universidad Nacional Federico Villarreal, Perú, jruizs@unfv.edu.pe
[3]Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Perú, falvarezh@unmsm.edu.pe
[4]Universidad Tecnológica del Perú, Perú, c22302@utp.edu.pe
[5]Universidad Autónoma del Perú, Perú, monica.lachira@autonoma.pe

Abstract-The objective of this article is the application of the Leibniz Rule and related Theorems for a function in the verification of a partial or ordinary differential equation. The parametric derivation theory is given as well as the Fundamental Theorems of Calculus and its corollaries and other tools of Differential and Integral Calculus. The academic contribution of this article is to solve integrals that depend on a parameter as a starting point and calculate said integrals by assigning a value to the parameter. This problem constitutes the famous P.V.I. (Initial Value Problem); which is to give the solution of Ordinary Differential Equations.

Keywords: Leibniz Rule, Initial Value Problem, parametric derivation.

La regla de Leibniz y su aplicación en ecuaciones diferenciales

Marisol Paola Delgado Baltazar,[1][https://orcid.org/0000-0002-0278-9557], Ruben Dario Mendoza Arenas, Dr.[1][https://orcid.org/0000-0002-7861-7946], Jenny María Ruiz Salazar, Dr.[2][https://orcid.org/0000-0001-9882-3133], Frank Duberlee Álvarez Huertas, Dr.[3][https://orcid.org/0000-0003-2835-1681], Ana María Holgado Quispe, Dr.[4][https://orcid.org/0000-0002-7510-9188], Mónica Beatriz La Chira Loli, Dr.[5][https://orcid.org/0000-0003-6387-1151], José Ricardo Rasilla Rovegno, Dr.[1][https://orcid.org/0009-0006-4747-1864]

[1]Universidad Nacional del Callao, Perú, mpdelgadob@unac.edu.pe, rdmendozaa@unac.edu.pe, jrrasillar@unac.edu.pe

[2]Universidad Nacional Federico Villarreal, Perú, jruizs@unfv.edu.pe

[3]Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Perú, falvarezh@unmsm.edu.pe

[4]Universidad Tecnológica del Perú, Perú, c22302@utp.edu.pe

[5]Universidad Autónoma del Perú, Perú, monica.lachira@autonoma.pe

Resumen-El objetivo de este artículo es la aplicación de la Regla de Leibniz y Teoremas afines para una función en la verificación de una ecuación diferencial parcial u ordinaria. Se da la teoría de derivación paramétrica así como los Teoremas Fundamentales del Cálculo y sus corolarios y otras herramientas del Cálculo Diferencial e Integral. El aporte académico de este artículo es resolver integrales que dependen de un parámetro como un punto de partida y calcular dichas integrales asignando un valor al parámetro. Este problema constituye el famoso P.V.I. (Problema de Valor Inicial); el cual es dar la solución de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.

Palabras claves: Regla de Leibniz, Problema de Valor Inicial, derivación paramétrica

I. INTRODUCCIÓN

El enfoque de este artículo son las aplicaciones de la Regla de Leibniz a las ecuaciones diferenciales (para definiciones básicas y propiedades, ver [7]), la cual nos permite la derivación con respecto a un parámetro de ciertas integrales que cumplan las hipótesis del Teorema de Leibniz.

Casi siempre hay confusión en la derivación paramétrica donde se usa la Regla de la Leibniz; con el Primer Teorema Fundamental del Cálculo y sus corolarios, la cual ha sido materia de discusión en este artículo.

II. METODOLOGÍA Y RESULTADOS IMPORTANTES

Teorema II.1 (El segundo Teorema Fundamental del Cálculo)**.** *Sea f continua sobre un intervalo I. Si F es diferenciable sobre I y si $F' = f$ sobre I, entonces para $a, b \in I$ cualesquiera:*

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

Demostración. Véase [4]. ∎

Teorema II.2. *Toda función continua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable.*

Demostración. Véase [4]. ∎

A. Integrales impropias

Establecemos la siguiente definición:

Supongamos que f es integrable sobre $[a, b]$, $\forall b \geq a$ y sea $F(b) = \int_a^b f$ donde $b \in [a, +\infty[$. Entonces $\int_a^\infty f$ se llama integral impropia (infinita) de primera clase. Decimos que $\int_a^\infty f$ converge si $\lim F$ existe y en tal caso el valor de $\int_a^\infty f$ es $\lim\limits_{\infty} F$, es decir,

$$\int_a^\infty f = \lim_{b\to\infty} F(b) = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f.$$

Si $\lim\limits_{\infty} F$ no existe, se dice que $\int_a^\infty f$ diverge.

B. Ecuaciones diferenciales

Una ecuación diferencial ordinaria es de la forma

$$y^{(m)} = F \circ (I, y, y', \ldots, y^{(m-1)}) \tag{1}$$

donde $y^{(k)} = D^k(y)$ y F es una función de $\mathbb{R}^{nm+1}$ en $\mathbb{R}^n$, si $n = 1$. Una función g de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^n$ se dice que es una solución de (1) sobre el intervalo I si

$$g^{(m)} = F \circ (I, g, g', \ldots, g^{(m-1)}) \text{ sobre } I.$$

La expresión (1) representa un sistema de n ecuaciones diferenciales de orden m si $n > 1$.

Tenemos:

1. La ecuación que describe el movimiento de un péndulo: $\ddot{\theta} + \operatorname{sen}(\theta) = 0$
2. La ecuación diferencial para un circuito eléctrico que consiste en una inductancia (L), una resistencia (R) y una capacitancia (C) dispuesto en serie (q =carga; $\dot{q} = \dfrac{dq}{dt}$ =corriente; E =voltaje aplicado):

$$L\ddot{q}(t) + R\dot{q}(t) + \frac{1}{C}q(t) = E(t).$$

3. La ecuación de Newton (1971) para el movimiento de una partícula en el campo gravitatorio terrestre:

$$m\ddot{\Gamma} = -k\frac{\Gamma}{r^3}, \text{ donde } r = \|\Gamma\|.$$

(Véase [6])

C. El problema de valor inicial (P.V.I.)

A una ecuación diferencial ordinaria si se le asocia una o más condiciones iniciales de acuerdo al orden se le denomina un P.V.I. Puede ser de la forma:

$$\left| \begin{array}{l} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{array} \right. \quad \text{con } f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

Como se puede ver, este P.V.I. es de primer orden y puede que tenga solución única. La condición inicial es que si $t = t_0$ entonces $y = y_0$.

En el desarrollo de este artículo no estudiaremos el Problema de Existencia y Unicidad de Soluciones.

D. Primer teorema fundamental del Cálculo y sus corolarios

Los teoremas fundamentales del cálculo relacionan la diferenciación y la integración mostrando que la integración es el proceso inverso de la diferenciación. El primer teorema fundamental del cálculo afirma que esta relación inversa entre la diferenciación y la integración se verifica si f es continua sobre un intervalo I.

Teorema II.3 (El Primer Teorema Fundamental del Cálculo)**.** *Sea G la función definida por*

$$G(x) = \int_a^x f = \int_a^x f(t)dt,$$

si f es continua sobre un intervalo I y si $a \in I$, entonces G es diferenciable sobre I y

$$G' = f \text{ sobre } I.$$

Demostración. Véase [4]. ■

D.1. Consecuencia del primer teorema fundamental de cálculo

Corolario II.4. *Si f es continua en $\mathbb{R}$ y g es diferenciable en $\mathbb{R}$, entonces*

$$D_x\left[\int_a^{g(x)} f(t)dt\right] = f(g(x))g'(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Demostración. Véase [4]. ■

Corolario II.5. *Si f es continua en $\mathbb{R}$ y g, h son diferenciables en $\mathbb{R}$ entonces, para $x \in \mathbb{R}$*

$$D_x\left[\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)dt\right] = f(g(x))g'(x) - f(h(x))h'(x)$$

Demostración. Véase [4]. ■

E. Derivación bajo el signo integral

Teorema II.6. *Si f es continua sobre el rectángulo*

$$\mathcal{R} = \{(x,y)/a \leq x \leq b \ \wedge \ c \leq y \leq d\},$$

entonces $F(y) = \int_a^b f(x,y)dx$ es continua sobre $[c,d]$.

Demostración. Véase [1]. ■

Teorema II.7. *Si las funciones f y $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ son continuas sobre el rectángulo*

$$\mathcal{R} = \{(x,y)/a \leq x \leq b \ \wedge \ c \leq y \leq d\},$$

entonces $F(y) = \int_a^b f(x,y)dx$ es diferenciable sobre $[c,d]$ y

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y}\int_a^b f(x,y)dx &= F'(y) \\ &= \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) dx \text{ sobre } [c,d]. \end{aligned}$$

Demostración. Véase [5]. ■

Teorema II.8. *Si las funciones f y $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ son continuas sobre la franja*

$$\mathcal{R} = \{(x,y)/x \in [a,\infty[, \ y \in [c,d]\},$$

$\int_a^x f(x,y)dx$ converge a $F(y)$ sobre $[c,d]$, además $\int_a^\infty \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx$ converge uniformemente sobre $[c,d]$, entonces F es diferenciable sobre $[c,d]$,

$$\frac{\partial}{\partial y}\int_a^\infty f(x,y)dx = F'(y) = \int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx.$$

Demostración. Véase [2]. ■

F. La regla de Leibniz y su demostración

Corolario II.9 (Regla de Leibniz)**.** *Si f y $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ son continuas sobre el rectángulo $\mathcal{R} = \{(x,y)/a \leq x \leq b, \ c \leq y \leq d\}$ y las funciones g y h son diferenciables sobre $[c,d]$ con $g(y) \in [a,b]$ para todo $y \in [c,d]$, entonces $F(y) = \int_{g(y)}^{h(y)} f(x,y)dx$ es diferenciable sobre $[c,d]$ y*

$$\begin{aligned} F'(y) &= \frac{\partial}{\partial y}\int_{g(y)}^{h(y)} f(x,y)dx \\ &= \int_{g(y)}^{h(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx + f(h(y),y)h'(y) \\ &\quad - f(g(y),y)g'(y). \end{aligned}$$

Demostración. Sea $G(u,v,y) = \int_u^v f(x,y)dx$. Entonces $F(y) = G(g(y),h(y),y)$. De acuerdo con el primer teorema fundamental del cálculo

$$\begin{aligned}\frac{\partial G}{\partial u}(u,v,y) &= \frac{\partial}{\partial u}\left[-\int_v^u f(x,y)dx\right] \\ &= -f(u,y)\end{aligned} \tag{2}$$

y

$$\frac{\partial G}{\partial v}(u,v,y) = \frac{\partial}{\partial v}\int_u^v f(x,y)dx = f(v,y) \tag{3}$$

ahora por el teorema II.7,

$$\begin{aligned}\frac{\partial G}{\partial y}(u,v,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\int_u^v f(x,y)dx \\ &= \int_u^v \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx\end{aligned} \tag{4}$$

De donde, según la regla de la cadena se tiene:

$$\begin{aligned}F'(y) = &\frac{\partial G}{\partial u}(g(y)h(y),y)g'(y) \\ &+ \frac{\partial G}{\partial v}(g(y),h(y),y)h'(y) \\ &+ \frac{\partial G}{\partial y}(g(y),h(y),y)\end{aligned}$$

que por (2), (3) y (4) se obtiene el resultado:

$$\begin{aligned}F'(y) = &-f(g(y),v)g'(y) + f(h(y),y)h'(y) \\ &+ \int_{g(y)}^{h(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx.\end{aligned}$$

■

III. RESULTADOS

1. La función de Bessel J_0 puede definirse por la regla de correspondencia

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^1 \frac{\cos(xt)}{\sqrt{1-t^2}}dt.$$

Se demuestra que J_0 satisface la ecuación diferencial (ecuación de Bessel)

$$J_0'' + \frac{1}{x}J_0'(x) + J_0(x) = 0.$$

En efecto:

Definamos la región $\mathcal{R} = \{(t,x)/-1 < t < 1,\, 0 < x < 2\pi\}$. Es claro que J_0 y $\frac{\partial J_0}{\partial x} = \frac{-t\operatorname{sen}(xt)}{\sqrt{1-t^2}}$ son continuas sobre $\mathcal{R}$.

Entonces por el teorema II.7 se tiene:

$$\begin{aligned}J_0'(x) &= \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-1}^1 \frac{\cos(xt)}{\sqrt{1-t^2}}dt\right] \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-1}^1 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\cos(xt)}{\sqrt{1-t^2}}\right)dt \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-1}^1 \frac{-t\operatorname{sen}(xt)}{\sqrt{1-t^2}}dt \\ J_0''(x) &= -\frac{1}{\pi}\int_{-1}^1 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{t\operatorname{sen}(xt)}{\sqrt{1-t^2}}\right)dt \\ J_0''(x) &= -\frac{1}{\pi}\int_{-1}^1 \frac{t^2\cos(xt)}{\sqrt{1-t^2}}dt\end{aligned} \tag{5}$$

Integramos por partes:

$$\begin{aligned}u = \operatorname{sen}(xt) \quad &\Rightarrow \quad du = x\cos(xt)dt \\ dv = \frac{-tdt}{\sqrt{1-t^2}} \quad &\Rightarrow \quad v = \sqrt{1-t^2}\end{aligned}$$

Luego:

$$\begin{aligned}J_0'(x) &= \Bigg(\sqrt{1-t^2}\operatorname{sen}(xt)\Big|_{-1}^1 \\ &\quad - \int_{-1}^1 x\sqrt{1-t^2}\cos(xt)dt\Bigg) \\ &= \frac{1}{\pi}\Bigg(\sqrt{1-1^2}\operatorname{sen}(x) - \sqrt{1-(-1)^2}\operatorname{sen}(-x) \\ &\quad -x\int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2}\cos(xt)dt\Bigg) \\ &= -\frac{x}{\pi}\int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2}\cos(xt)dt \\ &= -\frac{x}{\pi}\int_{-1}^1 \frac{(1-t^2)}{\sqrt{1-t^2}}\cos(xt)dt \\ &= -\frac{x}{\pi}\int_{-1}^1 \frac{\cos(xt)}{\sqrt{1-t^2}}dt + \frac{x}{\pi}\int_{-1}^1 \frac{t^2\cos(xt)}{\sqrt{1-t^2}}dt\end{aligned}$$

que por definición de $J_0(x)$ y por (5) tenemos:

$$\begin{gathered}J_0'(x) - xJ_0(x) - xJ_0''(x) = 0 \\ \Rightarrow xJ_0''(x) + J_0'(x) + xJ_0(x) = 0 \\ \therefore J_0''(x) + \frac{1}{x}J_0'(x) + J_0(x) = 0\end{gathered}$$

NOTA: La función de Bessel J_0 es una integral impropia y por el criterio para funciones discontinuas estaría definida por:

$$\begin{aligned}J_0(x) &= \frac{1}{\pi}\int_{-1}^0 \frac{\cos(xt)}{\sqrt{1-t^2}}dt + \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{\cos(xt)}{\sqrt{1-t^2}}dt \\ &= \frac{1}{\pi}\lim_{\epsilon\to 0}\int_{-1+\epsilon}^0 \frac{\cos(xt)}{\sqrt{1-t^2}}dt \\ &\quad + \frac{1}{\pi}\lim_{\epsilon}\int_0^{1-\epsilon} \frac{\cos(xt)}{\sqrt{1-t^2}}dt\end{aligned}$$

2. Se prueba que la función $\int_0^{\infty} \frac{a \operatorname{sen} z + b\cos z}{x+z} dz$, es solución de la ecuación diferencial $x\frac{d^2u}{dx^2} = -ux^2 + ax + b$, con $x, a, b > 0$.

En efecto:

Sea $u(x) = \int_0^{\infty} \frac{a \operatorname{sen} z + b\cos z}{x+z} dz$ usando el Teorema II.8 tenemos:

$$\begin{aligned} u'(x) &= \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{a \operatorname{sen} z + b\cos z}{x+z}\right) dz \\ &= \int_0^{\infty} \frac{-(a \operatorname{sen} z + b\cos z)}{(x+z)^2} dz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow u''(x) &= \int_0^{\infty} -\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{a \operatorname{sen} z + b\cos z}{(x+z)^2}\right] dz \\ &= \int_0^{\infty} \frac{2(a \operatorname{sen} z + b\cos z)}{(x+z)^3} dz \end{aligned}$$

Esta última expresión integramos por partes:

$$\begin{cases} u_1 = a \operatorname{sen} z + b\cos z \Rightarrow du_1 = (a\cos z - b \operatorname{sen} z)dz \\ dv = \frac{2}{(x+z)^3}dz \qquad \Rightarrow v = -\frac{1}{(x+z)^2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow u''(x) = &\left. \frac{-(a \operatorname{sen} z - b\cos z)}{(x+z)^2}\right|_0^{\infty} \\ &+ \int_0^{\infty} \frac{(a\cos z - b \operatorname{sen} z)}{(x+z)^2} dz \end{aligned} \tag{6}$$

Integrando por partes nuevamente en (6) se tiene:

$$\begin{cases} u_2 = a\cos z - b \operatorname{sen} z \\ \Rightarrow du_2 = (-a \operatorname{sen} z - b\cos z)dz \\ dv = \frac{dz}{(x+z)^2} \Rightarrow v = -\frac{1}{x+z} \end{cases}$$

entonces $u''(x)$ es

$$\left.\frac{-(a \operatorname{sen} z + b\cos z)}{(x+z)^2}\right|_0^{\infty} - \left.\left(\frac{a\cos z - b \operatorname{sen} z}{x+z}\right)\right|_0^{\infty} - \underbrace{\int_0^{\infty} \frac{a \operatorname{sen} z + b\cos z}{x+z} dz}_{u(x)}$$

que por el Criterio de la Integral Impropia, en la evaluación de la integración por partes se tiene:

$$\begin{aligned} u''(x) = -\Bigg(&\lim_{p\to\infty} \frac{a \operatorname{sen} p + b\cos p}{(x+p)^2} \\ &+ \frac{a\cos p - b \operatorname{sen} p}{x+p}\Bigg) + \frac{b}{x^2} + \frac{a}{x} - u(x) \end{aligned} \tag{7}$$

desarrollando el límite al infinito:

$$\lim_{p\to\infty} \frac{-\sqrt{a^2+b^2}}{(x+p)^2} = \lim_{p\to\infty} \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{(x+p)^2} = 0$$

entonces por el Teorema del Encaje

$$\lim_{p\to\infty} \frac{a \operatorname{sen} p + b\cos p}{(x+p)^2} = 0.$$

Análogamente se prueba que

$$\lim_{p\to\infty} \frac{a\cos p - b \operatorname{sen} p}{x+p} = 0$$

luego en (7) tenemos

$$u''(x) = \frac{b}{x^2} + \frac{a}{x} - u(x)$$

$$\therefore x^2\frac{d^2u}{dx^2} = -ux^2 + ax + b$$

3. Si A es una solución sobre el intervalo $I \subset \mathbb{R}$ de

$$X'(t) + bX(t) = 0$$

que satisface $A(0) = 1$, entonces

$$X(t) = X_0A(t) + \int_0^t A(t-s)f(s)ds$$

es una solución sobre I de $X'(t) + bX(t) = f(t)$ que satisface $X(0) = X_0$.

Veamos:

Como A es solución de

$$X' + bX = 0 \Rightarrow A'(t) + bA(t) = 0,$$

y usando el factor integrante e^{bt} se tiene:

$$A'(t)e^{bt} + be^{bt}A(t) = 0$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \frac{d}{dt}(A(t)e^{bt}) = 0 \\ &\Rightarrow \int_0^t (A(s)e^{bs})'ds = \int_0^t 0ds \\ &\Rightarrow A(t)e^{bt} - A(0)e^{0b} = 0, \end{aligned}$$

pero $A(0) = 1$

$$\Rightarrow A(t)e^{bt} = 1 \Rightarrow A(t) = e^{-bt}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} X(t) &= X_0e^{-bt} + \int_0^t e^{-b(t-s)}f(s)ds, \text{ con } X(0) \\ &= X_0 \end{aligned}$$

es solución de

$$X'(t) + bX(t) = f(t).$$

En efecto:

Derivando ambos miembros y usando la Regla de Leibniz:

$$X'(t) = -bX_0e^{-bt} + \frac{d}{dt}\left[\int_0^t e^{-b(t-s)}f(s)ds\right]$$
$$= -bX_0e^{-bt} + \int_0^t \frac{d}{dt}[e^{-b(t-s)}f(s)]ds$$
$$+ e^{-b(t-t)}f(t)$$
$$= -bX_0e^{-bt} + \int_0^t -be^{-b(t-s)}f(s)ds + f(t)$$
$$= \left(X_0e^{-bt} + \int_0^t e^{-b(t-s)}f(s)ds\right) + f(t)$$
$$\therefore X'(t) + bX(t) = f(t)$$

Verificamos ahora la condición inicial:

$$X(0) = X_0e^{-b(0)} + \int_0^0 e^{-b(0-s)}f(s)ds \Rightarrow X(0)$$
$$= X_0$$

4. Sabiendo que:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2 \operatorname{sen}^2 x} = \frac{\pi}{2ab}.$$

Deducir el valor de:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{(a^2\cos^2 x + b^2 \operatorname{sen}^2 x)^2}$$

Deducción:

Derivemos ambos miembros la ecuación que se tiene por hipótesis con respecto a los parámetros "a" y "b"; usando el Teorema de Leibniz:

$$\frac{d}{da}\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a^2\cos^2(x) + b^2\operatorname{sen}^2(x)} = \frac{d}{da}\left(\frac{\pi}{2b}a^{-1}\right)$$
$$\Rightarrow \int_0^{\pi/2} \frac{\partial}{\partial a}(a^2\cos^2(x) + b^2\operatorname{sen}^2(x))^{-1}dx = \frac{-\pi}{2b}a^{-2}$$
$$\Rightarrow \int_0^{\pi/2} \frac{-2a\cos^2(x)dx}{(a^2\cos^2(x) + b^2\operatorname{sen}^2(x))^2} = \frac{-\pi}{2ba^2}$$
$$\Rightarrow \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2(x)dx}{(a^2\cos^2(x) + b^2\operatorname{sen}^2(x))^2} = \frac{\pi}{4a^3b} \tag{8}$$

Ahora:

$$\frac{d}{db}\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a^2\cos^2(x) + b^2\operatorname{sen}^2(x)} = \frac{d}{db}\left(\frac{\pi}{2a}b^{-1}\right)$$
$$\Rightarrow \int_0^{\pi/2} \frac{\partial}{\partial b}(a^2\cos^2(x) + b^2\operatorname{sen}^2(x))^{-1}dx = \frac{-\pi}{2a}b^{-2}$$
$$\Rightarrow \int_0^{\pi/2} \frac{-2b\operatorname{sen}^2(x)dx}{(a^2\cos^2(x) + b^2\operatorname{sen}^2(x))^2} = \frac{-\pi}{2ab^2}$$
$$\Rightarrow \int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}^2(x)dx}{(a^2\cos^2(x) + b^2\operatorname{sen}^2(x))^2} = \frac{\pi}{4ab^3} \tag{9}$$

Sumando las ecuaciones (8) y (9) se tiene:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{(\cos^2(x) + \operatorname{sen}^2(x))dx}{(a^2\cos^2(x) + b^2\operatorname{sen}^2(x))^2} = \frac{\pi}{4a^3b} + \frac{\pi}{4ab^3}$$

$$\therefore \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{(a^2\cos^2(x) + b^2\operatorname{sen}^2(x))^2} = \frac{\pi}{4a^3b^3}(b^2 + a^2).$$

5. Si $G(t) = \int_0^\infty e^{-x^2 - \frac{t^2}{x^2}}dx$, $t > 0$. Probar que: $G'(t) + 2G(t) = 0$.

En efecto:

Derivando con respecto a "t" y usando el teorema II.8 tenemos:

$$G'(t) = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial t}\left[e^{-x^2 - \frac{t^2}{x^2}}\right]dx$$
$$= \int_0^\infty \frac{-2t}{x^2}e^{-x^2 - \frac{t^2}{x^2}}dx \tag{10}$$

Ahora resolvemos esta integral con respecto de "x". Hacemos el cambio de variable:

$$\frac{t}{x} = u \Rightarrow du = -t\frac{dx}{x^2}.$$

Cambiamos los límites de integración:

$$\begin{array}{lcl} \text{si } x \to 0 & \Rightarrow & u \to +\infty \\ \text{si } x \to +\infty & \Rightarrow & u \to 0 \end{array}$$

Luego en (10) tenemos:

$$G'(t) = \int_0^\infty -2e^{\frac{-t^2}{u^2} - u^2}du$$
$$= -\int_0^\infty 2e^{-u^2 - \frac{t^2}{u^2}}du$$
$$= -2\int_0^\infty e^{-x^2 - \frac{t^2}{x^2}}dx$$
$$= -2G(t)$$
$$\therefore G'(t) + 2G(t) = 0.$$

IV. CONCLUSIONES

1. Se pudo comprobar que una integral paramétrica se puede derivar de dos maneras: la primera es aplicando la Regla de Leibniz directamente y la segunda es extraer si se puede una función del integrando y derivar un producto aplicando el Primer Teorema Fundamental del Cálculo y sus corolarios.

2. En el estudio de ciertas integrales impropias que dependen de un parámetro no resulta fácil aplicar el Teorema de Leibniz. En primer lugar se debe imponer la Teoría estricta de Integrales Impropias y luego hacer uso de herramientas del Cálculo haciendo cumplir sus hipótesis respectivas.

3. La Regla de Leibniz es de gran utilidad porque no nos restringe solamente al estudio de ecuaciones diferenciales ordinarias sino que también se usa en las aplicaciones a las ecuaciones en derivadas parciales.

4. Se puede ver que la Regla de Leibniz es una herramienta precisa para el cálculo de ciertas integrales que directamente no son solubles con el Cálculo Integral (técnicas de integración directa), pero que derivando dichas integrales y creando una condición inicial formemos un P.V.I. y podemos llegar a la solución, la cual es la integral en cuestión.

REFERENCIAS

[1] Haaser - Lasalle - Sullivan, *Análisis Matemático, Volumen 2*, Editorial Trillas, 1970.

[2] Tom M. Apostol, *Análisis Matemático, Volumen 2*, Editorial Reverte S.A., segunda Edición, 1992.

[3] Murray R. Spiegel, *Cálculo Superior*, Mc Graw Hill Book Company INC, USA, Primera Edición.

[4] Elon Lages Lima, *Curso de Analise, Volumen 1*, IMPA.

[5] Elon Lages Lima, *Curso de Analise, Volumen 2*, IMPA.

[6] Ayres F., *Theory and Problems of Differential Equations*, Schaum Publishing Co., 1952.

[7] Derrick - Grossman, *Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones*, Fondo Educativo Interamericano.