# Applications of Homotopy Theory in Calculus of the Fundamental Group of the sphere and in Engineering

Marisol Paola Delgado Baltazar, Mg.[1][https://orcid.org/0000-0002-0278-9557], Ruben Dario Mendoza Arenas, Dr.[1][https://orcid.org/0000-0002-7861-7946], Jenny María Ruiz Salazar, dr.[2][https://orcid.org/0000-0001-9882-3133], Frank Duberlee Álvarez Huertas, Dr.[3][https://orcid.org/0000-0003-2835-16-81], Hernán Oscar Cortez Gutiérrez, Dr.[1][https://orcid.org/0000-0002-1516-5583]Mónica Beatriz La Chira Loli, Dr.[4][https://orcid.org/0000-0003-6387-1151], Renzo Emerson Rodríguez Calderón, Mg.[3][https://orcid.org/0000-0002-1471-9115]

[1]Universidad Nacional del Callao, Perú, mpdelgadob@unac.edu.pe, rdmendozaa@unac.edu.pe, hocortezg@unac.edu.pe

[2]Universidad Nacional Federico Villarreal, Perú, jruizs@unfv.edu.pe

[3]Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Perú, falvarezh@unmsm.edu.pe, renzo.rodriguez3@unmsm.edu.pe

[4]Universidad Autónoma del Perú, Perú, monica.lachira@autonoma.pe

***Abstract-In topology, and more precisely in algebraic topology, which is the fusion of Topology and Algebra, two continuous applications of a topological space in another are said to be homotopic, if one of them can be "continuously deformed" in the other. The present work intends to demonstrate using Homotopy Theory, particularly using road elevation; that the fundamental group of the circle is isomorphic to $\mathbb{Z}$ and we will see its applications.***

***Keywords: Homotopy, Elevation of paths, Covering spaces, Fundamental group of the circumference.***

# Aplicaciones de la Teoría de la Homotopía en Cálculo del Grupo Fundamental de la esfera y en Ingeniería


Marisol Paola Delgado Baltazar, Mg.[1][https://orcid.org/0000-0002-0278-9557], Ruben Dario Mendoza Arenas, Dr.[1][https://orcid.org/0000-0002-7861-7946], Jenny María Ruiz Salazar, dr.[2][https://orcid.org/0000-0001-9882-3133], Frank Duberlee Álvarez Huertas, Dr.[3][https://orcid.org/0000-0003-2835-16-81], Hernán Oscar Cortez Gutiérrez, Dr.[1][https://orcid.org/0000-0002-1516-5583]Mónica Beatriz La Chira Loli, Dr.[4][https://orcid.org/0000-0003-6387-1151], Renzo Emerson Rodríguez Calderón, Mg.[3][https://orcid.org/0000-0002-1471-9115]

[1]Universidad Nacional del Callao, Perú, mpdelgadob@unac.edu.pe, rdmendozaa@unac.edu.pe, hocortezg@unac.edu.pe

[2]Universidad Nacional Federico Villarreal, Perú, jruizs@unfv.edu.pe

[3]Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Perú, falvarezh@unmsm.edu.pe, renzo.rodriguez3@unmsm.edu.pe

[4]Universidad Autónoma del Perú, Perú, monica.lachira@autonoma.pe



***Resumen-En topología, y más precisamente en topología algebraica, que es la fusión de Topología y Álgebra, se dice que dos aplicaciones continuas de un espacio topológico en otro son homotópicas, si una de ellas puede "deformarse continuamente.*** ***en la otra. El presente trabajo pretende demostrar el uso de la Teoría de Homotopía, particularmente usando la elevación de carreteras; que el grupo fundamental del círculo es isomorfo a $\mathbb{Z}$ y veremos algunas aplicaciones.***



***Palabras clave: Homotopía, Elevación de caminos, Espacios de cubrimiento, Grupo fundamental de la circunferencia.***


## I. INTRODUCCIÓN

En esta investigación se demuestra con herramientas de la Teoría de Homotopía para $n = 1$ que $\pi_n(S^n) = \mathbb{Z}$, llamado Teorema de Hurewicz. La investigación es de tipo básica, pura o fundamental, utiliza el Método Hipotético inductivo-deductivo. El objetivo de este artículo es mostrar que efectivamente la Teoría Simplicial y la elevación de caminos influyen en el cálculo del Grupo de Homotopía de la Circunferencia.

Se puede ver en [1, 2, 4, 5, 8], los preliminares y la teoría básica para la definición de un grupo de homotopía.

En [6, 7, 8, 9], Se da la teoría de la espacios de cubrimiento.

Finalmente en [3, 5, 8, 10], el resultado de este artículo se muestra utilizando la elevación de caminos.

Una versión para calcular el primer grupo de homotopía del círculo es utilizar complejos simpliciales, que no se tratarán en este artículo.

Cabe señalar que para espacios homeomórficos, los grupos fundamentales son isomorfos, pero el recíproco no se cumple, ver [5].

## II. HOMOTOPÍA Y CÁLCULO DEL GRUPO FUNDAMENTAL DE LA CIRCUNFERENCIA

**Definición II.1.** Un espacio topológico es un conjunto $X$ con una familia de subconjuntos abiertos llamados **abiertos**. Por ejemplo, en la recta real $\mathbb{R}$ tenemos los intervalos abiertos, más generalmente, en $\mathbb{R}^n$ -o más aún en un espacio métrico- tenemos las bolas abiertas. Estos conjuntos abiertos son importantes porque nos permiten, entre otras cosas, establecer los conceptos de limite y continuidad de funciones.

**Definición II.2.** Una biyección continua $f : X \to Y$ entre espacios topológicos tal que su inversa $f^{-1} : Y \to X$ también es continua es llamada un **homeomorfismo**. En este caso diremos que los espacios $X$ e $Y$ son homeomorfos. Un problema central de la Topología es determinar cuando dos espacios dados son homeomorfos, este problema está aún sin resolver y al parecer su solución todavía está muy lejana.

En el camino a la solución del problema planteado se han desarrollado diferentes técnicas, entre ellas recurrir al apoyo del Álgebra. Para esto a cada espacio topológico se le asocia un Grupo, que en nuestro caso será llamado **Grupo Fundamental** o **Primer Grupo de Homotopía**. La idea es que "a espacios homeomorfos les corresponden grupos isomorfos". Lamentablemente el recírproco no es cierto, así existen espacios NO homeomorfos cuyos grupos asociados SÍ son isomorfos. Por lo tanto, esta técnica de asociar un grupo a cada espacio topológico sirve, más que nada, para determinar cuando dos espacio NO son homeomorfos, lo que ya es un gran avance.

En lo que sigue $I$ siempre denotará el intervalo $[0, 1]$.

**Definición II.3.** Por un camino en un espacio topológico $X$ entenderemos cualquier función continua $f : I \to X$

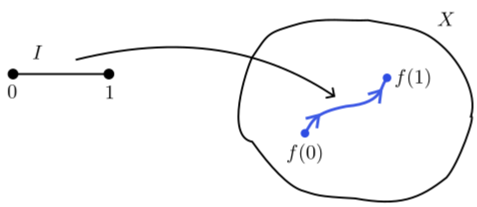


Fig. 1: Las flechas indican que el camino es recorrido desde $f(0)$ a $f(1)$

Sean $f, g : I \to X$ caminos en $X$ tales que $f(0) = g(0)$ y $f(1) = g(1)$. Entonces, $f$ es *homotópica* a $g$ si existe una aplicación continua $F : I \times I \to X$ tal que:

*a.* $F(t, 0) = f(t), \forall\, t \in I$,

*b.* $F(t, 1) = g(t), \forall\, t \in I$,

*c.* $F(0, s) = f(0)$ y $F(1, s) = f(1), \forall\, s \in I$.

Denotando $F_s : I \to X$ tal que $F_s(t) = F(t, s)$, intuitivamente, la noción de homotopía entre los caminos $f$ y $g$ la podemos interpretar como si el camino $f$ se fuese deformando continuamente, a través de los caminos $F_s$, hasta convertirse en $g$, como en la siguiente figura:

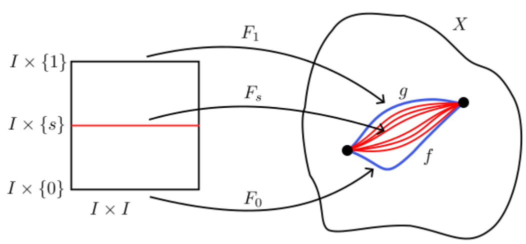


Fig. 2: $F_0 = f$, $F_1 = g$ y $F_s$ es un camino que comienza en $F_s(0) = f(0) = g(0)$ y termina en $F_s(1) = f(1) = g(1)$ para cada $s \in I$

Denotamos esto por

$$f \sim g$$

**Lema II.1.** *Sean $f, g : I \to X$ caminos en $X$ tales que $f(0) = g(0)$ y $f(1) = g(1)$. Sea $\alpha : X \to Y$ conntinua. Si $f \sim g$, entonces*

$$\alpha \circ g \sim \alpha \circ g$$

*Note que $\alpha \circ f$ y $\alpha \circ g$ son caminos en $Y$.*

**Proposición II.2.** *La relación de homotopía es una relación de equivalencia en el conjunto de todos los caminos de $X$ que tiene el mismo punto inicial y el mismo punto final.*

Denotemos con $[f]$ la clase de equivalencia, según la relación de homotopía del camino $f$.

Para cualquier camino $f$, se define su camino inverso como

$$\overline{f}(t) = f(1 - t)\,, \quad \forall t \in I$$

Note que $\overline{f}(0) = f(1)$ y $\overline{f}(1) = f(0)$, así $\overline{f}$ es el mismo camino $f$, pero recorrido en sentido inverso.

Sean, ahora, $f, g : I \to X$ caminos en $X$ tales que $f(1) = f(0)$, entonces, definimos un nuevo camino en $X$, llamado el producto de $f$ y $g$ como

$$(f * g)(t) = \begin{cases} f(2t), & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2 \\ g(2t - 1), & \text{si } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

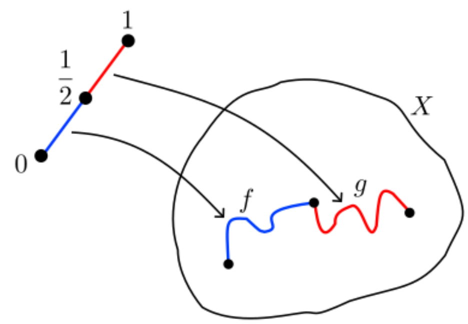


Fig. 3: El producto de $f$ y $g$ es la simple concatenación de los caminos $f$ y $g$ pero recorridos con velocidad duplicada.

**Definición II.4.** El par $(G, \circ)$, donde

$$\begin{array}{rccc} \circ: & G \times G & \longrightarrow & G \\ & (a, b) & \longmapsto & a \circ b \end{array}$$

es una operación interna, es llamado **grupo** si se verifican los siguientes axiomas:

*G*1) $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$, para todo $a, b, c$ en $G$.

*G*2) Existe $e \in G$ tal que $a \circ e = a = e \circ a$, para todo $a \in G$. El elemento $e$ es llamado el neutro de $G$.

*G*3) Para cada $a \in G$, existe $b \in G$ tal que $a \circ b = e = b \circ a$. El elemento $b$ es llamado el inverso de $a$ y suele denotarse como $a^{-1}$.

Siempre que esté definido $f * g$, podemos definir el producto de clases como sigue

$$[f] \bullet [g] = [f * g].$$

Se demuestra que este producto está bien definido, esto es, no depende de los representantes $f$ y $g$ en cada clase.

**Lema II.3.** *Siempre que estén bien definidos los productos involucrados, se cumple*

$$([f] \bullet [g]) \bullet [h] = [f] \bullet ([g] \bullet [h]).$$

**Teorema II.4.** *El conjunto $(\pi_1(X), x_0)$ con el producto de clases es un grupo, llamado Grupo Fundamental de $X$ en el punto $x_0$ o el Primer Grupo de Homotopía de $X$ en $x_0$. En este caso, el elemento neutro del conjunto es $[e_{x_0}]$, la clase de la función constante*

$$\begin{array}{cccc} e_{x_0} & I & \longrightarrow & X \\ & t & \longmapsto & x_0 \end{array}$$

*y dado $[f]$ elemento de $(\pi_1(X), x_0)$ su inverso es*

$$[f^{-1}] = [\overline{f}].$$

Una vez que a cada espacio topológico $X$ le hemos asociado su Grupo Fundamental $(\pi_1(X), x_0)$ la tarea ahora es quien es exactamente $(\pi_1(X), x_0)$, matemáticamente hablando el problema es determinar, salvo isomorfismos, el Grupo Fundamental de $X$. Para esto necesitaremos más herramientas teóricas, como el concepto de Espacio de Cubrimiento.

**Definición II.5.** Un **espacio de cubrimiento** de un espacio topológico $X$ es un par $(\tilde{X}, p)$, donde $\tilde{X}$ es un espacio topológico y $p : \tilde{X} \to X$ es una aplicación continua verificando la siguiente propiedad: Existe un cubrimiento abierto $\{U_i\}_{i \in I}$ de $X$ tal que $p^{-1}(U_i)$ es una unión disjunta de conjuntos abiertos en $\tilde{X}$, cada uno de los cuales es homeomorfo, bajo $p$, a $U_i$, y esto es para cada $i \in I$.

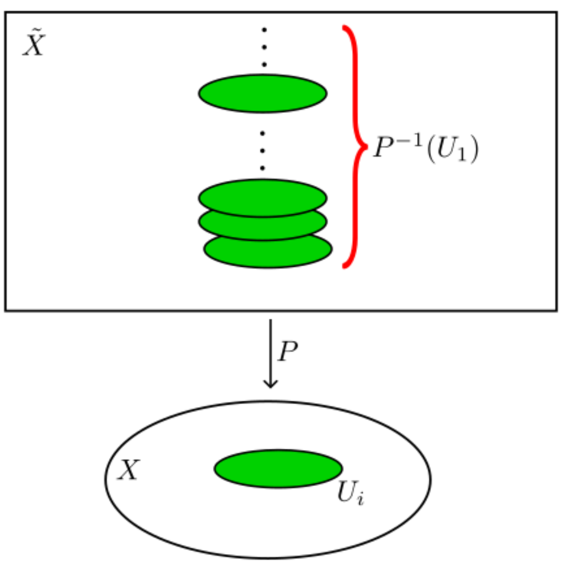


Fig. 4: Idea gráfica del espacio de cubrimiento

## III. $\mathbb{R}$ ES UN CUBRIMIENTO DE $S^1$

Denotaremos con

$$S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = 1\}$$

la circunferencia unitaria en el Plano.

$S^1$ es un espacio topológico con la topología heredada de $\mathbb{R}^2$ (Esto es: los abiertos de $S^1$ son de la forma $A \cap S^1$, donde $A$ es un abierto de $\mathbb{R}^2$).

Considere la aplicación continua $p : \mathbb{R} \to S^1$ dada por

$$p(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t).$$

Demostraremos que el par $(\mathbb{R}, p)$ es un espacio de cubrimiento para la circunferencia $S^1$. Para mostrar esto, por cuestiones didácticas trabajaremos todo en $\mathbb{R}^3$, para esto haremos las siguientes identificaciones:

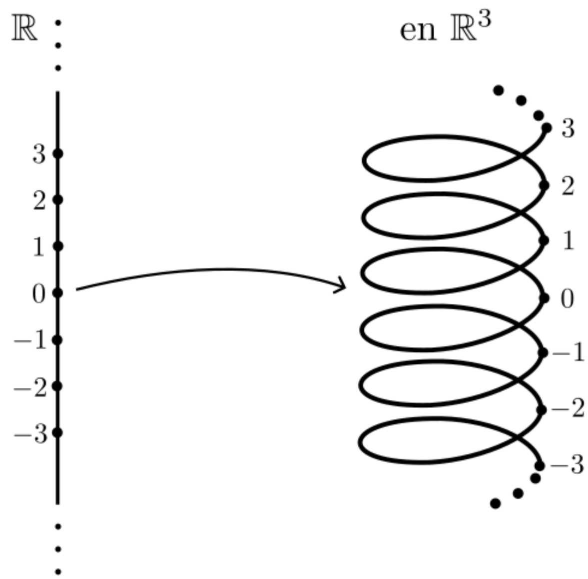


Fig. 5: Identificamos la recta $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^3$ con un serpetín o resorte

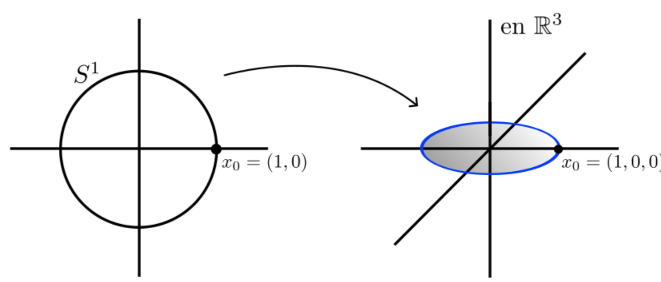


Fig. 6: En esta identificación la apliciación $p$ anteriormente definida se convierte en la proyección sobre el plano $XY$

Esto último significa que

$$p(x, y, z) = (x, y, 0).$$

Simultáneamente

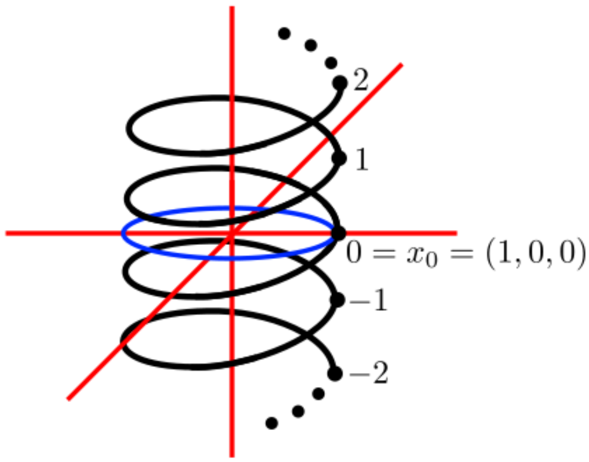


Fig. 7: Interpretación conjunta de las identificaciones

Note que al identificar tenemos

$$\begin{aligned} &\vdots \\ 2 &= (1,0,2) \\ 1 &= (1,0,1) \\ 0 &= (1,0,0) = x_0 \\ -1 &= (1,0,-1) \\ -2 &= (1,0,-2) \\ &\vdots \end{aligned}$$

En $S^1$ considere los abiertos $U$ y $V$ como en la figura

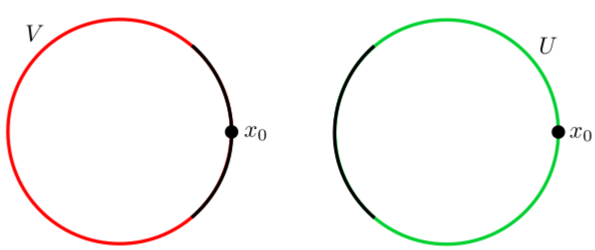


Fig. 8: $U$ y $V$ son tales que $S^1 = U \cup V$

Así $\{U, V\}$ es un cubrimiento abierto de $S^1$.

Con nuestra identificación de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^3$ como un resorte se puede mostrar claramente lo siguiente

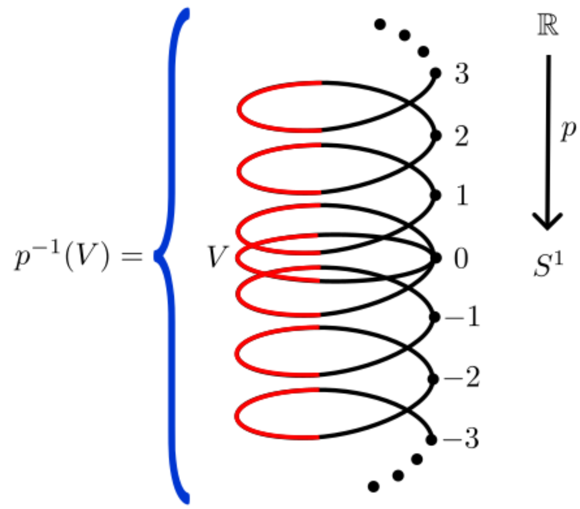


Fig. 9: $p^{-1}(V)$ es una unión disjunta de abiertos en $\mathbb{R}$ (los pintados de rojo) cada uno de los cuales es homeomorfo a $V$.

Esto mismo también ocurre con $p^{-1}(U)$ como se muestra

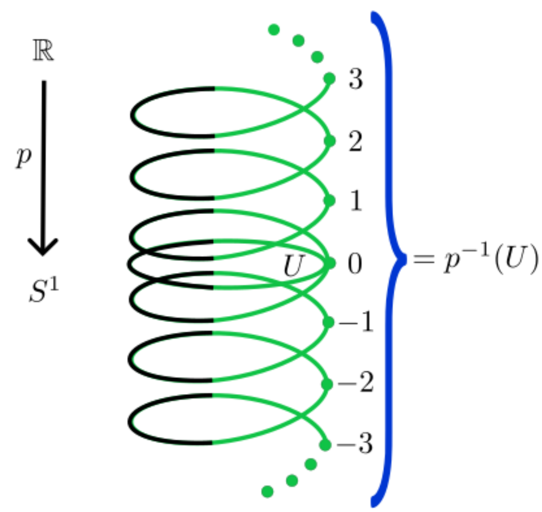


Fig. 10: $p^{-1}(U)$ es una unión disjunta de abiertos en $\mathbb{R}$ (los pintados de verde) cada uno de los cuales es homeomorfo a $U$.

Por tanto, se ha mostrado que el par $(\mathbb{R}, p)$ es un espacio de cubrimiento de $S^1$.

**Definición III.1.** Sea $(\tilde{X}, p)$ un espacio de cubrimiento de $X$, sea $f : Y \to X$ una aplicación continua. Un **levantamiento** de $f$ es una aplicación continua $\tilde{f} : Y \to \tilde{X}$ tal que $p \circ \tilde{f} = f$

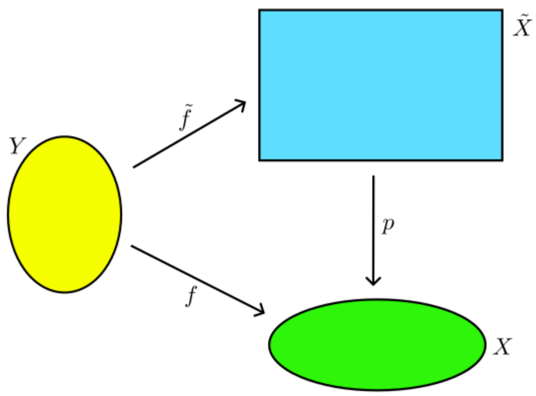


Fig. 11: Idea gráfica de levantamiento

***EJemplo* III.1.** Sea $\omega_n : I \to S^1$ tal que $\omega_n(s) = (\cos 2\pi ns, \sin 2\pi ns)$, para cada $n \in \mathbb{Z}$. Note que $\omega_n$ es un lazo que comienza en $x_0 = (1,0)$, da $|n|$ vueltas al círculo $S^1$, si $n \neq 0$, y termina en $x_0 = (1,0)$. Si $n = 0$, $\omega_0$ es la función constante $(1,0)$.

Recordemos que hemos identificado $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^3$ como una especie de resorte.

En esta identificación el intervalo $[0,1]$ se identifica con la vuelta del resorte en 0 y termina en 1. El intervalo $[0,2]$ se identifica con las dos primeras vueltas del resorte hacia arriba comenzando del 0.

En general el intervalo $[0,n]$ se identifica con las $n$ primeras vueltas del resorte hacia arriba comenzando del 0. Si $n < 0$, el intervalo $[n,0]$ se identifica con las $-n$ primeras vueltas del resorte hacia abajo comenzando del 0.

Sea $\tilde{\omega}_n : I \to \mathbb{R}$ el camino $\tilde{\omega}_n(s) = ns$, note que este camino comienza en o y termina en $n$, por tanto su imagen en el intervalo $[0,n]$ o $[n,0]$ según sea $n$ positivo o negativo respectivamente, y por nuestra definición $\tilde{\omega}_n$ es el camino que comienza en 0 y recorre las $|n|$ primeras vueltas hacia arriba o hacia abajo del resorte.

Así por ejemplo

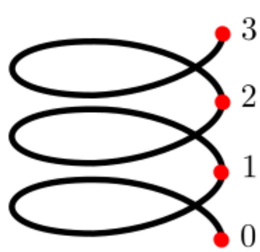


Fig. 12: $\tilde{\omega}_3$ comienza en 0 y da tres vueltas hacia arriba del resorte.

Claramente si proyectamos $\tilde{\omega}_3$ sobre el plano $XY$ obtendremos la circunferencia $S^1$ pero recorrida 3 veces, uno por cada vuelta del resorte, esto es, $p \circ \tilde{\omega}_3 = \omega_3$.

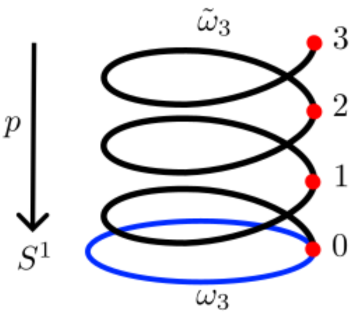


Fig. 13: Proyección de $\tilde{\omega}_3$ sobre el plano $XY$.

En general $p \circ \tilde{\omega}_n = \omega_n$. Por tanto, hemos mostrado que $\tilde{\omega}_n$ es un levantamiento de $\omega_n$ para cada $n \in \mathbb{Z}$.

## IV. LEVANTAMIENTO DE CAMINOS

Todo espacio de cubrimiento posee la siguiente propiedad de levantamiento.

**Proposición IV.1** (Propiedad de Levantamiento de caminos)**.** *Sea $(\tilde{X}, p)$ un espacio de cubrimiento de $X$, sea $f : I \to X$ un camino que comienza en $x_0 \in X$. Entonces, para cada $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ existe un único camino $\tilde{f} : I \to \tilde{X}$ que comienza en $\tilde{x}_0$ y es un levantamiento de $f$.*

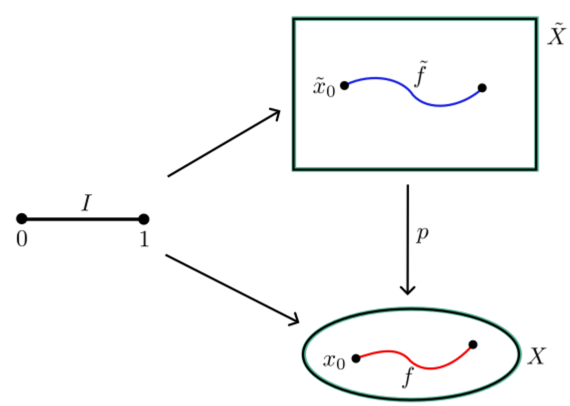


Fig. 14: Idea gráfica de levantamiento de caminos

Se cumple que $p \circ \tilde{f} = f$, donde $p(\tilde{x}_0) = x_0$.

Como una observación, note que en nuestra identificación, los puntos que se proyectan sobre $x_0 = 0$ son precisamente los números enteros.

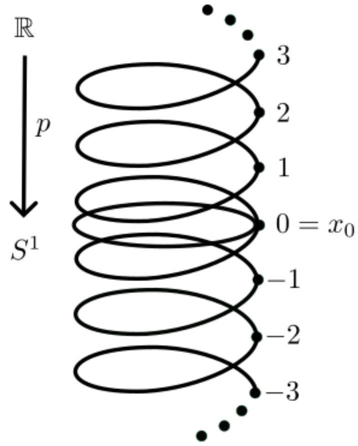


Fig. 15: Proyección de los números enteros

$$\begin{aligned} \ldots = p(-3) = p(-2) = p(-1) = \underbrace{x_0}_{=0} \\ = p(1) = p(2) = p(3) = \ldots \end{aligned}$$

por lo tanto

$$p^{-1}(x_0) = \mathbb{Z}$$

**Definición IV.1.** Sea $f$ un lazo en $S^1$ que comienza y termina en $x_0$, esto es

$$f(0) = x_0 = f(1)$$

Por la propiedad de levantamiento de caminos, existe un único levantamiento $\tilde{f}$ que comienza en 0. Ahora

$$\tilde{f}(1) \in p^{-1}(p(\tilde{f}(1))) = p^{-1}(f(1)) = p^{-1}(x_0) = \mathbb{Z}$$

de donde $\tilde{f}(1) \in \mathbb{Z}$.

Al entero $\tilde{f}(1)$ lo llamaremos **el grado** de $f$, y lo denotaremos $\deg f$.

Usaremos los conceptos de espacio de cubrimiento, levantamiento de caminos y grado de un lazo para calcular el Grupo Fundamental de $S^1$. Antes enunciamos el siguiente lema:

**Lema IV.2.** *Si $X$ es un espacio topológico, entonces $\pi_1(X) = 0$.*

La prueba del anterior lema se puede interpretar como sigue

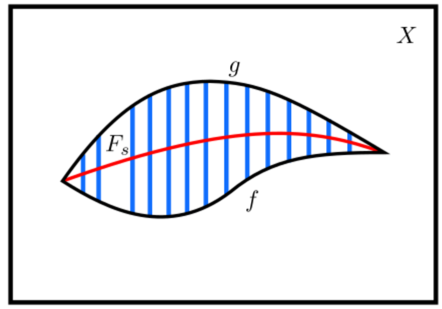


Fig. 16: Idea gráfica de la prueba del lema

*Demostración.* Bastará mostrar que todo par de caminos con los mismos puntos extremos en $X$ son homotópicos (en particular los lazos).

Sean $f, g$ dos caminos cualesquiera en $X$ que tienen los mismos puntos extremos. Basta considerar la homotopía dada por

$$F_s(t) = (1 - s)f(t) + sg(t)$$

para todo $t \in I$ y todo $s \in I$. ■

Considerando los conceptos y notaciones previas enunciamos a continuación el teorema que nos permitirá calcular el grupo fundamental de $S^1$.

**Teorema IV.3.** *Se cumple que $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$, donde esta igualdad se entiende es a nivel de isomorfismos, es decir, el grupo fundamental de $S^1$ es isomorfo a $\mathbb{Z}$.*

*Demostración.* Recordemos que para cada $n \in \mathbb{Z}$ hemos definido

$$\omega_n : I \to S^1 \text{ tal que } \omega_n(s) = (\cos 2\pi ns, \sin 2\pi ns)$$

que es el lazo que comienza en $x_0$ da $|n|$ vueltas al círculo $S^1$ y termina en $x_0$. Esto nos permite definir la aplicación

$$\varphi : (\mathbb{Z}, +) \to (\pi_1(S^1), \bullet) \text{ como } \varphi(n) = [\omega_n].$$

Recordemos también que dado un lazo $f$ en $S^1$, el grado de $f$ es un número entero. Esto nos permite definir la aplicación

$$\psi : (\pi_1(S^1), \bullet) \to (\mathbb{Z}, +) \text{ como } \psi([f]) = \deg f$$

Los pasos a seguir para la prueba serán dos:

- Mostrar que $\varphi$ es un homomorfismo de grupos.
- Mostrar que las aplicaciones $\varphi$ y $\psi$ son una la inversa de la otra y por tanto son ambas biyecciones.

Note que de la combinación de ambos pasos se concluye que $\varphi$ es un isomorfismo entre grupos $(\mathbb{Z}, +)$ y $(\pi_1(S^1), \bullet)$ que es lo que queríamos probar.

La prueba de que $\varphi$ es un homomorfismo de grupos se puede hacer incluso gráficamente.

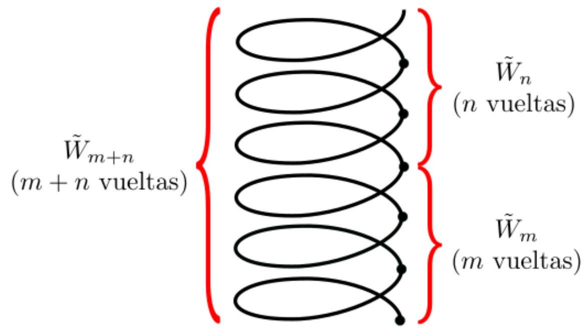


Fig. 17: Idea gráfica

Así
$$\tilde{\omega}_{m+n} \sim \tilde{\omega}_m * \tilde{\omega}_n$$
y por propiedad
$$p \circ \tilde{\omega}_{m+n} \sim p \circ (\tilde{\omega}_m * \tilde{\omega}_n)$$
luego
$$\omega_{m+n} \sim \omega_m * \omega_n$$
de donde
$$[\omega_{m+n}] = [\omega_m * \omega_n][\omega_m] \bullet [\omega_n]$$
así
$$\varphi(m+n) = \varphi(m) \bullet \varphi(n)$$
lo que muestra que $\varphi$ es un homomorfismo de grupos.

Resta mostrar que $\varphi \circ \psi = id_{\pi_1(S^1)}$. Calculemos ahora $\varphi \circ \psi$
$$(\varphi \circ \psi)([f]) = \varphi(\psi([f])) = \varphi(\deg f) = [\omega_{\deg f}]$$

Queremos que $(\varphi \circ \psi) = [f]$, luego bastará mostrar que $[f] = [\omega_{\deg f}]$, lo que equivale a mostrar que
$$f \sim \omega_{\deg f}$$

Sea $m$ el grado de $f$, entonces
$$m = \deg f = \tilde{f}(1)$$
donde $\tilde{f}$ es el único levantamiento de $f$ que comienza en 0 y termina en $\tilde{f}(1)$. Note que $\tilde{f} : I \to \mathbb{R}$ existe por la propiedad de levantamiento de caminos. Ahora, $\tilde{\omega}_m : I \to \mathbb{R}$ es también un camino que comienza en 0 y termina en $m = \tilde{f}(1)$. Como $\mathbb{R}$ es un espacio conexo, por el Lema IV.2
$$\tilde{f} \sim \tilde{\omega}_m$$
de donde
$$p \circ \tilde{f} \sim p \circ \tilde{\omega}_m$$
así $f \sim \omega_m$ como queríamos. ∎

# V. APLICACIONES

## A. Espacios de configuraciones en sistemas mecánicos

Estos transforman o transmiten movimiento, ellos pueden tener elementos sólidos y estar asociados con sistemas eléctricos. En mecánica clásica, el espacio de configuraciones representa todas las posiciones posibles del sistema, y puede tener una estructura topológica o diferenciable, siendo su objetivo, la complejidad topológica. Presentamos un ejemplo llamado "problema del pianista", donde un pianista debe mover un piano en una habitación con obstáculos, donde el espacio de configuraciones del piano se determina por la presencia de obstáculos.

Denotemos por $\{O_n\}_{n=1}^{m}$ los $m$ obstáculos presentes en la habitación. Entonces su espacio de configuraciones asociado al piano está determinado por
$$X = H \setminus \bigcup_{n=1}^{m} O_n$$

Fig. 18: Ilustración del problema del pianista, ver [12]

Como segundo ejemplo tenemos el análisis de un brazo robótico compuesto por "$n$" barras $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ conectadas por codos flexibles, con un punto inicial fijo para $A_1$ y la posibilidad de autointersecciones. En un plano, una configuración del brazo se describe mediante "$n$" ángulos $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n)$, donde $\theta_i$ es el ángulo entre la barra $A_i$ y el eje $OX$. El espacio de configuraciones del brazo robótico en el plano, sin obstáculos, se representa como un toro $n$-dimensional.

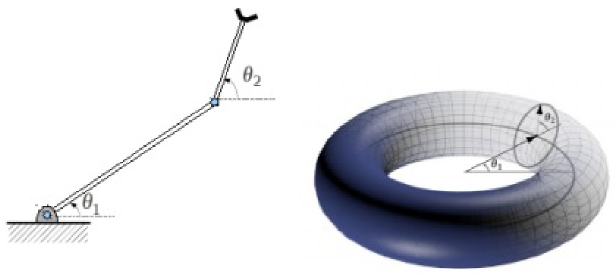


Fig. 19: $X = S^1 \times S^1 \times \ldots \times S^1$

### *B. Teoría de la estructura electrónica de bandas de materiales topológicos*

Teoría de estructura electrónica de bandas: En la física de materiales, la teoría de estructura electrónica de bandas se utiliza para describir cómo los electrones se distribuyen en niveles de energía específicos en un material. Las bandas de energía representan los niveles permitidos de energía para los electrones en un material. La conectividad o desconexión de estas bandas puede ser crucial para determinar las propiedades del material.

Materiales topológicos: Los materiales topológicos son sustancias que exhiben propiedades electrónicas únicas y estados de la materia debido a su topología especial. Un semimetal topológico es un tipo de material topológico en el que las bandas electrónicas se interconectan de manera específica, lo que resulta en propiedades electrónicas particulares. Un aislante topológico es otro tipo de material topológico en el que las bandas electrónicas no están conectadas en ciertas regiones, creando un “hueco” en el espectro de energía.

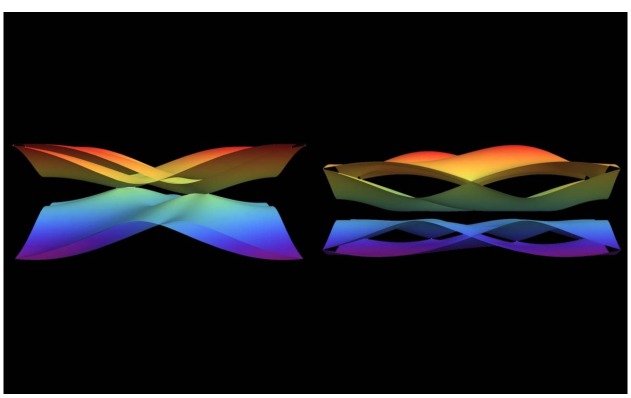

Fig. 20: Representación gráfica de la estructura de bandas electrónicas del material en estudio (Ver [11])

Las bandas interconectadas en la figura de la izquierda indican que el material es un semimetal topológico. Esto sugiere que ciertas propiedades electrónicas especiales pueden manifestarse, como la presencia de fermiones de Weyl o nodos de Dirac. Las bandas no conectadas en la figura de la derecha sugieren que el material es un aislante topológico. Estos materiales pueden tener propiedades de conducción en la superficie, pero son aislantes en el interior. Implicaciones prácticas: Este nuevo paradigma en la teoría de estructura electrónica de bandas puede tener diversas aplicaciones prácticas en electrónica cuántica, informática cuántica, y otras tecnologías emergentes que se benefician de las propiedades únicas de los materiales topológicos.

La teoría de homotopía es un campo matemático que estudia las propiedades topológicas de espacios y funciones continuas. Aunque su aplicación directa en ingeniería puede no ser tan común como en matemáticas puras, la teoría de homotopía tiene varias aplicaciones indirectas y conexiones en la ingeniería. Aquí hay algunas áreas en las que la teoría de homotopía puede ser relevante:

### *C. Topología y Diseño de Redes*

La teoría de homotopía puede ser útil en el diseño y optimización de redes, ya que puede ayudar a comprender las propiedades topológicas de los sistemas de comunicación y a analizar la conectividad de nodos y enlaces (Ver [13]).

### *D. Robótica y Trayectorias*

En robótica, la planificación de trayectorias es esencial. La teoría de homotopía puede utilizarse para estudiar la deformación continua de trayectorias y ayudar en la generación eficiente de movimientos para robots.

### *E. Optimización Topológica*

En el diseño estructural y la optimización topológica, la teoría de homotopía puede ser relevante para comprender las transformaciones topológicas que experimenta una estructura bajo diferentes condiciones de carga.

### *F. Análisis de Sistemas Dinámicos*

La teoría de homotopía puede ser aplicada en el análisis de sistemas dinámicos para estudiar las bifurcaciones y cambios topológicos en el comportamiento de sistemas físicos y mecánicos.

### *G. Electrónica y Diseño de Circuitos*

En el diseño de circuitos electrónicos, la teoría de homotopía puede ser utilizada para analizar las características topológicas de circuitos y sistemas, especialmente en la optimización de diseños.

### H. Problemas de Geometría Computacional

La teoría de homotopía también se utiliza en problemas de geometría computacional, como la resolución de ecuaciones algebraicas y la representación de formas geométricas.

### I. Física Aplicada

En física aplicada, la teoría de homotopía puede tener aplicaciones en el estudio de transiciones de fase y en la comprensión de las propiedades topológicas de materiales y sus comportamientos bajo diferentes condiciones. Aunque estas aplicaciones son ejemplos generales, es importante señalar que la adopción específica de la teoría de homotopía en proyectos de ingeniería puede variar según el contexto y la naturaleza del problema. Además, en muchos casos, las herramientas y métodos basados en la teoría de homotopía pueden ser utilizados de manera más indirecta a través de herramientas computacionales y algoritmos específicos.

## VI. CONCLUSIONES

Con las herramientas matemáticas de Teoría de Homotopía en el área de Topología Algebraica dentro de la Matemática se logra demostrar cómo se da la influencia de la elevación de caminos en el Cálculo del grupo de homotopía de la esfera.

La Elevación de Caminos es el proceso por el cual se estudia el grado de los lazos de la circunferencia mediante la propiedad de elevación de caminos que tiene la aplicación canónica $p : \mathbb{R} \to S^1$, $p(r) = e^{2\pi ir}$. Para ello se analiza previamente la noción de aplicación recubridora y sus propiedades de elevación de caminos y homotopías.

El grupo denotado por $\pi_1(X, x_0)$, es denominado grupo fundamental del espacio basado $(X, x_0)$. En aquellos contextos en los que el punto base quede bien determinado y en otros casos en los que su papel no sea relevante utilizaremos la notación $\pi_1(X)$. Cuando $X = S^n$, el Grupo de Homotopía se denomina Grupo fundamental de la esfera "$n + 1$" dimensional, y es acá donde probamos que $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$.

La teoría de homotopía dentro de la topología algebraica son dos ramas de la matemáica muy poderosas en las aplicaciones en problemas de contexto real: Espacios de configuraciones en sistemas mecánicos, Teoría de la estructura electrónica de bandas de materiales topológicos, Topología y Diseño de Redes, Robótica y Trayectorias, Optimización Topológica, Análisis de Sistemas Dinámicos, Electrónica y Diseño de Circuitos, Problemas de Geometría Computacional y Física Aplicada.

## REFERENCIAS


[1] E. Birkhäuser and E. Spanier, *Algebraic topology*, Springer – Verlag, 1966.

[2] J. Dugundji, *Topology*, Allyn and Bacon Inc. Boston, Fourth Printing, 2010.

[3] S. Eilenberg and N. Steenrod, *Foundations of algebraic topology*, Princeton University Press, Princeton N.J., 2012.

[4] B. Gray, *Homotopy theory*, Academic Press, New York – San Francisco – London, 2000.

[5] C. Kosniowski, *Topología algebraica*. Editorial Reverté, S.A., 2008.

[6] C. Maunder, *Introduction to algebraic topology*, Cambridge University Press, 1980.

[7] J. May, "The geometry of iterated loop spaces", *Lectures notes in mathematics. Springer. Poincaré H. Analysis Situs, J. Ecole Polytechnique*, pp. 1–121, 1972.

[8] J. Munkres, *Topología*, Prentice Hall, 2015.

[9] UNED, "Guía de Estudio pública 19-20: Topología", https://www.sanzytorres.es/static/pdf/GuiaPublica_21152415_ 2020.pdf, 2020.

[10] W. Massey, *Introducción a la topología Algebraica*, Editorial Reverté, S.A., 2014.

[11] B. Bradlyn et al., "Topological quantum chemistry", *Nature*, DOI: 10.1038/nature23268, 2017.

[12] D. Laarbi, "La complejidad topológica del planificador de movimientos robótico" (Trabajo de Fin de Grado Facultad de Ciencias Sección de Matemáticas, Universidad de La Laguna), https://riull.ull.es/xmlui/bitstream/handle/915/3204/La+complejidad+topologica+del+planificador+de+movimientos +robotico.pdf?sequence=1, 2016.

[13] Mendoza-Arenas et al., "Applications of simplicial complexes in the calculation of the homotopy group of the sphere and in systems engineering", *Proceedings of the LACCEI international Multi-conference for Engineering, Education and Technology*, 2023.