ISBN: 978-628-95207-8-1. ISSN: 2414-6390. Digital Object Identifier: 10.18687/LACCEI2024.1.1.1598

A Study of the Construction of the Notion of Parabola in Engineering Students

Ray Wladimir Flores Manghiert, MSc[1], Katia Vigo Ingar, Dr[2], Cristian Félix Rojas Huamán, MSc[3] and Julia Lizet Torres Rivera, PhD[4]

[1]*Universidad Tecnológica del Perú, Perú, C26047@utp.edu.pe*
[2]*Universidad Nacional del Callao, Perú, kvigoi@unac.edu.pe*
[3]*Universidad Privada del Norte, Perú, cristian.rojas@upn.edu.pe*
[4]*Universidad César Vallejo, Perú, jtorres25@ucvvirtual.edu.pe*

Abstract

This article presents a snippet of a master's research, in which both the creation and the a priori and a posteriori analysis of the problem situation presented here were extracted from that research [1], whose advisor was the second author of this work. The need to investigate the parabola as a geometric locus arises from observing the difficulties encountered by engineering students during their first year of studies. This mathematical object is typically taught by first presenting the theoretical part followed by a series of repetitive exercises, prioritizing algebraic operations and neglecting the initial concepts of geometric locus.

Furthermore, the exercises are far from being meaningful situations for future engineers, such as the geometric design of a parabolic antenna. Therefore, the purpose of this research is for students to discover, construct, and apply concepts related to the parabola in an engineering context. In this regard, the objective of this article is to analyze the interactions of first-year students in Electrical and Electronic Engineering at a public university in Lima, Peru, regarding the construction of the notion of the parabola as a geometric locus.

The experimental part was conducted in person with university students aged between 17 and 19 years, in a pencil-and-paper environment. Didactic Engineering methodology was employed, allowing for the confrontation of a priori analysis with a posteriori analysis. Additionally, a bibliographic review was conducted to gain an overview of the main research studies related to the parabola as part of conics, using the dynamic software GeoGebra. This research observed the actions taken by students when facing the proposed problem situations, as well as the formulations developed by them, subsequently validating their results through semiotic representation records, which contributed to the construction of the parabola as a geometric locus.

Keywords: Didactic Engineering; Parabola; Didactic Situation Theory; Semiotic Representation Records.

Estudio sobre la construcción de la noción de parábola con estudiantes de ingeniería

Ray Wladimir Flores Manghiert, MSc[1], Katia Vigo Ingar, Dr[2], Cristian Félix Rojas Huamán, MSc[3] and Julia Lizet Torres Rivera, PhD[4]

[1]*Universidad Tecnológica del Perú, Perú, C26047@utp.edu.pe*
[2]*Universidad Nacional del Callao, Perú, kvigoi@unac.edu.pe*
[3]*Universidad Privada del Norte, Perú, cristian.rojas@upn.edu.pe*
[4]*Universidad César Vallejo, Perú, jtorres25@ucvvirtual.edu.pe*

Resumen

El artículo trata de un recorte de una investigación de maestría. En la cual tanto la creación, el análisis a priori y a posteriori de la situación problema presentada aquí fue extraída de esa investigación [1] cuya asesora fue la segunda autora de este trabajo.

La necesidad de investigar sobre la parábola, como lugar geométrico, nace al observar las dificultades presentes en su estudio por parte de estudiantes de ingeniería durante su primer año de estudios. Este objeto matemático se suele enseñar presentando primero la parte teórica para continuar con una serie de ejercicios repetitivos, dando prioridad a las operaciones algebraicas y dejando de lado los conceptos iniciales de lugar geométrico. Asimismo, los ejercicios están muy lejos de ser situaciones significativas para los futuros ingenieros, esto es, el diseño geométrico de una antena parabólica. Por ello, el propósito de esta investigación es que los estudiantes puedan descubrir, construir y aplicar conceptos vinculados a la parábola en un entorno de ingeniería. En este sentido, el objetivo de este artículo es analizar las interacciones de los estudiantes del primer año de ingeniería Eléctrica y Electrónica de una universidad pública de Lima-Perú frente a la situación problema propuesta respecto a la construcción de la noción de parábola como lugar geométrico. La parte experimental se realizó de manera presencial con universitarios cuyas edades oscilan entre los 17 y 19 años, en un ambiente de lápiz y papel. Se empleó la metodología de Ingeniería Didáctica, la que permitió confrontar el análisis a priori con el análisis a posteriori. También, se ha realizado un levantamiento bibliográfico para tener un panorama de las principales investigaciones referentes a la parábola como parte de las cónicas y empleando el software dinámico GeoGebra. En esta investigación se observó las acciones empleadas por los estudiantes al afrontar las situaciones problema planteadas, así como las formulaciones desarrolladas por ellos, para posteriormente validar sus resultados mediante registros de representación semiótica, lo que contribuyó a la construcción de la parábola como lugar geométrico.

Palabras clave: Ingeniería Didáctica; Parábola; Teoría de Situaciones Didáctica; Registros de Representación Semiótica.

I. INTRODUCCIÓN

La comprensión profunda del objeto matemático parábola es crucial para el desarrollo sólido de competencias geométricas en los estudiantes. En este sentido, nuestra investigación se centra en analizar la situación actual de las investigaciones más relevantes relacionados al estudio de las cónicas, especialmente la parábola, tanto desde la óptica de la geometría analítica como a través del uso de la tecnología educativa utilizando el software GeoGebra.

En primer lugar, abordamos una selección rigurosa de los principales trabajos académicos asociados a la parábola, privilegiando investigaciones publicadas en revistas indexadas, tesis de maestría y doctorado. Se destacó investigaciones recientes que abordan la parábola como lugar geométrico y que integren el uso de herramientas tecnológicas como GeoGebra.

Para la búsqueda exhaustiva se emplearon palabras clave específicas vinculadas a nuestro objeto de estudio, tales como "Parábola", "cónicas", "geometría analítica", "software educativo", entre otras. Los resultados de la búsqueda revelaron una cantidad significativa de trabajos tanto a nivel nacional como internacional, provenientes de países, por ejemplo, Brasil, Colombia, Chile y España [1]. Los autores de estos trabajos identifican diversos desafíos en el aprendizaje de la parábola, abordando temas como:

1. La dicotomía entre la geometría sintética y la analítica, donde se destaca la necesidad de encontrar un equilibrio entre métodos que proporcionen pruebas intuitivas y aquellos que revelen el sentido profundo de los conceptos geométricos [2].

2. El papel crucial de los ambientes de geometría dinámica en el proceso de enseñanza y aprendizaje, ofreciendo a los estudiantes la oportunidad de explorar y comprender las propiedades de los objetos matemáticos desde diversas perspectivas [3].

3. La importancia de integrar las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC), especialmente los ambientes de geometría dinámica, para mejorar la comprensión de los lugares geométricos como la parábola, permitiendo una representación más dinámica y expresiva de los conceptos matemáticos [4].
4. Los errores y obstáculos comunes al intentar comprender la noción de parábola como lugar geométrico, destacando la necesidad de abordar estas concepciones erróneas mediante estrategias pedagógicas efectivas [5].

En este contexto, se busca contribuir al debate académico sobre cómo mejorar la enseñanza y el aprendizaje de la parábola como lugar geométrico, identificando, primeramente, las dificultades existentes como se muestra en la Fig. 1.

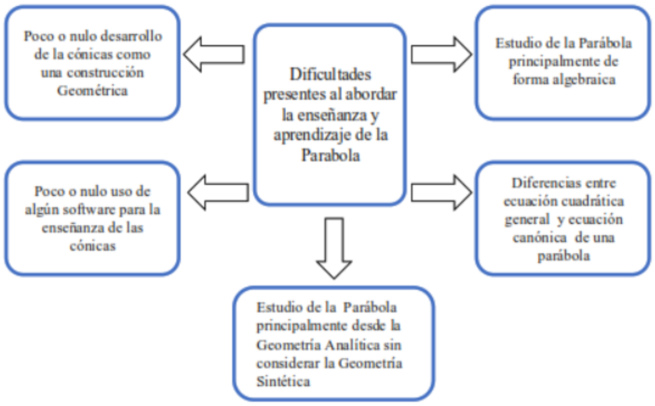


Fig.1 Dificultades presentes en la enseñanza de la parábola [1].

Algunas dificultades observadas en las investigaciones de referencia nos impulsan a realizar un estudio y plantear una propuesta didáctica. Además, consideramos la importancia que tiene el estudio de este objeto matemático en la formación académica de futuros ingenieros. Asimismo, destacamos el papel de la tecnología educativa, específicamente del software GeoGebra en el desarrollo de esta investigación.

Si bien nuestros sujetos de estudio son estudiantes de ingeniería, cabe señalar también la importancia de la formación de profesores en la enseñanza del objeto matemático parábola, donde se evidencia una ausencia de investigaciones y una sistematización de esta, lo que podría indicar una problemática adicional [6].

II. ASPECTOS TEÓRICOS

A. Teoría de las Situaciones Didácticas

Tiene como intención establecer un modelo de interacción entre el estudiante, el conocimiento y el entorno en el cual se desarrolla el proceso de aprendizaje. Esta teoría se fundamenta en varias hipótesis fundamentales: se sostiene que el aprendizaje del estudiante se produce mediante la adaptación a un entorno que genera desequilibrio, contradicciones y desafíos. Este proceso de adaptación resulta en la manifestación de nuevas respuestas, que son indicativas del aprendizaje. Se argumenta que un entorno carente de intenciones didácticas es insuficiente para que el estudiante adquiera conocimientos matemáticos. Por lo tanto, para que se produzca un aprendizaje efectivo, el docente debe diseñar y organizar el entorno de manera que promueva la intención didáctica y estimule el proceso de aprendizaje. Se destaca que tanto el entorno como la situación presentada deben estar en consonancia con los conocimientos previos del estudiante, de manera que se pueda comprometer y aprovechar adecuadamente su bagaje de conocimientos [7].

Una **situación didáctica** se define como un conjunto de interacciones entre el profesor, el estudiante y el entorno, diseñado con el propósito de facilitar su aprendizaje. En este contexto, el profesor prepara cuidadosamente la situación teniendo en cuenta los conocimientos previos del estudiante y buscando que el conocimiento surja de las acciones del estudiante. Por otro lado, introduce el concepto de **situación adidáctica**, donde el profesor evita participar directamente en la transmisión de conocimientos y permite que el estudiante construya su comprensión a partir de la resolución de problemas planteados. En esta situación, el estudiante reconoce que los problemas propuestos por el docente tienen el propósito de ayudarlo a adquirir nuevos conocimientos, los cuales pueden ser elaborados sin necesidad de razones didácticas explícitas [8].

Se amplía este concepto al afirmar que la situación adidáctica constituye una forma específica de situación didáctica, donde la intención de enseñar no es revelada al estudiante. El problema matemático seleccionado permite al estudiante reflexionar, actuar y evolucionar por sí mismo, mientras que el profesor actúa como mediador, creando las circunstancias que permiten que el estudiante sea el protagonista en la construcción de su propio conocimiento. Con el fin de analizar el proceso de aprendizaje, la teoría de las situaciones divide dicho proceso en cuatro etapas distintas, en las cuales el conocimiento desempeña funciones diversas y el estudiante establece relaciones variables con dicho conocimiento. Estas etapas están intrínsecamente relacionadas, mostrando momentos predominantes de acción, formulación, validación e institucionalización [7].

Dialéctica de Acción

El sujeto se involucra en un proceso de elección directa de acciones en relación con el entorno, basado en sus propias motivaciones. Este proceso implica una interacción con el medio, donde el sujeto puede observar las reacciones de este y utilizar esa retroalimentación para anticipar futuras acciones [8]. Por otro lado, se describe esta etapa como aquella en la que se plantea un problema al estudiante, permitiéndole estimar el resultado de sus acciones y ajustarlas si es necesario, sin la intervención directa del docente. La retroalimentación proporcionada por el entorno permite al estudiante reformular su enfoque y adaptarse para poder resolver el problema, lo que conduce a un aprendizaje mediante la adaptación [7].

Dialéctica de Formulación

La formulación del conocimiento implica la capacidad del sujeto para apropiarse de éste, lo cual implica reconocerlo, identificarlo, descomponerlo y reconstruirlo utilizando un sistema lingüístico. En este proceso, el medio en el que el sujeto se encuentra requiere que él interactúe (ficticia o realmente) con otro sujeto, al cual deberá transmitir información [8]. Por otra parte, en un contexto de formulación, el estudiante comparte información y/o estrategias de resolución con uno o varios compañeros, utilizando su lenguaje sin necesidad de justificarlo. Este momento implica que expresen de manera oral o escrita las herramientas utilizadas y la solución hallada. El propósito es facilitar el intercambio de información [7].

Dialéctica de Validación

En esta dialéctica el estudiante no se limita simplemente a transmitir información, sino que también implica la afirmación de la veracidad de lo que comunica dentro de un sistema específico, respaldando sus opiniones o presentando demostraciones [8]. En este sentido, durante esta fase, el estudiante emite declaraciones referentes a su actividad y ofrece argumentaciones o validaciones desde su perspectiva. En esta etapa, se otorga al estudiante la oportunidad de argumentar, persuadir y demostrar; contribuyendo así a la construcción colectiva de la verdad. El interés primordial es validar las afirmaciones previamente planteadas durante las etapas de acción y formulación [7].

Dialéctica de Institucionalización

Los docentes tienen la responsabilidad de realizar una reflexión sobre las acciones realizadas por los alumnos, describiendo los sucesos ocurridos y su relación con el conocimiento en cuestión. Además, deben evaluar los resultados de la enseñanza y el aprendizaje, identificar y definir claramente el objeto de enseñanza, y conectar las producciones de conocimiento con otras creaciones culturales o del programa educativo, destacando aquellas que pueden ser reutilizadas en el futuro [8].

Igualmente, las situaciones de institucionalización se caracterizan por la intervención explícita y convencional del profesor en la consolidación del estado cognitivo del conocimiento. Una vez que se han construido y validado los nuevos conocimientos, estos pasan a formar parte del acervo matemático de la clase, aunque aún no alcancen el estatus de conocimientos socialmente aceptados. Una vez que el docente oficializa el conocimiento mediante la institucionalización, este adquiere legitimidad y pasa a ser integrados a los esquemas mentales de los estudiantes, para posteriormente ser empleados en la resolución de problemas [7].

En esta fase, se hace evidente la intencionalidad didáctica, ya que se socializa el conocimiento que los estudiantes deben adquirir, esto se asemeja a la enseñanza tradicional. Los estudiantes, por sí solos, no reconocen necesariamente que han adquirido un nuevo conocimiento; es el docente quien debe organizar y sistematizar la información, basándose en lo producido por los propios estudiantes.

Situación Problema

Es una parte integral de la situación didáctica, compuesta por un conjunto de interrogantes abiertas o cerradas, planteadas en un entorno cercanamente matemático. Tiene como propósito principal el empleo inicialmente implícito y luego explícito de nuevos conceptos matemáticos. Asimismo, se espera que el estudiante reconozca que sus conocimientos previos resultan insuficientes para resolver el problema de manera inmediata [9].

Variable didáctica

Un cambio sustancial en los valores adoptados por ciertas variables se conoce como salto de información, y puede resultar en una modificación cualitativa en las estrategias pertinentes para resolver el problema. Identificar estas variables y determinar el "grado" del salto necesario para mejorar el proceso de aprendizaje son aspectos cruciales en la elaboración de situaciones de enseñanza [8].

Inicialmente, la selección de la(s) variable(s) y sus respectivos valores puede ayudar a definir el problema y presentar una estrategia básica. Sin embargo, para el desarrollo de la situación adidáctica prevista, se requerirá considerar nuevas opciones, tanto en términos de los valores de las variables ya en juego como de otras variables adicionales.

En esa misma línea, una variable cognitiva como un parámetro de una situación que, al ser modificada, altera el conocimiento requerido para resolver un problema o el proceso de aprendizaje. Una variable didáctica es una variable cognitiva que puede ser manipulada por el profesor, y cuya alteración puede tener un impacto significativo en el comportamiento de los alumnos en relación con el aprendizaje, así como en la inducción de diferentes procedimientos o tipos de respuestas [7].

B. Registros de Representación Semiótica

No todos los sistemas semióticos pueden clasificarse como registros, sino únicamente aquellos que posibilitan la transformación de representaciones. Un sistema semiótico debe cumplir con tres actividades cognitivas fundamentales: formación, tratamiento y conversión de representaciones semióticas, para ser considerado como un registro de representación semiótica [10].

Formación

Cuando se forma una representación semiótica en un registro específico, siempre implica una selección de los caracteres y determinaciones que componen lo que se desea representar. Esto implica seguir reglas de cumplimiento y selección de ciertas características y propiedades del objeto a representar. Estas reglas están establecidas por la comunidad científica, especialmente en el ámbito de las Matemáticas, de modo que al aplicarlas podamos identificar estas representaciones [10].

Tratamiento

Se define como la acción de transformar una representación inicial en otra representación final dentro del mismo registro. Por lo tanto, el tratamiento implica una transformación que se realiza exclusivamente dentro del mismo sistema de representación, utilizando únicamente las capacidades y características propias del sistema en cuestión [10].

Conversión

La conversión implica transformar la representación de un objeto específico de un registro a otra representación del mismo objeto en otro registro. En otras palabras, consiste en operaciones que establecen una correspondencia entre una representación dada en un registro con otra representación en un registro diferente. Es importante destacar que la conversión se trata de una transformación externa en relación con el registro de la representación inicial [10].

A continuación, mostramos los registros que utilizaremos en nuestra investigación relacionado con la representación de la parábola, como se observa en la Fig. 2.

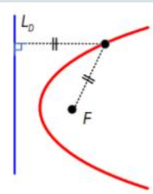
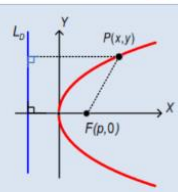
Tipos de Registro	
Registro en lengua Natural	La parábola es el lugar geométrico de un punto que se mueve en el plano tal que equidista de una recta fija L_D , llamada directriz y de un punto F , que no pertenece a la directriz, llamado foco.
Registro Figural	
Registro Gráfico	
Registro Algebraico	$y^2 = 4px$

Fig.2 Tipos de registros de representación semiótica [1].

El inicio de la comprensión matemática coincide con el inicio de la coordinación de registros. Reconocer objetos matemáticos representados en dos registros diferentes no ocurre de forma aleatoria, sino es el resultado de una coordinación integral de registros. Los procesos de pensamiento matemático se apoyan en una coordinación cognitiva entre registros de representación. La coordinación de estos amplía la capacidad mental de manera significativa (ver Fig. 3).

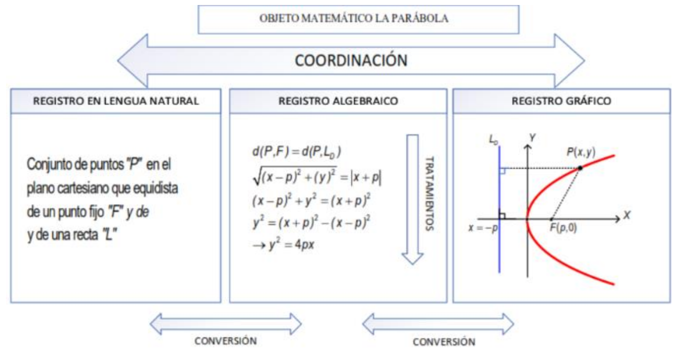


Fig.3 Coordinación de registros de representación semiótica [1].

III. INGENIERÍA DIDÁCTICA

Este trabajo se abordó a través de un enfoque cualitativo y la parte experimental de la actividad se realizó de manera presencial con estudiantes universitarios de ingeniería cuyas edades oscilan entre los 17 y 19 años, para el desarrollo de este se trabajó en un ambiente de lápiz y papel.

A. *Análisis Preliminar*

Se destaca la importancia de este análisis preliminar para identificar problemas de enseñanza y aprendizaje, así como para establecer preguntas, hipótesis y fundamentos teóricos y metodológicos de la investigación, lo cual incluye la revisión de la génesis histórica del conocimiento, las propuestas curriculares y los materiales didácticos disponibles [11].

B. *Concepción y Análisis a priori*

El investigador selecciona variables de comando no restringidas por limitaciones externas, consideradas pertinentes para el problema en estudio. Estas variables determinan la complejidad de las actividades presentadas a los estudiantes y pueden ajustarse según sea necesario. De igual manera, el investigador identifica variables de comando pertinentes. Estas variables son fundamentales para controlar y dirigir el proceso de enseñanza y aprendizaje, y su selección se basa en hipótesis que deben ser validadas posteriormente. En esta investigación, las variables abarcan detalles como el tipo de papel utilizado y la disposición del sistema coordenado [11].

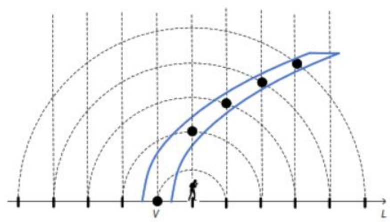
C. *Análisis a posteriori y validación*

Se emplea un conjunto de datos obtenidos durante la experimentación, que incluye observaciones de las secuencias de enseñanza y las producciones de los estudiantes, tanto dentro como fuera del aula. Estos datos se complementan frecuentemente con información obtenida mediante metodologías externas, como cuestionarios y entrevistas individuales o grupales, aplicadas en diferentes momentos del proceso educatio. La validación de las hipótesis formuladas en la investigación se fundamenta esencialmente en la confrontación entre el análisis realizado previamente y el análisis posterior de los datos recogidos durante la experimentación [11].

En este artículo nos enfocaremos en presentar la concepción de la situación problema con su respectivo análisis *a priori* y a *posteriori* dado que, esta fase se basa en el análisis preliminar realizado en extenso en un trabajo de tesis de maestría [1]. Presentaremos una situación problema y los resultados de un grupo de estudiantes de los tres que fueron parte de la experimentación.

Situación Problema (SP)

La municipalidad de Arequipa contrata a un Arquitecto para diseñar un escenario de eventos artísticos el cual tenga una estructura metálica que forme un arco y cumpla múltiples propósitos, entre ellos proteger al artista del clima, sirva de soporte para la escenificación de los espectáculos y principalmente para que los asistentes a los conciertos escuchen el sonido con la misma intensidad. Para diseñar el techo del escenario el arquitecto utiliza circunferencias concéntricas y rectas verticales cuyas marcas de referencia en la recta L son cada 3 m tal como se observa en el plano de diseño.



Considerando el plano de diseño.

1) ¿Los nodos (Puntos de intersección) en el plano siguen o satisfacen algún patrón geométrico? Justifique tu respuesta.

2) ¿De la figura, si asumimos al punto V como referencia entonces los nodos en el plano de diseño satisfacen alguna ecuación conocida? Justifique su respuesta.

Fig.4 Situación Problema [1].

La situación adidáctica es propuesta de forma contextualizada en el registro figural, donde se tiene una serie de puntos en una estructura metálica que siguen un determinado patrón. Estos puntos están formados por circunferencias concéntricas y rectas verticales. La situación problema busca construir y descubrir la parábola como lugar geométrico desde su definición geométrica y determinar una representación semiótica [1].

Las variables didácticas se muestran en la Fig. 5.

Variables didácticas	Valores
Regla de correspondencia de la parábola	• $y^2 = 4px$ • $(y-k)^2 = 4p(x-h)$
Ubicación del sistema de referencia	• Ubicación en V • Ubicación en F
Radios de las circunferencias concéntricas	• $r < 3,$ • $r = 3$
	• $r > 3$
Tipo de papel	• Cuadriculado • Blanco

Fig. 5 Variables didácticas de la situación problema [1].

Análisis a priori de SP

Se espera que los estudiantes examinen la situación problema, resalten los elementos clave, es decir, descompongan el contenido en unidades más pequeñas, comprendan la secuencia lógica de las ideas presentes en cada párrafo (situación de acción) y logren hacer las conversiones pertinentes de las representaciones de los objetos matemáticos y tratamientos en los diferentes registros semióticos [1].

En el ítem (1), se supone que el grupo como parte de sus acciones, esboce, en el registro figural, algunas posibles representaciones de curvas que pasen por los nodos, como, por ejemplo, una representación gráfica de la función representada algebraicamente por $y = A\log(Bx)$ o una circunferencia, elipse, hipérbola o la representación gráfica de una ecuación de segundo grado representada algebraicamente por $Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$. Los estudiantes formularían que los puntos pertenecen a una representación gráfica de la relación $y^2 = 4px$, las que validarían mediante dos formas:

Primero: En el registro figural, representarían una recta vertical ubicada a la izquierda y a 3m del punto V, esta recta sería llamada recta LD, además en la posición del artista ellos asumirían un punto cuya representación es F luego, movilizarían sus conocimientos previos de distancia entre dos puntos y formularían que la curva es una parábola lo cual validarían cuando verifican que cada nodo en el techo de la estructura cumple con la definición geométrica de la misma, es decir, la distancia de un punto de la curva al punto F es igual a la distancia del mismo punto a la recta LD, cuya representación simbólica es $d(P,F) = d(P,LD)$ con ello los estudiantes justificarían que los nodos pertenecen a una parábola [1].

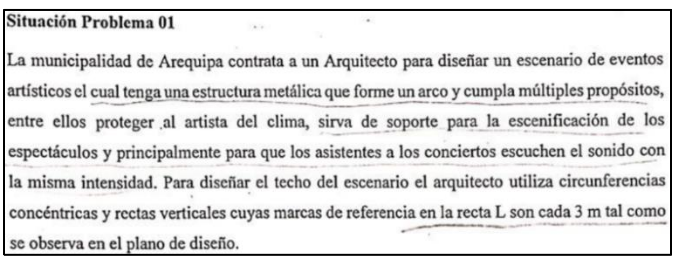
Segundo: En el registro gráfico, los estudiantes considerarían al punto V como el origen de coordenadas y a su vez representarían en los ejes coordenados representados por X e Y, luego representarían cada nodo por $V(0,0), A(3,6)$ y $B(6,\sqrt{72})$, asimismo, dado que los estudiantes movilizarían sus conocimientos previos sobre la forma funcional de la parábola, ellos formularían de manera escrita la representación algebraica de la parábola de la forma $ay^2+by+c=$

$x; a, b, c \in \mathbb{R}$ lo que validarían cuando ellos obtengan los valores de los coeficientes representados por a, b y c reemplazando las coordenadas de cada par ordenado y realizando tratamiento en el registro algebraico. Concluirían que la representación algebraica de la parábola sería $\frac{1}{12}y^2 = x$.

En el ítem (2), se espera basados en las validaciones realizadas en el ítem (1) asumirían al punto V como el origen de coordenadas y con ellos trazarían alrededor de este punto los respectivos ejes coordenados, con lo cual los estudiantes determinarían en el registro gráfico y representarían las coordenadas de los puntos, consiguiendo que $V(0,0), A(3,6) y\, B(6, \sqrt{72})$; los estudiantes movilizarían sus conocimientos previos sobre la parábola y formularían una representación algebraica de la misma representada por $y^2 = 4px$, lo validarían utilizando las coordenadas de los puntos y en particular las coordenadas del punto representado por $A(3,6)$ al reemplazar en el registro gráfico y por medio tratamientos deducir el parámetro $p = 3$ y concluirían que la representación algebraica de la parábola es $y^2 = 12x$ [1].

Análisis a posteriori de SP

Ítem (1). Los estudiantes como parte de sus acciones leyeron y subrayaron los elementos importantes e intercambiaron ideas, tal como se anticipó en el análisis a *priori* (ver Fig. 6).


Situación Problema 01

La municipalidad de Arequipa contrata a un Arquitecto para diseñar un escenario de eventos artísticos el cual tenga una estructura metálica que forme un arco y cumpla múltiples propósitos, entre ellos proteger al artista del clima, sirva de soporte para la escenificación de los espectáculos y principalmente para que los asistentes a los conciertos escuchen el sonido con la misma intensidad. Para diseñar el techo del escenario el arquitecto utiliza circunferencias concéntricas y rectas verticales cuyas marcas de referencia en la recta L son cada 3 m tal como se observa en el plano de diseño.

Fig. 6. Subrayado de las ideas fuerza de SP [1].

Los estudiantes formularon que la curva es una parábola, basándose en sus conocimientos previos y en la percepción que los nodos siguen un patrón similar a una parábola, para respaldar esta hipótesis en el registro figural, asumieron una recta directriz vertical a la izquierda a una distancia de 3 unidades del punto V. Además, en la posición de la arista consideraron un punto F verificando la definición geométrica de la parábola, en este contexto validaron que los nodos de la curva cumplen $d(P, F) = d(P, L_D)$ tal como se había previsto en el análisis a *priori* [1].

Los estudiantes realizaron conversiones al representar los nodos que se encuentran en el registro figural a pares ordenado en el registro gráfico, asimismo, las distancias de los nodos hacia el foco y la recta directriz son representados mediante los números 6, 9, 12, 15; luego mediante sus formulaciones y tratamientos en el registro algebraico realizaron las representaciones de las circunferencias concéntricas, esto, con la intención de obtener las coordenadas de todos los nodos. Estos tratamientos respecto a las circunferencias no fueron considerados en el análisis a *priori* puesto que, para determinar las coordenadas de los nodos, solo fue realizado mediante el Teorema de Pitágoras [1].

Además, los estudiantes plantearon como parte de sus formulaciones si la parábola es la única curva que pasa por los nodos, es decir, la unicidad de la curva. Esto no fue considerado en el análisis a priori, aunque la comprobación de la unicidad es sencilla, escapaba a la consulta inicial de la situación problema, conforme se muestra en la Fig. 7 [1].

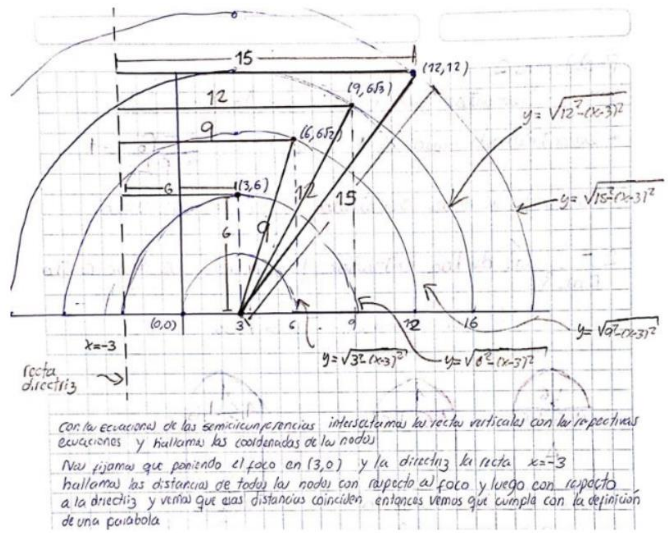


Fig. 7 Descripción del patrón geométrico de los nodos [1].

Como parte de las formulaciones y validaciones realizadas por los dos estudiantes del grupo (estudiante 01 (E1), estudiante 02 (E2)), se presenta la transcripción del audio:

E1: Yo así observando nada más, pienso que es una parábola.

E2: Pero pueden ser muchas curvas, no solamente una parábola, también un brazo de hipérbola o una catenaria.

E1: Como se trata de circunferencias intersecadas por rectas lo más probable es que sea una parábola.

E2: Entonces ¡¡hay que demostrarlo!!

E1. ¿Y sabes cómo se demuestra? – Que la distancia del foco a cada punto de la parábola es igual a distancia del punto a la recta Directriz.

Se observa que los estudiantes aplicaron sus conocimientos previos al formular mediante el intercambio de ideas entre ellos, que la curva es probablemente una parábola, inmediatamente buscan justificar sus afirmaciones al emplear la definición geométrica de la parábola.

Ítem (2). Consideraron alrededor del punto V los ejes coordenados y en la representación gráfica de la parábola determinaron las coordenadas de los nodos, consiguiendo las coordenadas $V(0,0), A(3,6)$ a su vez los estudiantes formularon que una representación algebraica de la parábola es $y^2 = 4px$, lo que validaron utilizando las coordenadas de los nodos, concluyendo que el registro algebraico de la parábola es $y^2 = 12x$ tal como se observa en la Fig. 8. Lo que fue previsto en el análisis a *priori* [1].

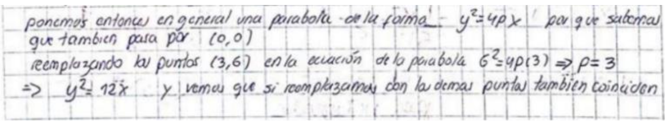

ponemos entonces en general una parabola de la forma $y^2=4px$ porque sabemos que tambien pasa por $(0,0)$
reemplazando los puntos $(3,6)$ en la ecuación de la parabola $6^2=4p(3) \Rightarrow p=3$
$\Rightarrow y^2=12x$ y vemos que si reemplazamos con los demas puntos tambien coinciden

Fig. 8 Deducción de la ecuación de la parábola [1].

Como parte de la formulaciones y validaciones realizadas por los dos estudiantes se presenta la transcripción del audio:

E1: Si demuestras que la distancia de este punto al vértice es “p” y la longitud del punto al extremo del lado recto es “2p” entonces ¡¡este punto sería el Foco!! (Aquí el estudiante señala que el Foco es la posición del artista).

E2: ¿Por qué? En la parábola la distancia del vértice al foco es la misma distancia del vértice a la recta directriz, en todo caso debemos obtener la recta directriz.

E1: ¡¡Si está bien, pero también se cumple lo que digo!!

E2: Teóricamente los puntos cumplen con que es una parábola, pero ahora tenemos un problema, ¿Cuál es la ecuación de la parábola?

E1: ¿La ecuación? ¡¡Ya ahora la hago!!

E2: Después hay que comparar con los demás puntos y si se cumple con la ecuación entonces ya salió.

E1: ¡¡Ya me salió la ecuación!!

E2: ¿Cuál es?

E1: Es $y^2 = 12x$

Se observa que los estudiantes con relación al ítem (2) formularon que la representación algebraica de la parábola es $y^2 = 12x$, a su vez para validarla, ellos discuten respecto a si utilizar un punto del lado recto de la parábola o la equidistancia del vértice al foco y la recta directriz; coinciden en la necesidad de emplear la representación algebraica para poder comprobar que los puntos restantes satisfacen la ecuación [1].

Institucionalización local de SP

La parábola que está relacionada a esta SP es representada por $y^2 = 4px$, donde el parámetro $p > 0$. Siendo los elementos que caracterizan a la parábola, el vértice, el foco y la recta directriz, cuyas representaciones analíticas son $V = (0,0), F = (p, 0) y\ L_D: x = -p$ cumpliéndose también la definición como lugar geométrico $d(P, F) = d(P, L_D)$. Es decir, la distancia de un punto de la parábola al foco es la misma distancia del punto a la recta directriz. (ver Fig. 9a). Asimismo, en general la parábola con vértice en el punto $V = (h, k)$ y parámetro $p > 0$ tiene por representación algebraica $(y - k)^2 = 4p(x - h)$ y su representación gráfica (ver Fig. 9b) [1].

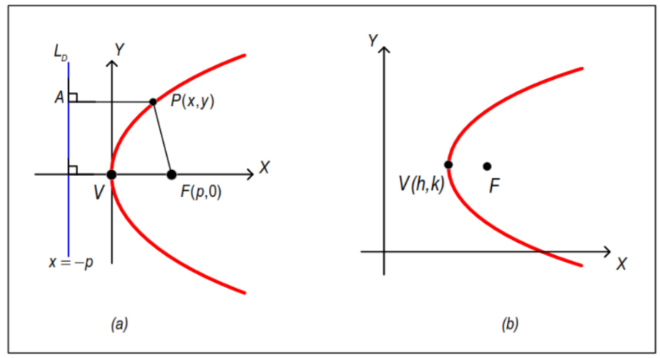


Fig. 9 Representación gráfica de la parábola con vértice en el origen y en un punto cualquiera del plano cartesiano [1].

IV. CONCLUSIONES Y REFLEXIONES

Se analizó las interacciones de los estudiantes del primer año de ingeniería frente a una situación problema lo que permitió, que empleen diversas representaciones semióticas al momento de construir la noción de la parábola como lugar geométrico.

Los estudiantes como parte de sus acciones, formulaciones y validaciones realizaron la conversión del registro de representación semiótica de la parábola en los registros algebraico, figural y gráfico, donde se pudo identificar que los procesos se centraron en el registro algebraico, aunque se evidencian dificultades en el uso del registro de lengua natural, particularmente en la comprensión de textos.

Se observó que al desarrollar la situación problema propuesta los estudiantes generaron la rotura del contrato didáctico, donde el profesor proporciona la teoría seguida de numerosos ejercicios centrados en operaciones algebraicas, lo que convierte al estudiante en un receptor pasivo y dependiente de la instrucción.

Se sugiere para futuros trabajos crear situaciones problemas donde los estudiantes busquen sus propias soluciones al interactuar con el problema y movilicen diferentes registros de representación semiótica.

Se sugiere que se propongan situaciones problemáticas en las que los estudiantes asuman un papel activo y la responsabilidad de construir su propio conocimiento, rompiendo así la enseñanza tradicional donde el estudiante es solo un actor pasivo.

Consideramos importante el uso de un software matemático porque esto daría diversas posibilidades a la exploración de nuevas construcciones en la representación gráfica de las cónicas lo que permitiría reconocer rápidamente los elementos geométricos que las caracterizan.

REFERENCIAS

[1] W. Medina, "Una Secuencia Didáctica para la Construcción de la Parábola como Lugar Geométrico con Estudiantes de Ingeniería," Tesis de maestría no publicada, Pontificia Universidad Católica del Perú, 2019.

[2] I. Mercedes, L. Torres, "La parábola como lugar geométrico: una formación continua de profesores de matemáticas basada en la Teoría de Registros de Representación Semiótica Tesis para optar el grado de Magíster en Enseñanza de las Matemáticas", 2016.

[3] N. V. Soares da Silva, "Cónica e suas diferentes representações", Universidade Federal do Amapá, 2013.

[4] S. Pereira Lopes, "Uma Sequência Didática para o Ensino de Parábola enquanto Lugar Geométrico", Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2014.

[5] R. N. Benito, "Construção de um percurso de estudo e pesquisa para a formação de professores: o ensino de cônicas", 2019.

[6] E. Advíncula, M. Beteta, J.C. León, I. Torres, M. Montes, "El Conocimiento Matemático del Profesor Acerca de la Parábola: Diseño de un Instrumento para Investigación", Uniciencia, 2021.

[7] S. Almouloud, "Fundamentos da Didáctica da Matemática," Curitiba, Brasil: Editorial UFPR, 2007.

[8] G. Brousseau, "Iniciación al estudio de las teorías de las situaciones didácticas," Buenos Aires: Libros del Zorzal, 2007.

[9] S. Almouloud, "Modelo de ensino/aprendizagem baseado em situações-problema: aspectos teóricos e metodológicos", REVEMAT: Revista Eletrônica de Educação Matemática, 11(2), 109-141, 2017

[10] R. Duval, "Semiosis y pensamiento humano," Cali, Colombia: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática, 2004. [Obra original publicada en 1995]

[11] M. Artigue, R. Douady, y L. Moreno, "Ingeniería didáctica en educación matemática" México, D.F., México: Grupo Editorial Iberoamérica, S.A. de C.V., 1995.