

Naturalness and Interpretability of Graphical Representations of Fuzzy Numbers

Luis Ramos-Pozo, Computer Science Student¹, Juan Pisco-Jordán, Computer Science Student², and Danaé Townsend-Hinojosa, Computer Science Student³

^{1,2,3}Escuela Superior Politécnica del Litoral, ESPOL, Ecuador, lurapozo@espol.edu.ec, jpisco@espol.edu.ec, danjtown@espol.edu.ec

Abstract— In this research, an experimental evaluation of the naturalness and interpretability using fuzzy numbers in an everyday university context was carried out. Four graphical representations of fuzzy numbers (triangular, trapezoidal, Gaussian and L-R) were evaluated in linguistic expressions such as "around _" and "greater than _" to determine the most natural ones in that context. In addition, two forms were designed with simple arithmetic operations and imprecise linguistic expressions. In this way we were able to evaluate whether the results obtained through mathematical operations with fuzzy numbers proposed by different authors resemble the mental calculations that university students would perform. A sample of 44 students was used, the results reflected that the expressions "around _" and "close to _" are better represented with the Gaussian form; trapezoidal representations are associated with expressions such as "between _ and _" and "not less than _" and better represent results of addition and subtraction operations, while the L-R representation is more natural when obtaining results in multiplications.

Keywords— fuzzy numbers, graphical representations, naturalness, interpretability, L-R.

Digital Object Identifier: (only for full papers, inserted by LACCEI).
ISSN, ISBN: (to be inserted by LACCEI).
DO NOT REMOVE

Naturalidad e Interpretabilidad de Representaciones Gráficas de Números Difusos

Luis Ramos-Pozo, Estudiante de Ciencias Computacionales¹, Juan Pisco-Jordán, Estudiante de Ciencias Computacionales², and Danaé Townsend-Hinostroza, Estudiante de Ciencias Computacionales³
^{1,2,3}Escuela Superior Politécnica del Litoral, ESPOL, Ecuador, lurapozo@espol.edu.ec, jpisco@espol.edu.ec, danjtown@espol.edu.ec

Resumen— En esta investigación se realizó una evaluación experimental sobre la naturalidad e interpretabilidad utilizando números difusos en un contexto cotidiano universitario. Se evaluaron cuatro representaciones gráficas de números difusos (triangular, trapezoidal, gaussiana y L-R) en expresiones lingüísticas como “alrededor de _” y “mayor que _” para determinar las más naturales en dicho contexto. Además, se diseñaron dos formularios con operaciones aritméticas sencillas y expresiones lingüísticas imprecisas. Así logramos evaluar si los resultados obtenidos a través de operaciones matemáticas con números difusos propuestos por diferentes autores se asemejan a los cálculos mentales que realizan estudiantes universitarios. Se utilizó una muestra de 44 estudiantes, los resultados reflejaron que las expresiones “alrededor de _” y “cercano a _” son mejor representadas con la forma gaussiana; las representaciones trapezoidales se asocian con expresiones como “entre _ y _” y “no menor a _” y capturan mejor resultados de operaciones de suma y resta; mientras que la representación L-R destaca al obtener resultados en multiplicaciones.

Palabras clave— números difusos, representaciones gráficas, naturalidad, interpretabilidad, L-R.

I. INTRODUCCIÓN

De forma habitual utilizamos expresiones como “alrededor de _”, “cercano a _”, “no menor a _” o “menor que _”. Para las personas esto resulta natural ya que es parte de la comunicación diaria, mientras que dispositivos como las calculadoras, necesitan expresiones exactas para realizar sus operaciones. Para sobrepasar esta limitación se utilizan números difusos, donde cada número tiene un grado de pertenencia, dicho grado es un valor que puede estar entre 1 y 0 y que puede ser usado para determinar que números pertenecen más al conjunto de números difusos que otros [1]. En el siguiente ejemplo se utilizará el grado de pertenencia para definir qué valor es más probable de cumplir con el enunciado. La frase “la reunión es alrededor de las 5” se puede representar como el número difuso $A = (4,5,6)$ con los grados de pertenencia $\mu(4) = \mu(6) = 0$ y $\mu(5) = 1$, donde el punto con mayor pertenencia es el número 5, lo que se interpreta como la hora más probable en la que el suceso ocurrirá, aunque la reunión podría darse en cualquier momento entre las 4 y las 6. Cabe resaltar que los números difusos son sensibles al contexto [2], lo que quiere decir que si la anterior frase se dice en un grupo de amigos o si se dice en un grupo de trabajo va a existir una diferencia, pues, en el segundo caso, generalmente

se espera mayor puntualidad.

Con el fin de facilitar la comprensión y manejo de los números difusos varios autores han propuesto diversas representaciones gráficas para visualizarlos y diferentes formas para resolver operaciones aritméticas que los incluyen [3–9]. Determinar la interpretación gráfica depende mucho del contexto en el que se encuentre [10]. Por ello, gran parte de la literatura sobre la interpretabilidad se enfoca en contextos específicos [10]. Si se desea abarcar el contexto más general, como, por ejemplo, en un entorno universitario, se deben simplificar las representaciones gráficas, adaptarlas para que quienes conforman dicho contexto puedan entenderlas [11]. Es justamente en el entorno universitario, así como en otros contextos cotidianos, donde más se utilizan expresiones poco precisas, y a su vez, donde más se perdona la inexactitud en las respuestas. Por lo anterior surgen un par de preguntas:

- Q_1 : ¿Cuáles son las representaciones gráficas que mejor ilustran a cada una de las expresiones lingüísticas como “alrededor de _”, “entre _ y _”, utilizados para realizar operaciones matemáticas básicas con números difusos?
- Q_2 : ¿En qué medida se asemejan los resultados obtenidos a partir de las operaciones matemáticas con métodos propuestos en la literatura para operar números difusos a los resultados esperados en un contexto más cotidiano como el universitario?

Responder estas preguntas nos permitirán evaluar la naturalidad e interpretabilidad de distintas representaciones gráficas para mostrar el resultado de operaciones efectuadas con números difusos en un contexto cotidiano. Este artículo tiene como propósito realizar dicha evaluación de forma experimental a partir de las representaciones y operaciones matemáticas propuestas por diversos autores en la literatura. Como parte del experimento se creó una calculadora que nos permita obtener los resultados de las operaciones, se utilizaron formularios para capturar los datos que forman parte de este estudio y se proponen indicadores de naturalidad e interpretabilidad como mecanismos de evaluación.

Con el propósito de responder a las preguntas anteriores, en primer lugar, en la Sección 2 se presenta un marco teórico sobre las distintas representaciones de números difusos. En la Sección 3 se presenta la metodología, lo que se va a seguir para recabar información para responder Q_1 y Q_2 . En la Sección 4 se presentan los resultados de la experimentación, se los analiza, y en la Sección 5 se los discute. En la Sección

Digital Object Identifier: (only for full papers, inserted by LACCEI).
ISSN, ISBN: (to be inserted by LACCEI).
DO NOT REMOVE

6, finalmente se concluye hasta qué punto se contestaron las preguntas Q_1 y Q_2 . Las recomendaciones para futuros trabajos se encuentran en la Sección 7. La investigación finaliza con la Sección 8, los reconocimientos.

II. MARCO TEÓRICO

Los números difusos son una extensión de los números reales donde, en vez de poseer un valor definido, tienen una función de pertenencia [12]. La función de pertenencia $\mu(x)$ tal que $\mu(x) \in [0, 1]$ donde $\mu(x) = 0$ representa el valor de menor pertenencia, mientras que $\mu(x) = 1$ muestra el valor de mayor pertenencia. Otra forma de representar los números difusos es definiendo la función de pertenencia en un intervalo $A = [L(x), R(x)]$, donde

$$\mu(x) = \begin{cases} L(x), & \text{si } x \leq 1 \\ R(x), & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad (1)$$

$L(x)$ es la fórmula del lado izquierdo, donde se muestra la probabilidad antes de la expresión, y $R(x)$ después de la expresión. Por ejemplo, si se utiliza “alrededor de las 8”, $L(x)$ sería la pertenencia antes de las 8 y $R(x)$ después de las 8, siendo la pertenencia de que sea 8 igual a 1, la mayor probabilidad.

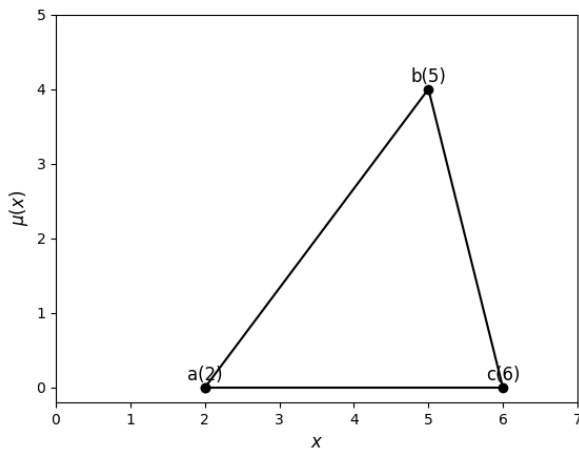


Fig. 1 Representación triangular de un número difuso $A = (2,5,6)$

A. Representación Triangular

Una de las formas que puede tomar la función de pertenencia de un número difuso es la triangular. Esta es representada numéricamente como $A = (a, b, c)$ tal que $\mu(a) = \mu(c) = 0$ y $\mu(b) = 1$. En la Fig. 1 se muestra un ejemplo de un número difuso triangular $A = (2, 5, 6)$ que podría representar a la frase “nos reuniremos alrededor de las 5”.

Existen situaciones especiales donde existe un mínimo, pero no un máximo, o viceversa. Por ejemplo, “El tiempo que me demoro estudiando es mayor a 30 minutos”, lo que implica cualquier cantidad de tiempo mayor a 30 minutos, como 60, 90 o más minutos. En estos casos, se establece únicamente el

límite mínimo o máximo, junto con su extremo, mientras que el extremo opuesto se representa como infinito. La representación triangular para representar “mayor a 30 minutos” sería $B = (20, 30, \infty)$.

B. Representación Trapezoidal

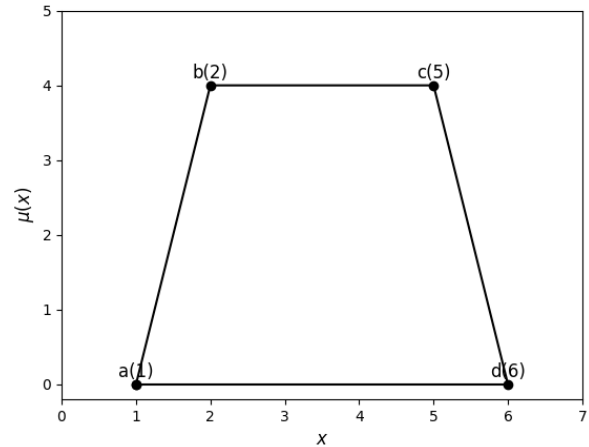


Fig. 2 Representación trapezoidal de un número difuso $A = (1,2,5,6)$

Los números difusos trapezoidales son representados como $A = (a, b, c, d)$, donde $\mu(a) = \mu(d) = 0$ y $\mu(b) = \mu(c) = 1$. En la Fig. 2 se muestra un ejemplo de un número difuso trapezoidal $A = (1, 2, 5, 6)$ que podría representar a la frase “nos reuniremos entre las 2 y las 5”.

La forma trapezoidal también puede representar situaciones especiales donde existe un mínimo, pero no un máximo, o viceversa. La representación trapezoidal para representar “mayor a 30 minutos” sería $B = (20, 30, \infty, \infty)$.

C. Representación Gaussiana

Los números difusos también pueden tomar la forma de una campana de Gauss. Un número difuso gaussiano simétrico tiene como representación $A = (m, \sigma)$ donde m es la media y σ es el valor de la desviación estándar. Se puede usar la representación de intervalos mostrados en la ecuación (2) para realizar operaciones aritméticas con números difusos gaussianos.

$$A = \left[m - \sigma \sqrt{-2 \ln(\mu(x))}, m + \sigma \sqrt{-2 \ln(\mu(x))} \right] \quad [13] \quad (2)$$

La forma gaussiana no puede representar situaciones especiales donde existe un mínimo, pero no un máximo, o viceversa, porque no se puede sacar la media a una cantidad infinita de valores.

D. Representación L-R

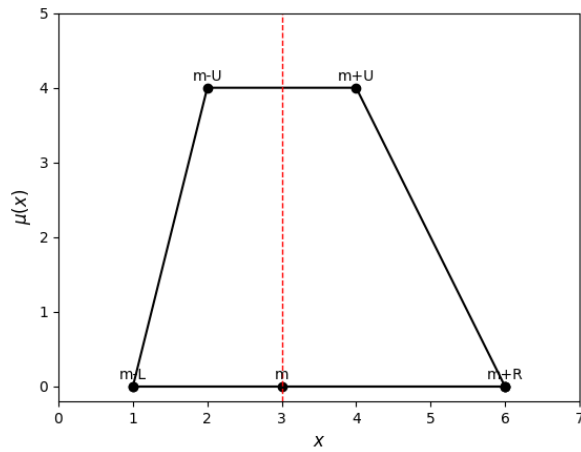


Fig. 3 Representación L-R de $A = (m, U, L, R)$

La representación L-R de los números difusos se deriva originalmente de las representaciones trapezoidales como se muestra en la Fig. 3. Dado un número difuso trapezoidal (a,b,c,d) , se permite una representación cuádruple (m, U, L, R) tal que m es el valor central del número difuso trapezoidal calculado con $m = (b + c) / 2$. U representa el desplazamiento en la parte superior del número difuso con relación al valor central de manera que $U = m - c$. Mientras que $L = m - a$ y $R = d - m$ son los desplazamientos inferiores por la izquierda y por la derecha respectivamente [8].

La forma L-R no puede representar situaciones especiales donde existe un mínimo, pero no un máximo, o viceversa. Esto se debe a que esta representación necesita un punto medio, y no se puede definir un punto medio cuando uno de los valores es infinito.

E. Cálculos aritméticos entre números difusos

Una vez se decide por una representación gráfica de números difusos se puede operar con estos. Cada representación tiene sus propios acercamientos aritméticos.

Cálculos entre números difusos triangulares: Varios autores han propuesto diferentes formas de realizar cálculos aritméticos entre números difusos triangulares [3]. Entre los más conocidos se encuentra la aproximación estándar. Consideremos la operación binaria $*$ (suma, resta o multiplicación) y dos números difusos:

$$A = (a_1, b_1, c_1), B = (a_2, b_2, c_2). \text{ Entonces la operación } A * B = (a_1 * a_2, b_1 * b_2, c_1 * c_2) \quad (3).$$

Usando el ejemplo $A = (2,5,6)$ y $B = (1,3,5)$, entonces $A + B = (3,8,11)$ (4).

Las operaciones aritméticas también pueden ser realizadas con intervalos donde los valores son más exactos pero las operaciones pueden llegar a ser más complejas computacionalmente. En [3] los autores propusieron guardar los valores de desplazamiento hacia la izquierda y hacia la derecha, similares a la representación L-R, para realizar la multiplicación entre intervalos triangulares de una forma más

sencilla. En este caso, un número difuso A es representado como $A = (a, b, c, \lambda, \rho)$, donde el desplazamiento a la izquierda $\lambda = b/a$ y el desplazamiento a la derecha $\rho = b/c$.

Cálculos entre números difusos trapezoidales: Hay cuatro formas de resolver operaciones aritméticas con números difusos trapezoidales. La primera se la encuentra en [4], donde, para realizar operaciones aritméticas se utiliza la aproximación estándar. Consideremos la operación binaria $*$ (suma, resta o multiplicación) y dos números difusos $A = (a_1, b_1, c_1, d_1)$ y $B = (a_2, b_2, c_2, d_2)$ entonces

$$A * B = (a_1 * a_2, b_1 * b_2, c_1 * c_2, d_1 * d_2). \quad (5)$$

Por ejemplo, $A = (2,5,6,8)$ y $B = (1,3,5,7)$, entonces $A + B = (3,8,11,15)$. (6)

Una segunda forma de realizar operaciones aritméticas es por intervalos [5], donde en caso de tener los mismos conjuntos anteriormente mencionados, se los separa en intervalos tales que $A_1 = (a_1, b_1)$, $A_2 = (c_1, d_1)$, $B_1 = (a_2, b_2)$ y $B_2 = (c_2, d_2)$. Con los intervalos listos, $A * B = A_1 * A_2 * B_1 * B_2 = (a_1 * a_2, b_1 * b_2), (c_1 * c_2, d_1 * d_2)$. (7)

Si tenemos $A = (2,5,6,8)$ y $B = (1,3,5,7)$, entonces $A + B = (3,8), (11,15)$. (8)

En [5] se propone que la manera más natural de realizar la resta entre 2 números difusos trapezoidales $A = (a_1, b_1, c_1, d_1)$ y $B = (a_2, b_2, c_2, d_2)$, es:

$$a_3 = a_1 - b_2, \quad (9)$$

$$b_3 = b_1 - a_2, \quad (10)$$

$$c_3 = c_1 + c_2, \quad (11)$$

$$d_3 = d_1 + d_2. \quad (12)$$

En [6] se propone aproximar representaciones trapezoidales con derivadas para realizar operaciones aritméticas precisas. El trapecioide es representado de la forma $A = (t_1, t_2, t_3, t_4)$ donde cada valor del número difuso es una derivada de su función de intervalo $A = [L(x), R(x)]$, tal que

$$t_1 = -6 \int_0^1 \alpha L(x) dx + 4 \int_0^1 L(x) dx, \quad (13)$$

$$t_2 = 6 \int_0^1 \alpha L(x) dx - 2 \int_0^1 L(x) dx, \quad (14)$$

$$t_3 = 6 \int_0^1 \alpha R(x) dx - 2 \int_0^1 R(x) dx, \quad (15)$$

$$t_4 = -6 \int_0^1 \alpha R(x) dx + 4 \int_0^1 R(x) dx. \quad (16)$$

Esto permite utilizar la aproximación estándar preservando la forma del intervalo esperado [6, 8].

En [7] se propone un acercamiento a la multiplicación, con el objetivo de aproximar el resultado de manera que sea más manejable computacionalmente. Así, el producto de $A = (a, b, c, d)$ y $B = (e, f, g, h)$ es aproximado al número difuso $C = (i, j, k, l)$, tal que

$$i = \frac{3}{2}(b-a)(f-e) + 2((b-a)a + (f-e)e) + 3ae - 2bf, \quad (17)$$

$$j = bf, \quad (18)$$

$$k = cg, \quad (19)$$

$$l = \frac{3}{2}(d-c)(h-g) - 2((d-c)c + (h-g)h) + 3dh - 2cg, \quad (20)$$

Cálculos entre números difusos L-R: Considerando una operación binaria $*$ (suma, resta o multiplicación) y dos números L-R dados por $A = (m_1, U_1, L_1, R_1)$ y $B = (m_2, U_2, L_2, R_2)$, se define la operación tal que $m_3 = m_1 * m_2$ [8]. La función de intervalo resultante sería

$$A * B = [m_1 * m_2 - L_r(A, B), m_1 * m_2 - R_r(A, B)], \quad (21)$$

donde

$$L_r(A, B) = \max(L_1 - r(L_1 - U_1), L_2 - r(L_2 - U_2)), \quad (22)$$

$$R_r(A, B) = \max(R_1 - r(R_1 - U_1), R_2 - r(R_2 - U_2)), \quad (23)$$

de manera que el número resultante es

$$A * B = (m_1 * m_2, \max(U_1, U_2), \max(L_1, L_2), \max(R_1, R_2)). \quad (24)$$

para cualquier operación [8].

Cálculos entre números difusos gaussianos: Al momento de trabajar con la representación gaussiana, en la suma, resta y multiplicación se puede realizar la aproximación estándar, por ejemplo, si tenemos 2 números difusos gaussianos $A = (m_1, \sigma_1)$ y $B = (m_2, \sigma_2)$, se tendría las operaciones $A + B = (m_1 + m_2, \sigma_1 + \sigma_2)$ y $A - B = (m_1 - m_2, \sigma_1 - \sigma_2)$ [9].

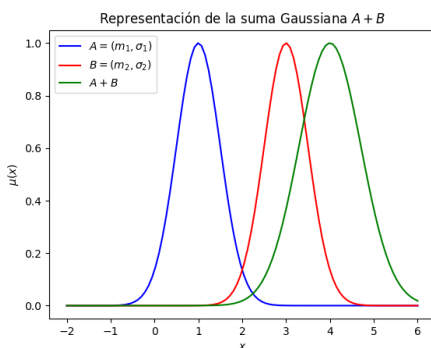


Fig. 4 Representación de la suma Gaussiana $A + B$

En la Fig. 4 se puede apreciar un ejemplo de suma entre números difusos gaussianos.

A continuación, presentamos una metodología que ayuda a encontrar cuál es la mejor representación gráfica para cada expresión lingüística y qué tan cercanos son los resultados de las operaciones aritméticas a lo que se espera en contextos cotidianos. Para lograrlo se emplearán distintas herramientas como una calculadora de números difusos diseñada a partir de la literatura de las distintas representaciones, y formularios que pondrán a prueba tanto las representaciones gráficas como los métodos para las operaciones aritméticas suma, resta y multiplicación.

III. METODOLOGÍA

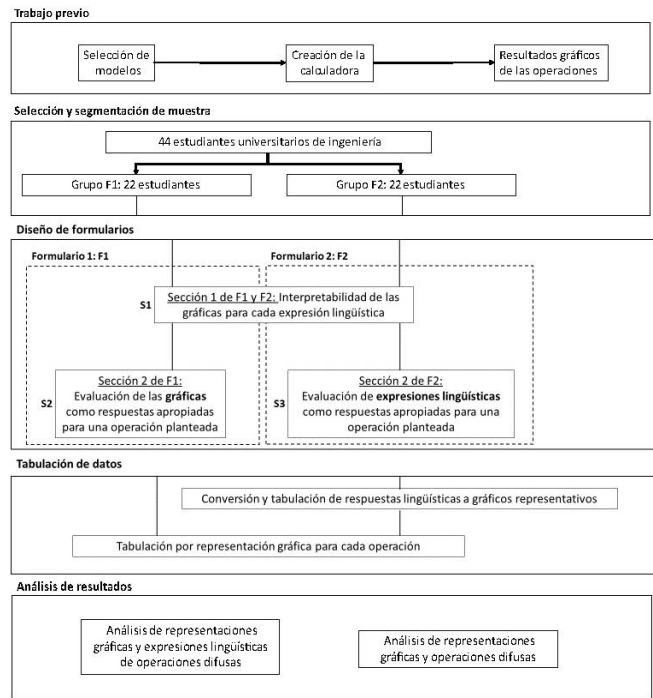


Fig. 5 Modelo de desarrollo de la metodología

La Figura 5 ilustra la metodología que se llevó a cabo para el desarrollo de esta investigación.

La metodología se conforma de cinco pasos:

1. Trabajo previo: Se realizó la selección de 4 modelos de representación de números difusos (Triangular, Trapezoidal, L-R, Gaussiana). Se creó una calculadora que realiza las diferentes operaciones aritméticas mostradas en [3–9, 13] y muestra el resultado gráfico de cada una de las operaciones.
2. Selección y segmentación de muestra: Se seleccionaron 44 estudiantes de grado de carreras de ingeniería para la muestra. Se dividió la

muestra en dos grupos de igual tamaño: *Grupo₁* y *Grupo₂*.

3. Diseño de formularios: Se diseñaron dos formularios con dos secciones cada uno:
 - a. El formulario F_1 con la sección S_1 en el que se evaluaría la interpretabilidad de las gráficas para cada expresión lingüística, y S_2 en el que se evaluaría las representaciones gráficas como respuestas apropiadas para un problema planteado.
 - b. El formulario F_2 con la sección S_1 en el que también se evaluaría la interpretabilidad de las gráficas para cada expresión lingüística, y S_3 en el que se evaluarían las expresiones lingüísticas como respuestas apropiadas para un problema planteado. S_3 corresponde a una sección de control de las respuestas en S_2 de modo que se evalúa la asociación entre representaciones gráficas y expresiones lingüísticas.

Se solicitó al *Grupo₁* que contestara F_1 y al *Grupo₂* que contestara F_2 .

4. Tabulación de datos: Consistió en convertir las expresiones lingüísticas a los respectivos gráficos de representación para tabularlos de acuerdo con sus respuestas. Además, para ambos formularios, se agrupó y tabuló cada representación gráfica dependiendo de la operación utilizada en la pregunta.
5. Análisis de resultados: Se analizaron las respuestas obtenidas en los formularios. Para la sección S_1 se analizó las representaciones gráficas para cada expresión lingüística. En cambio, en las secciones S_2 y S_3 se analizó la asociación de las representaciones gráficas junto con las expresiones lingüísticas de las operaciones difusas. Este proceso ayudó a determinar qué representaciones difusas son las más entendibles en contextos cotidianos, pues en esencia consistió en acercarse a las personas que componen estos contextos y preguntarles su opinión directamente.

A. Trabajo Previo

Selección de modelos: Se seleccionaron los siguientes modelos de representación de números difusos:

- Triangular
- Trapezoidal
- L-R
- Gaussiana

Calculadora de Números Difusos: Se creó una calculadora de números difusos para poder realizar las representaciones gráficas obtenidas de los resultados de las operaciones aritméticas. La calculadora fue implementada en Python 3.9.16 y presenta la interfaz mostrada en la Fig. 6. Para poder realizar las operaciones aritméticas primero se programó las diferentes representaciones y sus operaciones para realizar cálculos. Se creó una clase por cada representación matemática.

Para la calculadora se decidió utilizar las expresiones “alrededor de _”, “entre _ y _”, “como máximo _” y “como mínimo _” como entradas que representan números difusos.

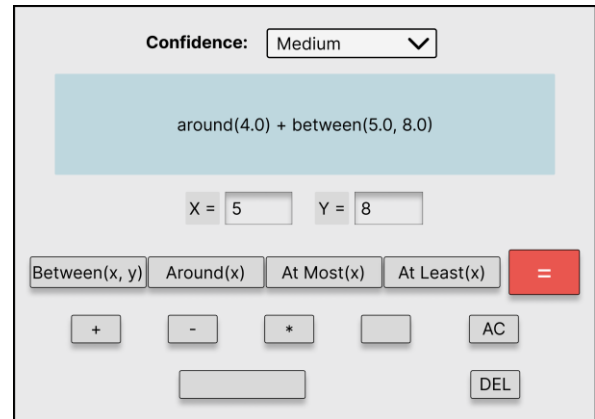


Fig. 6 Interfaz gráfica de la calculadora

Para poder realizar las operaciones aritméticas, los valores de entrada son convertidos a la representación matemática con la que se quiere realizar la operación. Las expresiones utilizadas solo definen el valor, o rango de valores, donde $\mu(x) = 1$ y no definen los valores donde $\mu(x) \neq 1$. Por lo que si se tiene la frase “Nos vemos entre las 4 y 5 de la tarde”, se la puede representar con la siguiente forma trapezoidal: $A = (a, 4, 5, d)$, donde se desconocen los valores de a y de d . Para estimar los valores faltantes se decidió utilizar la siguiente aproximación:

$$a = 0.5b, \quad (25)$$

$$b = b, \quad (26)$$

$$c = c, \quad (27)$$

$$d = 1.5c, \quad (28)$$

Representaciones gráficas de las operaciones: Después de convertir los números difusos en sus representaciones matemáticas, se realiza la operación aritmética deseada. Esto se realiza por cada representación matemática (triangular, trapezoidal, gaussiana y L-R). Los resultados son graficados con la librería matplotlib como muestra la Fig. 7 y guardados en un PDF con la librería FPDF.

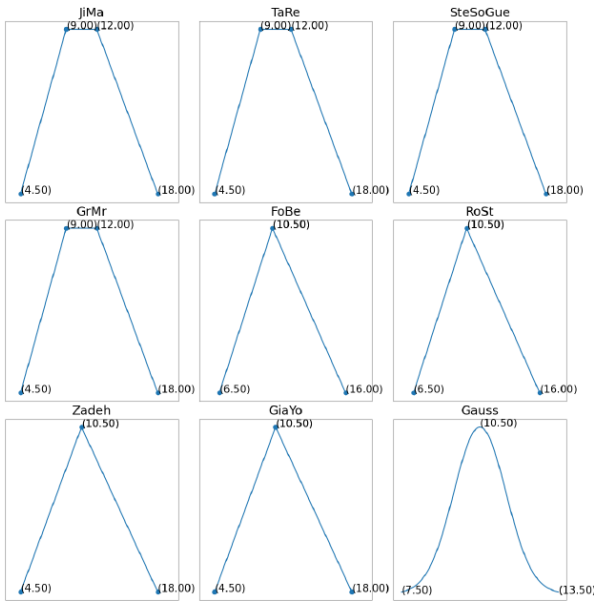


Fig. 7 Resultados obtenidos por la calculadora

B. Diseño de Formularios

Recordando que se evaluará la naturalidad e interpretabilidad de los números difusos respondiendo las siguientes preguntas:

- Q_1 : ¿Cuáles son las representaciones gráficas que mejor ilustran a cada una de las expresiones lingüísticas como “alrededor de _”, “entre _ y _”, utilizados para realizar operaciones matemáticas básicas con números difusos?
- Q_2 : ¿En qué medida se asemejan los resultados obtenidos a partir de las operaciones matemáticas con métodos propuestos en la literatura para operar números difusos a los resultados esperados en un contexto más cotidiano como el universitario?

Se diseñaron dos formularios F_1 y F_2 utilizando la herramienta Microsoft Forms, en los cuales se presentaron situaciones cotidianas en un contexto universitario con términos lingüísticos y valores ambiguos.

El formulario F_1 consta de 17 preguntas, mientras que el formulario F_2 consta de 17 preguntas. Las preguntas de ambos formularios son preguntas cerradas. Se estableció previamente que las opciones de respuesta se presentarían en forma de casillas de verificación, permitiendo al participante la selección de múltiples respuestas.

Formulario F_1 : El formulario F_1 contiene dos secciones, S_1 y S_2 , y está destinado al $Grupo_1$. Con el objetivo de responder la pregunta de investigación Q_1 , en la sección S_1 que contiene 8 preguntas, se exploraron expresiones naturales relacionadas con gráficos matemáticos. Se seleccionaron 8 expresiones, “alrededor de _”, “cercano a _”, “entre _ y _”, “hasta las _”, “mayor que _”, “menor que _”, “no menor a _”,

y “no mayor a _”, y se formuló una pregunta para cada expresión. A los participantes se les pidió que, para cada pregunta, seleccionaran la gráfica que mejor representaba la situación como muestra la Fig. 8.

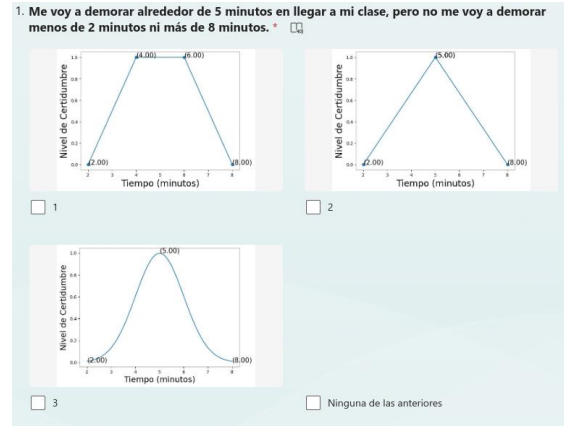


Fig. 8 Pregunta 1 del formulario F_1 en la sección S_1

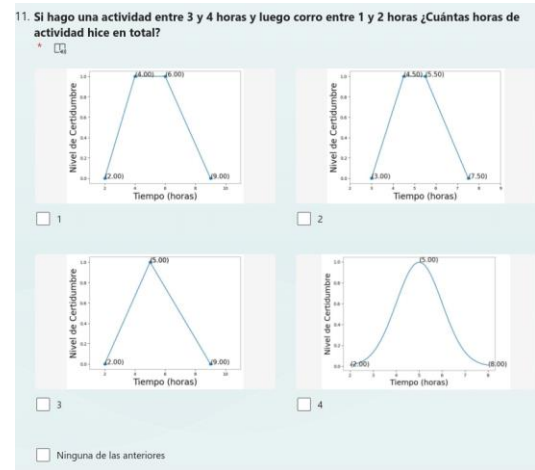


Fig. 9 Pregunta 3 del formulario F_1 de la sección S_2

La sección S_2 contiene 9 preguntas. Con el objetivo de responder la pregunta de investigación Q_2 , se enfocó en las operaciones matemáticas con números difusos asociadas a un ámbito universitario. Esta vez se hicieron preguntas con situaciones cotidianas en las cuales se realizan operaciones aritméticas con las expresiones “alrededor de _”, “cercano a _”, “entre _ y _”, por cada pregunta se les pidió a los participantes elegir el gráfico que más se aproximara a un resultado esperado como lo muestra la Fig. 9.

La representación gaussiana no fue utilizada como opción en las expresiones “hasta las _”, “mayor que _”, “menor que _”, “no menor a _”, y “no mayor a _” porque esta forma gráfica no permite representar este tipo de situaciones.

Formulario F₂ : El formulario *F₂* contiene dos secciones, *S₁* y *S₃*, y está destinado al *Grupo₂*. Con el objetivo de responder la pregunta de investigación *Q₁*, la sección *S₁* que contiene 8 preguntas, se exploraron expresiones naturales relacionadas con gráficos matemáticos. Se seleccionaron 8 expresiones, “alrededor de _”, “cercano a _”, “entre _ y _”, “hasta las _”, “mayor que _”, “menor que _”, “no menor a _”, y “no mayor a _”, y se formuló una pregunta para cada expresión. A los participantes se les pidió que, para cada pregunta, seleccionaran la gráfica que mejor representaba la situación.

Fig. 10 Pregunta 3 del formulario *F₂* de la sección *S₃*

La siguiente sección, *S₃*, corresponde a las operaciones matemáticas con números difusos asociadas a un contexto universitario realizadas en la sección *S₂* del formulario *F₁*. Se dejaron los gráficos de lado con el fin de responder la segunda pregunta de investigación *Q₂*. Por lo que se realizaron operaciones aritméticas con las expresiones “alrededor de _”, “cercano a _”, “entre _ y _”, por cada pregunta se pidió a los estudiantes del segundo grupo elegir la expresión lingüística que más se aproximara a un resultado esperado como muestra la Fig. 10.

C. Tabulación de Datos

Se utilizó Python 3.9.16 en conjunto con las librerías Numpy y Pandas. Se obtuvo un CSV al exportar los resultados de los formularios en Microsoft Form así, mediante la estructura data frame, se clasificaron las respuestas. Para las secciones *S₁* y *S₂* se agruparon y tabularon los resultados dependiendo de la representación gráfica obtenida para cada operación aritmética. Mientras que para *S₃*, dado que trabaja inicialmente con expresiones lingüísticas, primero pasó por un proceso de conversión y tabulación de la selección lingüística a representación gráfica, y luego se tabuló cada representación en relación con la operación aritmética presentada.

D. Análisis de Resultados

Para responder la pregunta *Q₁* se debe analizar si las expresiones lingüísticas utilizadas generan preferencia hacia una representación específica. Para ello se analizó en la sección *S₁* de los formularios *F₁* y *F₂*, cuáles son las representaciones gráficas más seleccionadas con ciertas expresiones que representan números difusos. También se

analizó cómo afecta la representación gráfica en la decisión de selección de las operaciones aritméticas, por lo que se contrastó los resultados de la sección *S₂* con las respuestas obtenidas en *S₃* para verificar si la representación gráfica no afectó en la selección del resultado.

Para responder *Q₂* se debe analizar la naturalidad de las respuestas obtenidas por las diferentes formas de realizar cálculos entre números difusos. Para ello se analizó cuáles resultados eran los más seleccionados en *S₂* y *S₃*, ya que estos son los que el participante considera como más natural.

Las preguntas nos permitieron determinar qué representaciones esperaban ver los participantes en cada situación y cuáles operaciones eran las más comprensibles.

IV. RESULTADOS

A. Respuesta de los formularios

Se obtuvieron 22 respuestas para cada formulario. Como la primera sección era la misma en ambos formularios, estas fueron agrupadas en un solo grupo de 44 respuestas. Los participantes eran estudiantes universitarios de carreras de grado de ingeniería.

B. Asociación gráfica y lingüística

Cuadro I
Respuestas de *S₁*

Expresión lingüística	Representación gráfica			
	Trapezoide	Triangular	Gauss	Ninguna
“Alrededor de ”	7	7	34	1
“Cercano a ”	11	7	28	1
“Entre y ”	30	2	12	1
“Hasta las ”	30	4	N/A	11
“Mayor a ”	32	4	N/A	10
“Menor a ”	30	5	N/A	9
“No menor a ”	35	3	N/A	6
“No mayor a ”	35	2	N/A	7

Como se muestra en el Cuadro I, la forma gaussiana fue la más seleccionada en las expresiones “alrededor de _” y “cercano a _” con 34 y 28 respuestas respectivamente. La forma trapezoidal fue la más asociada a las expresiones “entre _ y _”, “hasta las _”, “mayor a _”, “menor a _”, “no menor a _” y “no mayor a _” con 30 respuestas o más en cada una de estas. La representación triangular fue la que menor frecuencia tuvo al no obtener más de 7 respuestas en cada expresión lingüística.

En la Fig. 11 se aprecia que las operaciones con números difusos trapezoidales fueron las más escogidas cuando eran operaciones que solo usaban la expresión “entre _ y _”. Las operaciones con L-R fueron las segundas más seleccionadas cuando se usaba solo la expresión “entre _ y _”. Las menos seleccionadas fueron las operaciones entre triangulares, con 5 respuestas cada una.

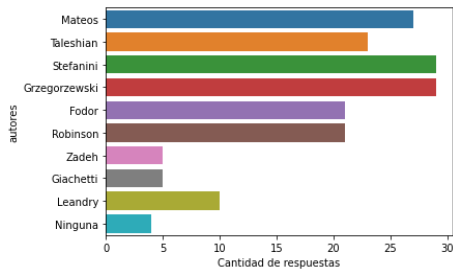


Fig. 11 Resultados de operaciones que solamente usaban la expresión lingüística “entre _ y _” en S_2

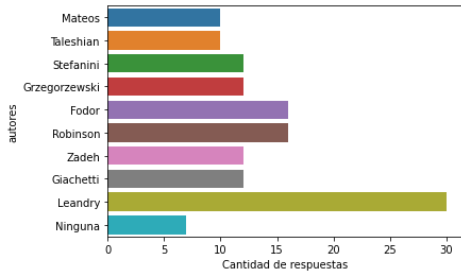


Fig. 12 Resultados de operaciones que solamente usaban la expresión lingüística “alrededor de _” en S_2

La Fig. 12 muestra que la forma gaussiana fue la más escogida cuando se describía una situación en la que solo se usaba la expresión “alrededor de _”. Al contrastar la Fig. 12 con la Fig. 11, se muestra que la cantidad de veces que la gaussiana fue seleccionada en situaciones donde solo se usa “alrededor de _” fue 30, tres veces más que en situaciones donde solo se usó la expresión “entre _ y _”.

C. Operaciones matemáticas con números difusos

Cuadro II
Respuestas de S_2

Autores	Operación matemática		
	Suma	Resta	Multiplicación
Trapezoidal			
Mateos [7]	30	26	14
Teleshian [5]	30	6	17
Stefanini [4]	30	26	17
Grzegorzewski [6]	30	26	17
L-R			
Fodor [8]	8	12	24
Robinson [8]	8	12	24
Triangular			
Zadeh [3]	7	10	9
Giachetti [3]	7	10	9
Gauss			
Leandry [9]	22	16	11
Ninguna	6	7	5

El Cuadro II muestra que cada una de las propuestas de operaciones con números triangulares mostradas en [3] tuvieron un total de 26 respuestas en S_2 . Por otro lado, cada

una de las propuestas de las operaciones con L-R mostradas en [8] tuvieron un total de 44 respuestas. Las propuestas de las operaciones con trapezoidales mostradas en [6] y [4] tuvieron 73 respuestas cada una en S_2 . La tercera propuesta matemática con más respuestas también fue una trapezoidal, [7], y obtuvo 70 respuestas.

Cuadro III
Respuestas de S_3

Autores	Operación matemática		
	Suma	Resta	Multiplicación
Trapezoidal			
Mateos [7]	27	22	13
Teleshian [5]	27	4	19
Stefanini [4]	27	22	19
Grzegorzewski [6]	27	22	19
L-R			
Fodor [8]	18	19	23
Robinson [8]	18	19	23
Triangular			
Zadeh [3]	8	11	9
Giachetti [3]	8	11	9
Gauss			
Leandry [9]	8	17	12
Ninguna	9	10	6

Las operaciones trapezoidales [4, 6] también fueron las más seleccionadas en S_3 , tal como se muestra en el Cuadro III, pero la cantidad de respuestas bajó de 73 a 68. De forma similar, [7] seguía siendo la tercera propuesta más respondida en S_3 , pero con 62 respuestas totales en vez de 70. Las dos operaciones entre L-R mostrados en [8] tuvieron un aumento considerable de respuestas en S_3 en las operaciones de suma y de resta.

En los Cuadros II y III se puede apreciar que, en las operaciones de suma y resta, las operaciones entre trapezoidales eran preferidas en S_2 y en S_3 , aunque la propuesta de [5] fue la menos escogida en la resta en S_2 y en S_3 a pesar de ser una trapezoidal. En la multiplicación, las operaciones entre L-R fueron las más escogidas en S_2 , con 24 respuestas, y en S_3 , con 23 respuestas.

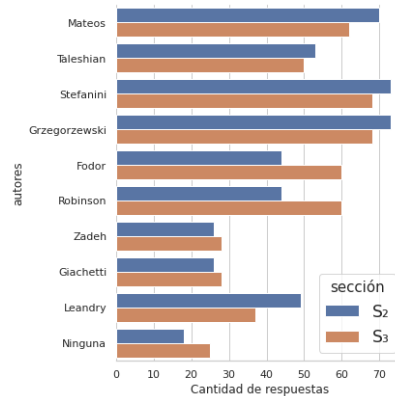


Fig. 13 Nivel de preferencia de autor por sección

La Fig. 13 muestran que las operaciones con números difusos gaussianos tienen más respuestas que las triangulares en S_2 y en S_3 . Las 2 operaciones triangulares mostradas en [3] tuvieron más respuestas en S_3 que en S_2 , pero el aumento fue bajo. Se puede apreciar en los Cuadros II y III que la operación de suma entre gaussianas mostrada en [9] es considerablemente menor en S_3 que en S_2 donde la cantidad de respuestas baja de 22 a 8.

V. DISCUSIÓN

Uno de los objetivos principales de este trabajo de investigación es analizar qué representaciones gráficas representan mejor a las expresiones lingüísticas utilizadas para realizar operaciones matemáticas con números difusos. Para ello utilizamos las formas: triangular, trapezoidal, gaussiana y L-R (que en este caso obtiene una forma trapezoidal) para representar números difusos. Se analizó cuáles eran las representaciones gráficas más seleccionadas para cada expresión lingüística para ver si existe una relación. Esto se analizó tanto en S_1 como en S_2 .

El otro objetivo de la investigación era analizar qué tan naturales son los resultados obtenidos con los métodos lingüísticos utilizados para realizar operaciones matemáticas básicas con números difusos. Se analizó si los resultados obtenidos en las operaciones propuestas en la literatura eran similares a los resultados que un estudiante realizaría con naturalidad en situaciones cotidianas. Para esto se analizó si las respuestas en S_2 , que representan el valor obtenido por estas operaciones propuestas en la literatura, eran consistentes con los resultados obtenidos en S_3 , que representan las respuestas que una persona realizaría a través de cálculos mentales.

A. Asociación gráfica y lingüística

Los resultados muestran que existe una fuerte relación entre la expresión lingüística y la representación gráfica. En S_1 las expresiones lingüísticas con un solo valor, “alrededor de _” y “cerca de _”, tenían una fuerte relación con la representación gráfica gaussiana con el 69 % y el 60 % de los resultados mostrados en el Cuadro I respectivamente. La expresión “entre _ y _” estaba fuertemente asociado a la representación trapezoidal con un 68 % de las respuestas mostradas en el Cuadro I.

Esta relación también se puede ver en S_2 donde los participantes preferían una representación trapezoidal cuando se usaba la expresión “entre _ y _”. Por otro lado, se puede apreciar en la Fig. 12 que la representación gaussiana fue la más seleccionada en operaciones donde solo se usó la expresión “alrededor de”

B. Naturalidad en cálculos con números difusos

En la suma y en la resta se prefirieron representaciones trapezoidales, seguidas de cerca por la representación gaussiana. Es con la multiplicación que las respuestas tienden

hacia las representaciones L-R, sobrepasando a las representaciones trapezoidales, y dejando en tercer lugar la representación gaussiana. Las operaciones entre triangulares son las menos escogidas en los tres casos.

De forma más específica, las formas matemáticas más naturales de realizar la suma y la resta fueron las de [4, 6], como se muestra en el Cuadro II. La Fig. 13 muestra que los resultados de [4, 6] en S_3 fueron menores que en S_2 , la diferencia es baja y seguían siendo los resultados más escogidos en estas dos operaciones matemáticas.

Las dos operaciones entre L-Rs mostradas en [8] fueron las operaciones más naturales para realizar multiplicación entre números difusos, ya que fueron las más seleccionadas para representar resultados de multiplicación en S_2 y S_3 , como se muestra en la Fig. 13.

El Cuadro II muestra que las operaciones entre triangulares fueron las menos naturales para realizar la suma y multiplicación. La propuesta matemática menos natural para realizar resta fue la propuesta en [5] que tuvo los valores más bajos en todo el formulario.

Al contrastar el Cuadro II con el Cuadro III se puede apreciar que los resultados obtenidos en S_3 fueron similares con los obtenidos en S_2 a excepción de 3 casos: en la suma y resta de las operaciones entre L-Rs, y en la suma de la gaussiana.

El aumento de respuestas de operaciones con L-R puede atribuirse a que en S_2 , los resultados de esta operación daban una forma triangular en 6 de 9 situaciones en el formulario, aunque esto no explica el por qué la cantidad de respuesta de multiplicación no aumentó.

El gran decrecimiento de respuestas en S_3 de la operación de suma entre gaussianas en [9] puede atribuirse a que las respuestas obtenidas por esta operación eran muy similares a las obtenidas por las sumas entre triangulares mostradas en [3], por lo que el factor diferenciador en este caso era la representación gráfica gaussiana más que la operación de suma.

VI. CONCLUSIÓN

Al inicio de esta investigación se plantearon 2 preguntas:

- Q_1 : ¿Cuáles son las representaciones gráficas que mejor ilustran a cada una de las expresiones lingüísticas como “alrededor de _”, “entre _ y _”, utilizados para realizar operaciones matemáticas básicas con números difusos?
- Q_2 : ¿En qué medida se asemejan los resultados obtenidos a partir de las operaciones matemáticas con métodos propuestos en la literatura para operar números difusos a los resultados esperados en un contexto más cotidiano como el universitario?

Para responder a Q_1 se analizó qué representaciones gráficas asocian las personas con ciertas expresiones

REFERENCIAS

- [1] L. Zadeh, "Fuzzy sets," *Information and Control*, vol. 8, no. 3, pp. 338–353, 1965. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S00199586590241X>
- [2] R. van Rooij, "Vagueness and linguistics," in *Vagueness: A Guide*, G. Ronzitti, Ed. Springer Netherlands, 2011, pp. 123–170. [Online]. Available: https://doi.org/10.1007/978-94-007-0375-9_6
- [3] R. E. Giachetti and R. E. Young, "A parametric representation of fuzzy numbers and their arithmetic operators," *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 91, no. 2, pp. 185–202, oct 1997.
- [4] L. Stefanini, L. Sorini, and M. L. Guerra, "Parametric representation of fuzzy numbers and application to fuzzy calculus," *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 157, no. 18, pp. 2423–2455, sep 2006.
- [5] A. Taleshian and S. Rezvani, "Multiplication operation on trapezoidal fuzzy numbers," *Journal of Physical Science*, vol. 15, 01 2011.
- [6] P. Grzegorzewski and E. Mrówka, "Trapezoidal approximations of fuzzy numbers," *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 153, no. 1, pp. 115–135, jul 2005.
- [7] A. Mateos and A. Jimenez, "A trapezoidal fuzzy numbers-based approach for aggregating group preferences and ranking decision alternatives in MCDM," in *Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics)*, vol. 5467 LNCS. Springer, Berlin, Heidelberg, 2010, pp. 365–379. [Online]. Available: https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-642-01020-0_30
- [8] J. Fodor and B. Bede, "Arithmetics with fuzzy numbers: a comparative overview," 2006.
- [9] L. Leandry, I. Sosoma, and D. Koloseni, "Basic fuzzy arithmetic operations using α -cut for the gaussian membership function," *Journal of Fuzzy Extension and Applications*, vol. 3, no. 4, pp. 337–348, 2022. [Online]. Available: <https://www.journal-fea.com/article/153240.html>
- [10] J. F. Padrón-Tristán, L. Cruz-Reyes, R. A. Espin-Andrade, and C. E. Llorente-Peralta, "A Brief Review of Performance and Interpretability in Fuzzy Inference Systems." Cham: Springer International Publishing, 2021, pp. 237–266. [Online]. Available: https://doi.org/10.1007/978-3-030-71115-3_11
- [11] K. Cpałka, *Introduction to Fuzzy System Interpretability*. Cham: Springer International Publishing, 2017, pp. 27–36. [Online]. Available: https://doi.org/10.1007/978-3-319-52881-6_3
- [12] S. Chakraverty, D. M. Sahoo, and N. R. Mahato, "Fuzzy numbers," in *Concepts of Soft Computing: Fuzzy and ANN with Programming*. Springer Singapore, pp. 53–69. [Online]. Available: https://doi.org/10.1007/978-981-13-7430-2_3
- [13] M. Rahaman, S. Mondal, E. Algehyne, A. Biswas, and S. Alam, "A method for solving linear difference equation in gaussian fuzzy environments," *Granular Computing*, vol. 7, 01 2022.

lingüísticas comúnmente usadas. Los resultados obtenidos muestran que la representación gaussiana es la mejor representación gráfica para las expresiones "alrededor de $_$ " y "cercano a $_$ ", mientras que la representación trapezoidal es la mejor para representar las expresiones "entre $_$ y $_$ ", "hasta las $_$ ", "mayor que $_$ ", "menor que $_$ ", "no menor a $_$ " y "no mayor a $_$ ".

Para responder a Q_2 se analizó cuales resultados obtenidos por diferentes propuestas para resolver operaciones aritméticas con números difusos fueron los más escogidos por estudiantes al encontrarse en situaciones cotidianas. Los resultados obtenidos muestran que no hay una sola forma aritmética propuesta que sea la más natural para la suma, resta y multiplicación juntas, lo mejor es tener un modelo que utilice diferentes tipos de operaciones dependiendo del cálculo que se esté realizando.

De las propuestas analizadas en este estudio, las mejores formas de realizar la operación de suma y resta entre números difusos fueron [4, 6] mientras que la mejor operación de multiplicación son las propuestas en [8].

VII. TRABAJOS FUTUROS

Es posible extender la investigación a otras operaciones matemáticas entre números difusos que también son muy usadas en la cotidianidad como el mínimo, máximo y la división. También hace falta investigar la naturalidad de otras formas de realizar cálculos entre números difusos gaussianos.

Las secciones S_2 y S_1 solo mostraron situaciones donde se utilizaban las expresiones "alrededor de $_$ " y "entre $_$ y $_$ ", es muy importante poder analizar situaciones donde se utilicen otros tipos de expresiones como "cercano a $_$ ", o "mayor a $_$ " entre otros que podrían estudiarse. Este análisis podría proporcionar una comprensión más completa de la naturalidad de diferentes formas de expresar relaciones numéricas difusas en contextos cotidianos y académicos.

RECONOCIMIENTOS

Quisiéramos agradecer a PhD. Ana Tapia y a PhD. Marcelo Loor, no solo por ser pacientes con nosotros y darnos parte de su tiempo para ayudarnos en la creación del artículo, sino también por presentarnos el hermoso mundo de la investigación.

También queremos agradecer a PhD. Otilia Alejandro por las sugerencias para la mejora del artículo, a Karla Merchán y Krystel Lucín que ayudaron en la creación de la calculadora de números difusos, y a todos los estudiantes que completaron el formulario.

Esta investigación recibe apoyo de la Escuela Superior Politécnica del Litoral bajo el proyecto "Inteligencia artificial interpretable (XAI) en procesos de toma de decisiones grupales"(FIEC-200-2020).