

Strategy for teaching Probabilities in Engineering through Monte Carlo Simulation

Wilber Ortiz Aguilar, PhD. 1,2 , Manuel Roberto Tolozano Benites, PhD. 1 , Roger Martínez Isaac, PhD.1  and Arian Vázquez Álvarez, MSc. 1 

¹Universidad Bolivariana del Ecuador, Ecuador, wortiza@ube.edu.ec, rtolozano@ube.edu.ec, rmartinezi@ube.edu.ec, avazqueza@ube.edu.ec

²Universidad de Guayaquil, Ecuador, wilber.ortiza@ug.edu.ec

Abstract- Students of Intelligent Systems Engineering at the Bolivarian University of Ecuador present significant difficulties in the understanding and application of probability concepts. The difficulties shown during Statistics classes to develop an accurate probabilistic intuition, motivated the development of the present research. The results of the design and application of a strategy for the teaching of Probabilities in Engineering, by means of Monte Carlo Simulation, are presented. Microsoft Excel was used as software for the development of the simulations. The selected sample consisted of 28 students in a control group and 27 students in the experimental group, who participated in the study for a period of 4 months, at the end of which they expressed their opinion on the relevance of the proposal. A comparative analysis was made between the groups based on partial evaluations. The results of the validation allowed concluding that the applied strategy contributed to the understanding and motivation of Intelligent Systems Engineering students in probabilistic concepts, and promoted critical thinking and the application of theoretical knowledge of probability in practical contexts.

Keywords- probability concepts, probabilistic intuition, engineering, Monte Carlo simulation.

Estrategia para la enseñanza de Probabilidades en Ingeniería mediante Simulación Monte Carlo

Wilber Ortiz Aguilar, PhD. 1,2^{1b}, Manuel Roberto Tolozano Benites, PhD. 1^{1b}, Roger Martínez Isaac, PhD.1^{1b} and Arian Vázquez Álvarez, MSc. 1^{1b}

¹Universidad Bolivariana del Ecuador, Ecuador, wortiza@ube.edu.ec, rtolozano@ube.edu.ec, rmartinezi@ube.edu.ec, avazqueza@ube.edu.ec

²Universidad de Guayaquil, Ecuador, wilber.ortiza@ug.edu.ec

Resumen– Los alumnos de la carrera de Ingeniería en sistemas inteligentes de la Universidad Bolivariana del Ecuador, presentan dificultades significativas para la comprensión y aplicación de conceptos de probabilidad. Las dificultades mostradas durante las clases de Estadística para desarrollar una intuición probabilística acertada, motivaron el desarrollo de la presente investigación. Se presentan los resultados del diseño y aplicación de una estrategia para la enseñanza de Probabilidades en Ingeniería, mediante Simulación Monte Carlo. Se utilizó el Microsoft Excel como software para el desarrollo de las simulaciones. La muestra seleccionada estuvo constituida por 28 estudiantes en un grupo de control y 27 estudiantes en el grupo experimental, los cuales participaron en el estudio durante un período de 4 meses, al cabo de los cuales emitieron su criterio respecto a la pertinencia de la propuesta. Se realizó un análisis comparativo entre los grupos a partir de evaluaciones parciales. Los resultados de la validación permitieron concluir que la estrategia aplicada contribuyó a la comprensión y motivación de los estudiantes de Ingeniería en Sistemas Inteligentes en conceptos probabilísticos, e impulsó el pensamiento crítico y la aplicación de conocimientos teóricos de probabilidad en contextos prácticos.

Palabras clave- conceptos de probabilidad, intuición probabilística, ingeniería, simulación Montecarlo.

Abstract- Students of Intelligent Systems Engineering at the Bolivarian University of Ecuador present significant difficulties in the understanding and application of probability concepts. The difficulties shown during Statistics classes to develop an accurate probabilistic intuition, motivated the development of the present research. The results of the design and application of a strategy for the teaching of Probabilities in Engineering, by means of Monte Carlo Simulation, are presented. Microsoft Excel was used as software for the development of the simulations. The selected sample consisted of 28 students in a control group and 27 students in the experimental group, who participated in the study for a period of 4 months, at the end of which they expressed their opinion on the relevance of the proposal. A comparative analysis was made between the groups based on partial evaluations. The results of the validation allowed concluding that the applied strategy contributed to the understanding and motivation of Intelligent Systems Engineering students in probabilistic concepts, and promoted critical thinking and the application of theoretical knowledge of probability in practical contexts.

Keywords- probability concepts, probabilistic intuition, engineering, Monte Carlo simulation.

I. INTRODUCCIÓN

La comprensión de los procesos aleatorios y la teoría de las probabilidades desempeña un papel fundamental en la formación de ingenieros, ya que proporciona las herramientas esenciales para abordar y resolver problemas en una amplia variedad de campos. La ingeniería contemporánea enfrenta situaciones en las que la variabilidad y la incertidumbre son inherentes, desde la planificación de proyectos hasta el diseño de sistemas complejos [1], [2].

La aplicación efectiva de la teoría de probabilidades permite a los ingenieros evaluar riesgos, tomar decisiones informadas y diseñar soluciones robustas en presencia de factores aleatorios [3]. Además, comprender los procesos aleatorios facilita la modelización de sistemas dinámicos y la optimización de procesos, mejorando así la capacidad de los ingenieros para desarrollar soluciones eficientes y sostenibles [4], en un entorno cada vez más complejo y cambiante.

La aplicabilidad de la teoría de probabilidades en la ingeniería de sistemas inteligentes es extensa y desempeña un papel fundamental en el diseño, la toma de decisiones y la gestión de la incertidumbre. En el ámbito de la inteligencia artificial y sistemas inteligentes, la probabilidad se utiliza para modelar la incertidumbre inherente en datos y entornos complejos [5]. Los algoritmos de clasificación y regresión utilizan conceptos probabilísticos para asignar la probabilidad de pertenencia a diferentes clases o valores [6].

En el aprendizaje automático, la introducción de elementos aleatorios en la inicialización de pesos o en la selección de muestras durante el entrenamiento puede mejorar la robustez y generalización del modelo [7].

La ingeniería de sistemas inteligentes también se beneficia de la probabilidad en el diseño de algoritmos de control adaptativo, donde la capacidad de anticipar y modelar eventos futuros inciertos es esencial. En el campo de la robótica, la planificación de trayectorias y la navegación autónoma se benefician de modelos probabilísticos [8], para gestionar la variabilidad en la percepción del entorno.

La diversidad de aplicaciones de la teoría de probabilidades en ingeniería agrega complejidades, ya que los estudiantes deben adaptar y aplicar estos conceptos a contextos específicos [9]. La falta de conexión directa con problemas tangibles y la

necesidad de abordar la incertidumbre pueden contribuir a la percepción de que la teoría de probabilidades es abstracta y alejada de la realidad práctica. Los estudiantes de ingeniería a menudo enfrentan desafíos significativos al intentar comprender los conceptos asociados a la teoría de las probabilidades [10].

Por otra parte, la propia interpretación de eventos aleatorios y la aplicación de conceptos probabilísticos a problemas del mundo real también pueden ser complicadas, ya que requieren una transición exitosa entre la teoría abstracta y su implementación práctica [11].

Investigaciones didácticas indican la existencia de conceptos erróneos generalizados y percepciones sesgadas sobre la aleatoriedad. Estos hallazgos no siempre se han considerado en la enseñanza, donde la aleatoriedad a menudo se asume como un concepto transparente. Según afirma [12], el concepto de aleatoriedad dista de ser elemental y todavía se necesita encontrar formas adecuadas de introducirlo a los alumnos.

En su estudio, [13] identificó el uso de varios conceptos erróneos por parte de estudiantes de ingeniería. Entre ellos se incluía la insensibilidad al tamaño de la muestra, en la que los estudiantes pasaban por alto el impacto del tamaño de la muestra en la variabilidad del muestreo. Además, los estudiantes demostraron la falacia de la tasa base al ignorar probabilidades previas en aplicaciones de probabilidad condicional.

Otros conceptos erróneos observados fueron la representatividad, en la que los estudiantes esperaban que una breve secuencia de resultados reflejara las principales características de un proceso aleatorio, la correlación ilusoria, que implica la suposición de correlación cuando no existe, y la incapacidad para distinguir entre sucesos conjuntivos y disyuntivos.

II. ANTECEDENTES Y JUSTIFICACIÓN

Algunos autores han propuesto enfoques alternativos en la enseñanza de la probabilidad, algunos de los cuales abogan por la combinación del enfoque frecuencial con el enfoque clásico. Al respecto, en [14], se plantea que este método busca que los estudiantes reconozcan patrones en el comportamiento de fenómenos aleatorios, fomenta el desarrollo de una intuición probabilística sólida y la identificación de relaciones significativas entre ambos enfoques, así como sus limitaciones. Sin embargo, enfatiza que la efectiva implementación del enfoque frecuencial en el aula requiere el uso de softwares que posibiliten la simulación de fenómenos aleatorios, la observación de resultados, el conteo de frecuencias y sus representaciones de manera flexible.

La simulación Monte Carlo puede ser una herramienta valiosa para mejorar la comprensión de los conceptos probabilísticos entre los estudiantes de ingeniería. Esta técnica se destaca por ofrecer una aproximación práctica y visual de eventos aleatorios discretos y distribuciones de probabilidad. Son varios los autores que la han utilizado para la enseñanza de

la estadística y, en específico, de la teoría de probabilidades, como se evidencia en [9], [15], [16], [17], [18], [19] y [20].

En su libro, Kay [9] abordó la probabilidad y los procesos aleatorios, basado en la dificultad inicial de los estudiantes para asimilar estos conceptos. Utilizó simulaciones en MATLAB para proporcionar ejemplos motivadores, potenciar la construcción de conceptos generales y facilitar la interpretación de ecuaciones de procesos estocásticos.

Presenta un enfoque pedagógico que inicia con variables aleatorias discretas antes de abordar las continuas y la discusión se centra en variables aleatorias escalares, bivariadas y de dimensiones superiores. Cada capítulo incluye un resumen, fórmulas clave y un ejemplo del mundo real. Se enfatizan ejemplos prácticos de diversas disciplinas y se presentan problemas que incluyen simulaciones computacionales.

En la investigación desarrollada en [15], se presenta un enfoque pedagógico para un curso introductorio de probabilidad dirigido a estudiantes de tercer año de ingeniería eléctrica e informática. Se destaca el énfasis en problemas prácticos de ambas ingenierías, que ilustran aplicaciones de conceptos probabilísticos, mediante simulaciones interactivas en MATLAB. Su autor se basó principalmente en el uso del enfoque frecuentista para desarrollar intuición probabilística, a través de ejemplos concretos que corrigen intuiciones erróneas y enfatizan simulaciones basadas en aplicaciones para decodificar la teoría abstracta.

Al término de su estudio, concluyó que la enseñanza tradicional de probabilidad y procesos aleatorios para estudiantes de ingeniería es conceptualmente difícil, pero que el enfoque propuesto, mostró ser efectivo según pruebas estadísticas y encuestas aplicadas. Los resultados respaldaron la idea de que introducir conceptos probabilísticos abstractos a través de aplicaciones del mundo real, junto con simulaciones interactivas, mejora la comprensión de las probabilidades.

El trabajo publicado en [16] destaca la importancia de la simulación por computadora en la enseñanza de estadísticas, particularmente en el contexto de la prueba chi-cuadrado, mediante el lenguaje de programación R. El artículo aborda la distribución de la estadística chi-cuadrado, comúnmente empleada en métodos estadísticos como pruebas de independencia, bondad de ajuste, significancia, prueba de razón de verosimilitud y selección de modelos. Se abordan dos aspectos fundamentales de la chi-cuadrado: la estadística empírica chi-cuadrado y la distribución de probabilidad teórica chi-cuadrado.

Se resalta que la comprensión sólida de estadísticas inferenciales es crucial en cualquier disciplina científica, y la simulación computarizada puede ayudar a los estudiantes a entender conceptos estadísticos y probabilísticos abstractos. El artículo concluye destacando la importancia de comprender la distribución chi-cuadrado y sus aplicaciones, respaldado por pruebas y simulaciones que permitan verificar su comportamiento probabilístico.

La generación de gráficos de probabilidad en lenguaje R fue utilizada en [17]. Los autores elaboraron actividades que

fusionan la técnica de simulación de Monte Carlo con las opciones de visualización de escenarios en R, para introducir el concepto de independencia entre variables aleatorias. Se simuló el acto de disparar a un blanco con estructuras de objetivos variables. La simulación del disparo implicó generar un par ordenado de variables aleatorias independientes uniformemente distribuidas en el intervalo [0; 1]. La visualización con colores facilitó a los estudiantes considerar las probabilidades marginales, conjuntas y condicionales.

En un estudio exploratorio sobre la intuición probabilística en el aprendizaje de las matemáticas para la toma de decisiones, Ramírez, Zúñiga y Ojeda [18] desarrollaron un sistema de actividades lúdicas de aprendizaje en una plataforma de simulación diseñada para el estudio. Los resultados indicaron que las actividades de simulación mejoraron la intuición probabilística de los estudiantes y su rendimiento en la resolución de problemas.

Se destacó la evitación de decisiones basadas en resultados previos innecesarios y la identificación de situaciones adecuadas para usar la distribución binomial. Aunque se reconoce el impacto positivo, se sugiere la necesidad de mejorar la conexión entre las actividades de simulación y los procedimientos teóricos y analíticos. Señalaron, además, desafíos en la resolución de problemas de probabilidad condicional.

Con el objetivo de evaluar un entorno de aprendizaje basado en simulaciones en el contexto de la probabilidad condicional, en [19], se aplicaron actividades de aprendizaje en un entorno de simulación, y los estudiantes evaluaron la experiencia. Los resultados revelaron que el entorno diseñado ofreció oportunidades únicas para reflexionar sobre situaciones con contenido matemático de probabilidades y la experimentación de diferentes métodos de enseñanza y aprendizaje. Las actividades desarrolladas permitieron a los participantes comprender y evaluar la contribución de las simulaciones a la resolución de problemas, así como las oportunidades que brindan para la discusión, reflexión y colaboración.

Los autores recomiendan el desarrollo de competencias en la creación e integración de simulaciones en la enseñanza y sugieren la necesidad de más estudios para comprender el efecto de las simulaciones en el conocimiento matemático en general.

En [20], se destaca la efectividad de las simulaciones interactivas en Excel para mejorar la comprensión de las distribuciones de probabilidad. La metodología propuesta se estructura en cuatro etapas: los estudiantes participan en simulaciones y experiencias prácticas, se establece la teoría, se resuelven problemas en clase y se enfrentan a un examen conceptual.

Se exploraron diversas distribuciones de probabilidad discreta, como la binomial y la hipergeométrica, mediante simulaciones y discusiones en equipos. Participaron 28 estudiantes, y su rendimiento se comparó con un grupo de

control de 25. Los resultados indicaron una mejora significativa en el grupo que utilizó simulaciones interactivas.

Se destacó que los estudiantes desarrollaron habilidades de programación y mejoraron la comprensión de conceptos probabilísticos. A pesar de algunas dificultades iniciales con las simulaciones en Excel, la introducción de talleres de Excel y Visual Basic para Aplicaciones (VBA), mejoró la comprensión y facilitó la aplicación de simulaciones más complejas.

Con el presente trabajo se pretende aportar una estrategia educativa que contribuya a una mejor comprensión de la teoría de probabilidades, por parte de estudiantes de la carrera de Ingeniería en Sistemas Inteligentes, mediante el desarrollo de simulaciones en Excel.

La propuesta se sustenta en el uso combinado de los enfoques clásico y frecuencial de probabilidades, así como de la utilización de Simulación Monte Carlo sobre Microsoft Excel para la enseñanza del tema Probabilidades en el contexto de la Ingeniería en Sistemas Inteligentes.

III METODOLOGÍA

Se diseñó una estrategia que tuvo como objetivo general: facilitar la comprensión de conceptos probabilísticos y promover habilidades básicas de toma de decisiones en ambientes de incertidumbre, para estudiantes de Ingeniería en Sistemas Inteligentes. La propuesta se sustenta metodológicamente en la interacción con simulaciones Monte Carlo en Microsoft Excel y se estructuró en 4 etapas para su implementación.

Inicialmente se presentan los conceptos clave de probabilidad para Ingeniería en Sistemas Inteligentes y se realizan demostraciones prácticas de una simulación Monte Carlo básica en Excel. En la segunda etapa, se desarrollan talleres guiados para la creación de plantillas preelaboradas en Excel, con instrucciones claras sobre la modificación de parámetros, la observación y registro de los resultados. Se incluyen ejemplos prácticos relacionados con problemas cotidianos y de la disciplina.

En la etapa 3, mediante sesiones de aplicación, que involucran el uso de las plantillas en clase, se procede a la resolución de problemas que requieren que los estudiantes colaboren para realizar los experimentos de simulación y participen en discusiones grupales sobre interpretaciones teórico-prácticas. En la etapa final, se asigna a los estudiantes la tarea de modificar los parámetros en una plantilla para resolver un problema específico, así como de presentar los resultados obtenidos, mediante tablas resúmenes de estadísticas y gráficas.

La estrategia fue aplicada a un grupo de 27 estudiantes de la carrera de Ingeniería en Sistemas Inteligentes de Universidad Bolivariana del Ecuador, por un período de 4 meses. Para la validación de la estrategia se utilizó un grupo de control de 28 estudiantes de la misma carrera. Se realizaron evaluaciones tanto al inicio de la investigación (pretest), como al término de esta (postest).

Se aplicó una escala (1-10) para las calificaciones y se aplicaron pruebas estadísticas no paramétricas. Al término del período de implementación, se aplicó además una encuesta a los estudiantes, la cual fue elaborada a partir de las variables medidas por [15], para medir su percepción acerca del impacto de la aplicación de la estrategia propuesta.

Los ejemplos utilizados y los problemas propuestos se tomaron o diseñaron a partir de los referentes citados, a los que debe sumarse el libro dedicado a simulaciones en Excel de [21].

IV APLICACIÓN Y VALIDACIÓN

Se presenta a continuación, a modo de ilustración del enfoque utilizado, el tratamiento de dos de los ejemplos prácticos que se incluyen en la estrategia. El número de simulaciones se determinó sin enfatizar en el diseño de experimentos de simulación o la determinación estadística del tamaño de muestra, en aras del logro de los objetivos pedagógicos de cada uno de los experimentos realizados.

A. Ejemplo 1. Lanzamiento de un dado

En el diseño del experimento de simulación del lanzamiento de un dado, se elaboró una plantilla Excel para el análisis frecuencial y de la distribución de probabilidad de los resultados. Un ejemplo similar aparece en [21]. Se incrementó de manera intencionada y no regular, el número de lanzamientos, desde 10 hasta un millón.

Cada lanzamiento del dado se modeló como un evento independiente y equiprobable, reflejando las condiciones teóricas de un dado justo. Los eventos a observar son: 1-resultado menor o igual que tres ($c \leq 3$) y 2-resultado igual a una de las caras del dado ($c = c_i$; para $i=1, 2, 3, 4, 5, 6$).

En la tabla 1 se muestran las probabilidades teóricas asociadas a ambos eventos.

Tabla 1. Distribución de probabilidad

Resultado del lanzamiento	Probabilidad	Probabilidad acumulada
1	0,1667	0,167
2	0,1667	0,333
3	0,1667	0,500
4	0,1667	0,667
5	0,1667	0,833
6	0,1667	1,000

De donde se tiene que la probabilidad $P(c \leq 3)=0,5$ y $P(c = c_i) \approx 0,1667$. Los valores simulados se generaron mediante la función aleatorio entre (1;6). En la Fig. 1 se presentan las frecuencias relativas observadas para el evento 1, en cada uno de los i experimentos realizados, con tamaño de muestra n_i [$fr_{ni}(c \leq 3)$].

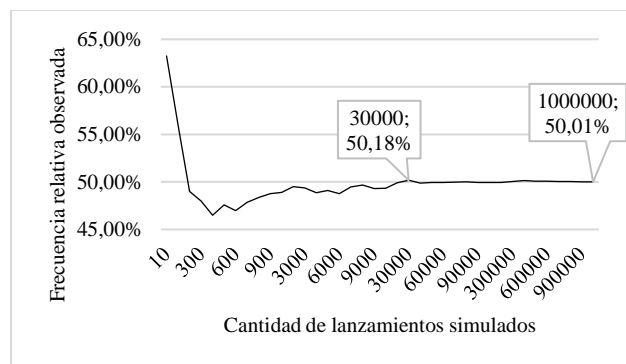


Fig. 1 Frecuencias relativas del evento 1, $c \leq 3$.

Los estudiantes pueden verificar en la Fig. 1, como ocurre la convergencia de la frecuencia relativa observada, hacia la probabilidad teórica $P(c \leq 3) = 0,5$. La regularización de los resultados comienza a partir de los 30000 lanzamientos simulados, en el que la frecuencia relativa presenta un error absoluto (EA) de 0,18%. Al nivel del millón de lanzamientos simulados, el EA se reduce hasta 0,01%, lo cual permite constatar el concepto de regularidad estadística y la Ley de los grandes números de Bernoulli [22].

Los valores de la observación y registro de ocurrencia del evento 2, se pueden observar en la Fig. 2.

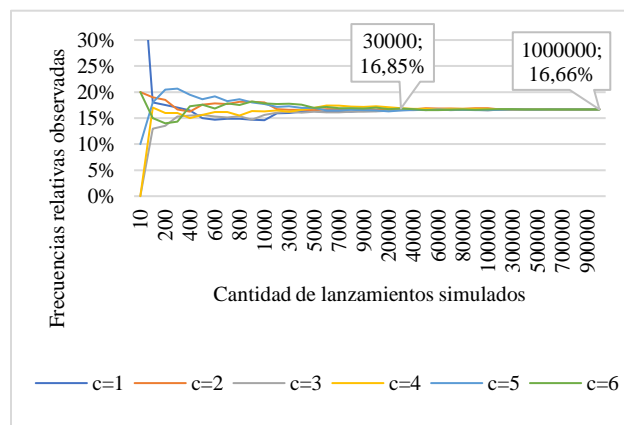


Fig 2. Frecuencias relativas del evento 2, $c = c_i$.

Una vez más se verifican los conceptos estudiados. Los estudiantes pueden notar que, al simular solo 10 lanzamientos del dado, $fr_{10}(c=3) = fr_{10}(c=4) = 0$, mientras que se registró la cara 1 en 3 ocasiones. Las frecuencias tienden a converger hacia las probabilidades teóricas. Nuevamente se alcanza un EA de 0,01% para 1000000 lanzamientos simulados.

Una vez presentado el ejemplo, a los estudiantes se les invita a trabajar en equipos para observar otros eventos, como la salida de un número impar o de un resultado mayor que 2. De la misma forma se les estimula a registrar los valores en diferentes tamaños de muestra para verificar la teoría.

B. Ejemplo 2. Sistema de comunicación digital de modulación por desplazamiento de fase.

El ejemplo 2 fue adaptado a partir de [9], consistente en un sistema de comunicación digital de modulación por desplazamiento de fase (PSK, por sus siglas en inglés), en el

que un dígito binario (bit), que es o un "0" o un "1", se comunica a un receptor enviando ya sea mediante la ecuación (1),
 $s_0(t) = A \cos(2\pi F_0 t + \pi)$, (1)
 para representar un "0" o mediante la ecuación (2),
 $s_1(t) = A \cos(2\pi F_0 t)$, (2)
 para representar un "1".

Donde:

$s_0(t)$ y $s_1(t)$ son las señales moduladas correspondientes a los dígitos "0" y "1", respectivamente.

A es la amplitud de la señal, que debe ser mayor que cero ($A > 0$).

F_0 es la frecuencia de la portadora, que determina la rapidez con la que cambia la señal modulada en el tiempo.

t es el tiempo.

En la Fig. 3 se muestra el esquema del receptor utilizado para decodificar la transmisión, el cual tiene incorporado un filtro paso bajo (FPB).

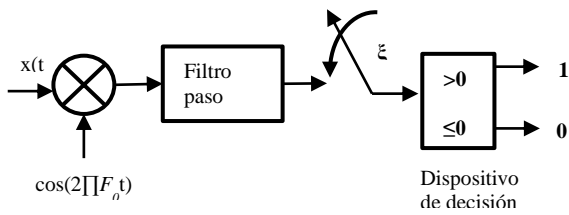


Fig 3. Receptor del sistema de comunicación digital PSK.

La entrada al receptor es la señal corrompida por ruido definida por

$$x(t) = s_i(t) + w(t) \quad (3)$$

Donde:

$x(t)$: Es la señal de entrada al receptor

$s_i(t)$: Es la señal modulada que representa un dígito binario

$w(t)$: representa el ruido del canal.

Si se ignora el efecto del ruido, la salida del multiplicador, para un 0 y un 1 enviado, se calcula respectivamente como

$$s_0(t) \cos(2\pi F_0 t) = -A \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(4\pi F_0 t) \right) \quad (4)$$

$$s_1(t) \cos(2\pi F_0 t) = A \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(4\pi F_0 t) \right) \quad (5)$$

A la salida del FPB, que filtra el componente $\cos(4\pi F_0 t)$ de la señal, se obtiene entonces la ecuación (6).

$$\xi = \begin{cases} -\frac{A}{2} & \text{para } a = 0 \\ \frac{A}{2} & \text{para } a = 1 \end{cases} \quad (6)$$

Donde:

ξ : es la medida de la nueva salida filtrada.

a : es el valor binario enviado

Como se puede interpretar, el receptor decide que se transmitió un 1 si $\xi > 0$ y un 0 si $\xi < 0$. Para modelar el ruido del canal, se asume que el valor real de ξ observado se expresa mediante la ecuación (7).

$$\xi = \begin{cases} -\frac{A}{2} + W & \text{para } a = 0 \\ \frac{A}{2} + W & \text{para } a = 1 \end{cases} \quad (7)$$

Donde W es una variable aleatoria gaussiana, o lo que es lo mismo, que sigue una distribución normal estándar.

Ahora interesa determinar cómo depende el error de la amplitud de la señal A . Considérese el caso de haberse transmitido un 1. Intuitivamente, si A es una amplitud positiva grande, la probabilidad de que el ruido cause un error 0, equivalentemente, $\xi < 0$, debería ser pequeña. Esta probabilidad, llamada la probabilidad de error y denotada por P_e , se calcula

$$P_e = P(A/2 + W < 0) = P(\xi < 0) \quad (8)$$

Mediante simulación Monte Carlo, se simularon 10000 valores de $\xi(A_i)$; para $A_i = 0; 0.1; 0.2 \dots 4.9; 5$. En la Fig. 4, a modo de ilustración, se muestran los primeros 500 valores simulados para $\xi_i(0)$; $\xi_i(3)$ y $\xi_i(5)$.

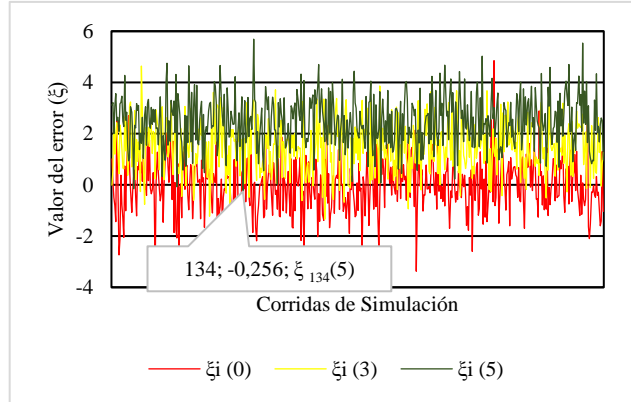
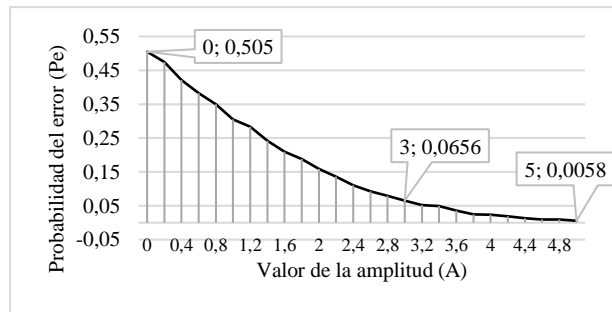


Fig 4. Valores simulados de la salida del PSK.

Como se observa en la Fig. 4, los valores de la serie $\xi_i(0)$, se agrupan a ambos lados del eje de las x , casi simétricamente, por lo que se puede esperar que se observe un valor de $P_e(0)$, cercano al 50%. La serie $\xi_i(3)$, presenta menos valores negativos, con una intercepción de su ecuación de regresión lineal simple de 1,5085, siendo esta una recta casi paralela al eje de las x , por lo que se prevee un valor $P_e(3)$ inferior a 0,5.

Para caso de la serie $\xi_i(5)$, de los 500 valores simulados presentados, solo uno resultó inferior a 0 ($\approx -0,2564$), observado en la corrida 134 de la serie. Conforme a lo esperado, $P_e(5)$ debe arrojar un valor cercano a 0. Con el total de los valores $\xi(A_i)$ simulados y el cálculo de las respectivas $P_e(A_i)$, se traza el gráfico probabilidad del error versus amplitud. Este tipo de gráficos representa la relación entre la probabilidad de error (P_e) y la amplitud de la señal (A) en un sistema de comunicación digital.



La curva que representa cómo varía la probabilidad de error en función de la amplitud de la señal, como se muestra en la Fig. 5.

Fig 5. Gráfico de relación Amplitud/Probabilidad del error

Como se esperaba, la probabilidad de error disminuye a medida que aumenta la amplitud de la señal A. Con esta información, se puede diseñar un sistema, eligiendo A, para satisfacer un requisito dado de probabilidad de error.

El ejemplo se puede utilizar igualmente para repasar algunas propiedades de la distribución normal estándar. Se podía saber a priori que, $P_e(0)$, sería cercano a 0,5, si se tiene en cuenta la simetría de la distribución normal, así como los parámetros estándar. La inexactitud del resultado obtenido se debe a la calidad de la simulación realizada. Al tener una amplitud cero, la señal se reduce al ruido del canal que sabemos es gaussiano. Esto es, $W \sim N(0;1)$, de donde:

$$P_e^*(0) = P(0/2 + W < 0) = P(0 + W < 0) = P(W < 0) = 0,5$$

El histograma de frecuencia muestra una ligera asimetría, debido a los valores generados en la simulación. Se propicia así el análisis de la curtosis y asimetría de la distribución empírica obtenida, al compararla con los valores normales estándar esperados, mediante el análisis visual comparativo que se presenta en la Fig. 6.

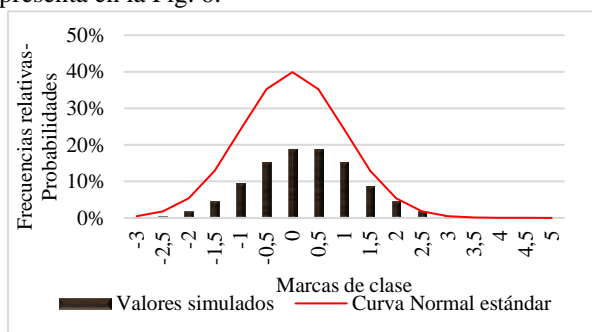


Fig. 6 Histograma de frecuencias relativas y ajuste a la distribución normal estándar para los valores simulados de $\xi_i(0)$

Se realizaron los cálculos de los momentos de distinto orden para los valores simulados de $\xi_i(0)$, representativos de las fluctuaciones y variaciones en el sistema. Utilizando fórmulas especializadas en Excel, se obtuvieron los siguientes resultados, que se presentan en la Tabla 2. Esta tabla detalla la media aritmética, que indica la tendencia central de los datos, la desviación estándar que muestra la dispersión de los valores respecto a la media, la asimetría que revela la simetría o falta de ella en la distribución de los datos, y la curtosis que indica la concentración de valores alrededor de la media y la presencia de colas en la distribución. Estos momentos son fundamentales para comprender la distribución y el comportamiento de los valores simulados.

Tabla 2. Momentos de orden 1-4 para $\xi_i(0)$

Media aritmética	-0,00612
Desviación estándar	1,006225
Asimetría	0,041583
Curtosis	0,015086

Los resultados obtenidos para la variable aleatoria $\xi_i(0)$ indican una notable aproximación a una distribución normal

estándar. La media aritmética próxima a cero, la desviación estándar cercana a 1 y la asimetría y curtosis próximas a cero sugieren que los datos se centran alrededor de la media y exhiben características típicas de una distribución normal. En conjunto, estos momentos estadísticos respaldan la idea de que $\xi_i(0)$ sigue una distribución que se asemeja a la distribución normal estándar en términos de su forma y características fundamentales.

Por otra parte, se puede deducir que $P_e^*(5) = P(5/2 + W < 0) = P(2,5 + W < 0) = P(W < -2,5) \approx 0,00621$.

Sin embargo, en los 10000 valores simulados de la serie $\xi_i(5)$, se obtuvieron solo 58 valores negativos. Por lo que se tiene un error absoluto del 0,041% en la estimación de $P_e(5)$. El histograma de frecuencias absolutas de los valores simulados para $\xi_i(5)$, se muestra en la Fig. 7.

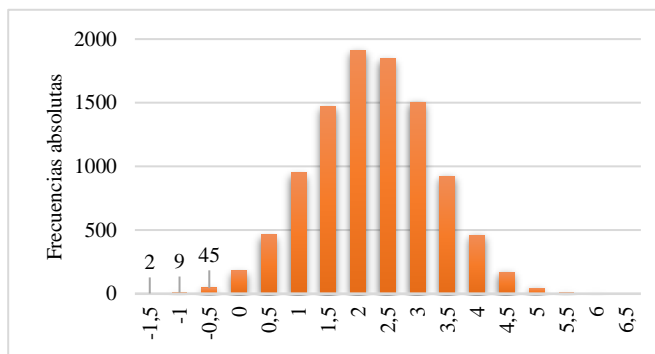


Fig. 7 Histograma de frecuencias absolutas de los valores simulados para $\xi_i(5)$.

Luego de los análisis realizados a partir de las simulaciones obtenidas, los alumnos pudieron replicar los experimentos para distintos valores de amplitud para diversos tamaños de corridas de simulación. Se organizó luego un debate en el que cada uno de los equipos de trabajo pudo exponer e interpretar los resultados.

C. Validación de la metodología

Para medir la pertinencia de la metodología implementada, se realizó el análisis comparativo de los resultados de evaluaciones parciales del tema Probabilidades, entre el grupo de control y el experimental. En la tabla 3 se muestran las medianas de las calificaciones de cada grupo en cada uno de los momentos. Se incluyen además los resultados de las pruebas no paramétricas utilizadas para determinar la significatividad estadística de las posibles diferencias identificadas entre los grupos.

Tabla 3. Comparación de resultados de evaluaciones parciales

Indicadores	Medianas de las calificaciones			
	Grupo de control		Grupo experimental	
	Pretest	Postest	Pretest	Postest
Dominio de conceptos	6	6	5	7
Resolución de problemas	5	6	6	8
Interpretación de resultados	6	6	6	8
Significatividad de la prueba Wilcoxon	0,177		0,002	

En el grupo de control, las medianas de las calificaciones no mostraron una mejoría, mientras en el grupo experimental, se observó una mejora significativa en todas las áreas evaluadas. Los resultados de la prueba de Wilcoxon permitieron constatar que las diferencias en las medianas de las calificaciones entre el pretest y el postest son estadísticamente significativas en el grupo experimental, mientras que en el grupo de control no se encontraron diferencias significativas. Esto sugiere que la metodología implementada en el grupo experimental tuvo un impacto positivo y significativo en el aprendizaje de Probabilidades en comparación con el grupo de control.

Se aplicó además una encuesta a los estudiantes del grupo experimental, al final del período planificado. El instrumento se diseñó para evaluar la percepción de los estudiantes respecto al impacto de las simulaciones en diversos aspectos relacionados con la comprensión y aplicación de conceptos probabilísticos en estudiantes de Ingeniería en Sistemas Inteligentes. Igualmente, se pretendió obtener percepciones sobre su impacto en la motivación para estudiar esta área, así como en el desarrollo de habilidades prácticas y de pensamiento crítico aplicables a la carrera. Las preguntas fueron redactadas como afirmaciones positivas para medir el grado de concordancia de los estudiantes con cada una de las variables evaluadas. Se utilizó una escala Likert de 5 categorías (1-Completamente en desacuerdo a 5-completamente de acuerdo). En la figura 8 se presentan los resultados modales y sus frecuencias observadas.

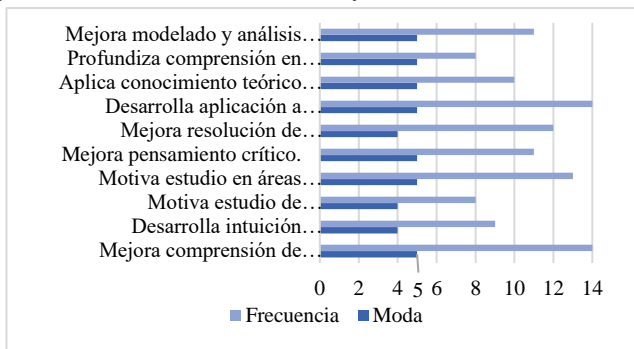


Fig. 8 Resultados de la encuesta aplicada a estudiantes.

Los resultados más significativos de la encuesta muestran una clara tendencia hacia la valoración positiva de las simulaciones en el aprendizaje de probabilidad para estudiantes de ingeniería en sistemas inteligentes. Las preguntas con la modalidad más alta (5) y mayor frecuencia destacan aspectos clave. La afirmación "Las simulaciones mejoraron mi comprensión de conceptos probabilísticos abstractos" recibió la mayor frecuencia (14), sugiriendo una mejora sustancial en la comprensión de conceptos más complejos. Además, la pregunta sobre cómo las simulaciones motivaron el estudio de áreas específicas en la carrera y el análisis probabilístico también obtuvo una frecuencia alta (13), indicando un impacto positivo en la orientación de los estudiantes hacia aplicaciones específicas en ingeniería de sistemas inteligentes. Estos hallazgos respaldan la eficacia de las simulaciones para mejorar

la comprensión y la motivación en un contexto técnico y especializado.

La coincidencia de los resultados obtenidos con investigaciones similares refuerza la validez y la aplicabilidad de la estrategia pedagógica basada en simulaciones para la enseñanza de probabilidades en el contexto de la Ingeniería en sistemas inteligentes. Investigaciones previas en el ámbito de la educación superior han destacado consistentemente el impacto positivo de las simulaciones en la comprensión conceptual y la motivación del estudiante por el estudio de las probabilidades [15], [17], [20].

Estos hallazgos respaldan la teoría consultada, que sugiere que la incorporación de herramientas prácticas, como las simulaciones, puede mejorar significativamente la enseñanza y el aprendizaje de conceptos abstractos [9], [14], [16]. La convergencia de estos resultados con la literatura existente fortalece la base teórica y práctica de la estrategia educativa, proporcionando un respaldo sólido a la eficacia de las simulaciones en la mejora de la comprensión y la motivación de los estudiantes en el campo específico de la probabilidad en ingeniería de sistemas inteligentes.

IV. CONCLUSIONES

Los estudiantes de ingeniería a menudo enfrentan desafíos al aprender conceptos probabilísticos debido a su abstracción y complejidad. La simulación, al permitir la manipulación de parámetros y la observación de resultados en tiempo real, facilita la internalización de conceptos de la teoría de probabilidad y mejora la comprensión de su aplicabilidad en el contexto específico de estas carreras.

Con la ayuda de la investigación realizada se encontró que la simulación Monte Carlo constituye una herramienta valiosa para mejorar la comprensión de conceptos como la convergencia de probabilidades, la ley de los grandes números o el análisis intuitivo de la normalidad, al permitir la observación directa del efecto de incrementar el número de repeticiones en la estabilidad de los resultados.

La aplicación de las pruebas de validación, permitieron constatar que la estrategia aplicada contribuyó significativamente al aprendizaje y aplicación de la probabilidad en un contexto más amplio y específico de la Ingeniería en sistemas inteligentes y cómo estos elementos pueden influir positivamente en la percepción y experiencia de los estudiantes en relación con esta disciplina.

REFERENCES

- [1] B. Luther, I. Gunawan, and N. C. Nguyen, "Identifying effective risk management frameworks for complex socio-technical systems", *Safety Science*, vol. 158, February 2023.
- [2] F. J. Gutiérrez Ortiz, J. J. Fitzpatrick, y E. P. Byrne, "Development of contemporary engineering graduate attributes through open-ended problems and activities", *European Journal of Engineering Education*, vol. 46, no. 3, pp. 441-456, August 2021.
- [3] M. El-Dawoody and M. S. Eliwa, "Bivariate Discrete Burr Lifetime Distribution: A Mathematical and Statistical Framework for Modeling Medical and Engineering Data," *Information Sciences Letters*, vol. 12, no. 11, pp. 3199-3214, November 2023.

- [4] E. Gaidukova, V. Khaustov, N. Victorova, M. Dregval, and E. V. Davydenko, "Ensuring sustainability of modeling and forecasting of long-term river runoff by partial infinite hydrology methods", *International Multidisciplinary Scientific GeoConference SGEM*, Sofia, Tomo. 20, no. 3.1, pp. 99-106, September 2020.
- [5] R. Alizadehsani, M. Roshanzamir, S. Hussain, A. Khosravi, A. Koohestani, M. H. Zangooei, et al., "Handling of uncertainty in medical data using machine learning and probability theory techniques: A review of 30 years (1991–2020)", *Annals of Operations Research*, pp. 1-42, March 2021.
- [6] M. Stocchero, "PLS for designed experiments", *Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems*, vol. 240, September 2023.
- [7] D. Dellermann, P. Ebel, M. Söllner and J. M. Leimeister, "Hybrid intelligence", *Business & Information Systems Engineering*, 61, pp. 637-643, March 2019.
- [8] A. Patil and T. Tsuruo, "Upper and lower bounds for End-to-End risks in stochastic robot navigation", *IFAC-PapersOnLine*, vol. 56, no. 2, pp. 5603–5608, January 2023.
- [9] S. Kay, *Intuitive probability and random processes using MATLABVR*, Springer Science & Business Media, 2006.
- [10] Z. El M'hamedi, "Impact du langage probabiliste sur l'usage des tests de décision", *Éducation & didactique*, Vol. 18, no 2, pp. 143-174, 2023.
- [11] M. E. Barrera, H. G. Pulido, and V. V. Alejo, "Model-electing activity with civil engineering students to solve a problem involving binomial distribution", *Statistics Education Research Journal*, vol. 22, no. 3, p. 3, November 2023.
- [12] C. Batanero, "Understanding randomness: challenges for research and teaching", *CERME 9 - Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, Charles University in Prague, Faculty of Education, Prague, Czech Republic, pp. 34-49, February 2015.
- [13] M. Kaplar, Z. Lužanin, and S. Verbić, "Evidence of probability misconception in engineering students—why even an inaccurate explanation is better than no explanation," *International Journal of STEM Education*, vol. 8, no. 1, Mar. 2021.
- [14] C. Medina, "Diseño de secuencia para lo obtención de sumas de cuadrados con el uso de Excel para la enseñanza de ANOVA de tres factores en Ingeniería Industrial del Instituto Tecnológico de Zitácuaro", en *Actualidad en educación estadística y probabilística*, J. Zacarias et al., Eds. Puebla: Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 2019, p. 133-152.
- [15] W. Sheikh, "An intuitive, application-based, simulation-driven approach to teaching probability and random processes", *The International Journal of Electrical Engineering & Education*, pp. 1-41, August 2019.
- [16] T. M. Reshid, "Monte Carlo Simulation and Derivation of Chi-Square Statistics," *American Journal of Theoretical and Applied Statistics*, vol. 12, no. 3, pp. 51-65, May 2023.
- [17] M. C. Kanobel, M. D. Chan, y A. S. Arce, "Sesgos en la comprensión del concepto de probabilidad condicional: una propuesta didáctica mediada por TIC para construir aprendizajes verdaderos", en *Actualidad en educación estadística y probabilística*, J. Zacarias et al., Eds. Puebla: Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 2019, p.167-179.
- [18] A. Ramírez, L. Zúñiga, y E. Ojeda, "A study on mathematics students' probabilistic intuition for decision-making in high school," *International Electronic Journal of Mathematics Education*, vol. 18, no 4, 2023.
- [19] T. Kopyaran, "How does simulation contribute to prospective mathematics teachers' learning experiences and results?", *Education Sciences*, vol. 12, no. 9, p. 1-19, September 2022.
- [20] R. D. Santiago-Acosta, E. M. Hernández-Cooper, y F. Yescas-Martínez, "Interactive Simulations of Statistics with Excel", en *Proceedings of the International Conference on Education*, vol. 7, no. 1, pp. 396-402, October 2021.
- [21] G. M. Verschuuren, *100 Excel Simulations*. Merritt Island: Holy Macro! Books, 2017.
- [22] Gao, Q. & Wang, X. Statistical Learning. In Hoang Pham (Ed.), *Springer Handbook of Engineering Statistics* (2nd ed., pp. 901-919). Springer, 2023.