ISBN: 978-628-95207-4-3. ISSN: 2414-6390. Digital Object Identifier: https://dx.doi.org/10.18687/LACCEI2023.1.1.1079

# Applications of simplicial complexes in the calculation of the homotopy group of the sphere and in systems engineering

***Abstract*-In this article it is demonstrated, using the Theory of Simplicial Complexes, that the Fundamental Group of the sphere is isomorphic to $\mathbb{Z}$ and some applications in Systems Engineering are detailed.**

***Keywords: Simplex, simplicial complexes, simplicial approximation, fundamental group of the sphere, applications of simplicial complexes in engineering.***

# Aplicaciones de los complejos simpliciales en el cálculo del grupo de homotopía de la esfera y en la ingeniería de sistemas

Ruben Dario Mendoza Arenas[1], Marisol Paola Delgado Baltazar[2], José Antonio Farfán Aguilar[3], Erika Juana Zevallos Vera[4], Genaro Christian Pesantes Arriola[5], Herbert Junior Grados Espinoza[6], Hilario Aradiel Castañeda[7]

[1,3]Universidad Nacional del Callao, Perú, rdmendozaa@unac.edu.pe, jafarfana@unac.edu.pe
[2,5]Universidad Nacional del Callao, Perú, mpdelgadob@unac.edu.pe, gcpesantesa@unac.edu.pe
[4,6]Universidad Nacional del Callao, Perú, ejzevallosv@unac.edu.pe, hjgradose@unac.edu.pe
[7]Universidad Nacional del Callao, Perú, haradielc@unac.edu.pe

***Resumen*-En este artículo se demuestra, usando Teoría de Complejos Simpliciales, que el Grupo fundamental de la esfera es isomorfo a $\mathbb{Z}$ y se detallan algunas aplicaciones en la Ingeniería de Sistemas.**

***Palabras claves: Simplex, Complejos simpliciales, aproximación simplicial, Grupo fundamental de la esfera, aplicaciones de los complejos simpliciales en la ingeniería.***

***Abstract*-In this article it is demonstrated, using the Theory of Simplicial Complexes, that the Fundamental Group of the sphere is isomorphic to $\mathbb{Z}$ and some applications in Systems Engineering are detailed.**

***Keywords: Simplex, simplicial complexes, simplicial approximation, fundamental group of the sphere, applications of simplicial complexes in engineering.***

## 1. INTRODUCCIÓN

En este artículo vamos a realizar una demostración de que existe un isomorfismo entre el grupo de homotopía de la esfera y el conjunto de los números enteros, dando una forma alternativa de prueba, usando la teoría de complejos simpliciales, algunos resultados se pueden ver en [2, 6, 8].

El grupo fundamental fue introducido por el gran matemático francés Henri Poincaré en 1895, ver [3]. La noción de dos espacios que son del mismo tipo de homotopia, fue introducida por Witold Hurewicz en una serie de cuatro artículos en 1935-36, aparecidos en los Proceedings of the Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschapen. En estos artículos Hurewicz introdujo también los grupos de homotopia, análogos en dimensión superior al grupo fundamental. Estas ideas de Hurewicz han jugado un papel esencial en la topología algebraica desde 1935, en particular el cálculo del grupo de homotopía usando elevación de caminos.

**Digital Object Identifier:** (only for full papers, inserted by LACCEI).
**ISSN, ISBN:** (to be inserted by LACCEI).
**DO NOT REMOVE**

Henri Poincaré, introduce también la subdivisión baricéntrica sobre poliedros obteniendo resultados innovadores en la topología algebraica.

Por otro lado la noción de aplicación simplicial entre poliedros fue introducida por L.E.J. Brouwer (1881-1967) obteniéndose inclusive la subdivisión baricéntrica relativa a un subcomplejo simplicial, ver [5].

Se puede ver también que los complejos simpliciales tienen aplicaciones en la Ingeniería de Sistemas, Ingeniería de Software y en otras disciplinas, ver [1, 4, 7].

## 2. TEORÍA DE COMPLEJOS SIMPLICIALES

### 2.1. Simplex

Un conjunto $\{a^0, \ldots, a^n\}$ de $(n+1)$ puntos de $\mathbb{R}^n$ es llamado *geométricamente independiente* si los vectores $a^1 - a^0$, $a^2 - a^0$, …, $a^n - a^0$ son linealmente independientes.

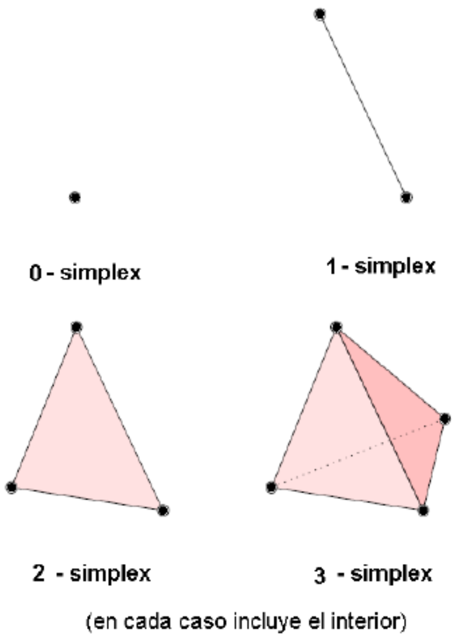
Dado un conjunto $\{a^0, \ldots, a^n\}$ geométricamente independiente, llamaremos *n-simplejo geométrico* al conjunto

$$\sigma^n = \left\{ x = \sum_{i=0}^{n} t_i a^i : t_i \geq 0 \ \wedge \ \sum_{i=0}^{n} t_i = 1 \right\}$$

considerando con la topología relativa usual de $\mathbb{R}^n$. Los $a^i$ son llamados los *vértices* de $\sigma^n$, los números $t_i$ son llamados *coordenadas baricéntricas* de $x$ con respecto a los vértices $a^i$. El entero no negativo $n$ es llamado la *dimensión de* $\sigma$. Escribiremos abreviadamente

$$\sigma = a^0 a^1 \ldots a^n$$

**Ejemplos:**




## 2.2. Complejo Simplicial

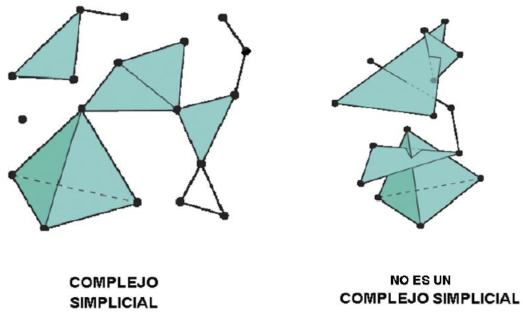
Dado un subconjunto $\{a^{i_0}, a^{i_1}, \ldots, a^{i_r}\}$ de $\{a^0, \ldots, a^n\}$ con $0 \leq i_0 < i_1 < \ldots < i_r \leq n$, el conjunto

$$\tau^r := \left\{ x = \sum_{j=0}^{r} t_j a^{i_j} : t_j \geq 0 \text{ y } \sum_{i=0}^{r} t_i = 1 \right\}$$

es llamada una *cara* de $\sigma^n$. Una *cara propia* es una cara de $\sigma$ distinta de $\sigma$.

Un *complejo simplicial* es una colección de símplices que comparten a lo más una cara pero no su interior.

**Ejemplo:**




## 2.3. El poliedro de un complejo simplicial

Sea $K$ un complejo simplicial, considere

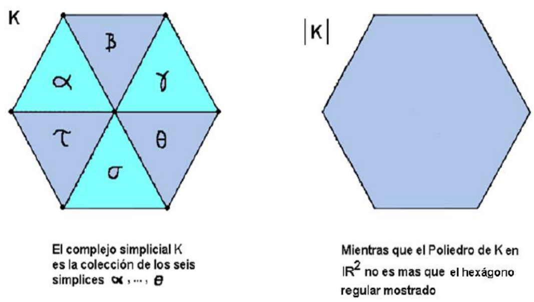
$$|K| = \bigcup_{\sigma \in K} \sigma$$

la unión de todos los simplejos de $K$.

Definamos $|K|$ una topología como sigue: Un subconjunto $A$ de $|K|$ será cerrado en $|K|$ si y sólo si $A \cap \sigma$ es cerrado en $\sigma$, para cada simplejo $\sigma \in K$.

El conjunto $|K|$ provisto de esta topología será llamado el *poliedro* de $K$.

**Ejemplo:**




## 2.4. Aplicación Simplicial

**Definición 2.1.** Dados dos complejos simpliciales $K$ y $L$, una aplicación $f : |K| \to |L|$ será llamada una *aplicación simplicial* si:

(1) Si $a$ es un vértice de $K$, entonces, $f(a)$ es un vértice de $L$.

(2) Si $a^0a^1\dots a^n$ es un simplex de $K$, entonces, $f(a^0), f(a^1), \dots, f(a^n)$ generan un simplex de $L$ (note que los $f(a^i)$ pueden no ser todos distintos).

(3) Si $x = \sum_{i=0}^{n} t_i a^i$ es un punto en un simplex $a^0a^1\dots a^n$ de $K$, entonces,

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} t_i f(a^i)$$

Esto es, $f$ es *lineal* sobre cada simplex.

**Observación:** Toda aplicación simplicial es continua.

### 2.5. Aproximación simplicial

**Definición 2.2.** Sean $K$ y $L$ dos complejos simpliciales y sea $f : |K| \to |L|$ una aplicación continua. Una aplicación simplicial $g : |K| \to |L|$ es llamada una *aproximación simplicial* de $f$, si para cada vértice $v$ de $K$

$$f(St(v, K)) \subseteq St(g(v), L)$$

**Observación:** La composición de aproximaciones simpliciales es una aproximación simplicial.

Un resultado clave de nuestro trabajo es el siguiente:

**Proposición 2.1.** *Sean $K$, $L$ dos complejos simpliciales y $f : |K| \to |L|$ una aplicación continua. Cualquier aproximación simplicial $g$ de $f$ es homotópica a $f$ relativo al subespacio de $|K|$ de aquellos puntos $x$ para los cuales $f(x) = g(x)$.*

Este resultado nos permitirá al trabajar con clases de Homotopía elegir un representante simplicial de cada clase, lo que nos será de gran utilidad en las aplicaciones.

### 2.6. Subdivisión baricéntrica

**Definición 2.3.** Sea $\sigma = v^0v^1\dots v^n$ un $n$-simplex. El *baricentro* de $\sigma$ se define como el punto

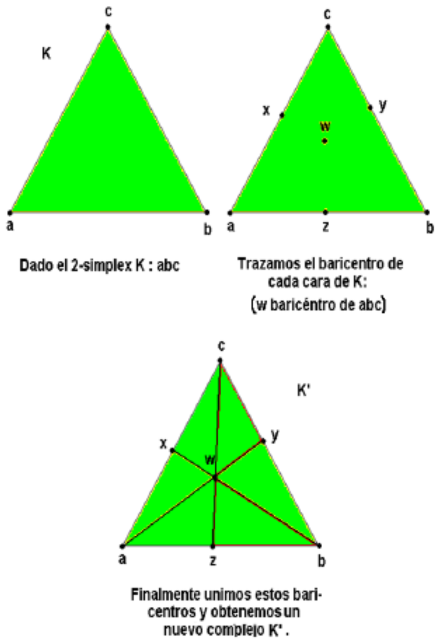
$$\tilde{\sigma} = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{n+1} v^i$$

que es el único punto en In$\sigma$ cuyas coordenadas son todas iguales.

Si $\sigma$ es un 1-simplex, entonces $\widehat{\sigma}$ es el punto medio. Si $\sigma$ es un 0-simplex, entonces $\widehat{\sigma} = \sigma$. En general, $\widehat{\sigma}$ es el centroide de $\sigma$.

**Definición 2.4.** Una *subdivisión baricéntrica* es un proceso de refinamiento por el cual a partir de un complejo simplicial $K$ obtenemos un nuevo complejo simplicial $K'$ con más simplices, pero de tal manera que $|K'|$ sea igual a $K$.

**Ejemplo:**




Note que una subdivisión baricéntrica preserva la dimensión, esto es, dim$K$ = dim$K'$. Denotamos la subdivisión baricéntrica de $K$ como $sd(K)$.

El proceso de subdivisión baricéntrica puede ser iterada

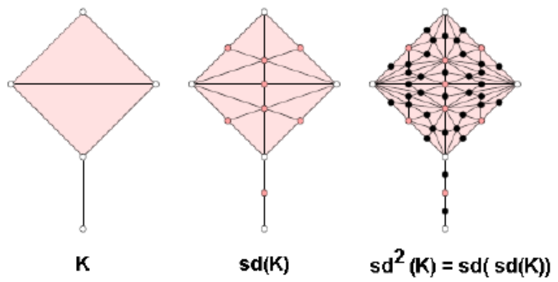
$$sd^{n+1}(K) = sd(sd^n(K))$$

Obteniendo una familia de complejos simpliciales, todos con el mismo poliedro y la misma dimensión. Claramente, al menos en el caso finito, en cada iteración los símplices son cada vez más pequeños. Enunciamos esto como un Teorema:

**Teorema 2.2.** *Dado un complejo simplicial finito $K$ y un $\epsilon > 0$ cualquiera, entonces, existe un entero positivo $N$ tal que cada simplejo en $sd^N K$ tiene diámetro menor que $\epsilon$.*

**Teorema 2.3** (**Aproximación Simplicial Relativa**)**.** *Sean $K$, $L$ complejos simpliciales y $A$ un subcomplejo de $K$. Sea $|K|$ compacto y supongamos que solo existe un número finito de simplejos en $K \setminus A$. Sea $f : |K| \to |L|$ una aplicación continua tal que $f|_{|A|}$ es simplicial. Entonces existe $N$ tal que la composición $f$ tiene una aproximación simplicial $g : sd^N(K, A) \to L$ tal que $g|_{|A|} = f|_{|A|}$ y $g$ es homotópica a $f$ relativa a $|A|$.*

**Ejemplo de iteración** $sd^2(K)$:

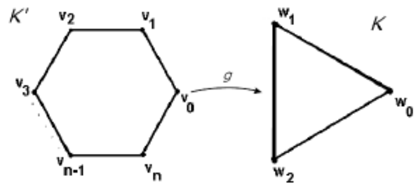



3. CÁLCULO DEL GRUPO DE HOMOTOPÍA DE LA ESFERA

**Teorema 3.1.** $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$.

***Demostración.*** Sea $f : S^1 \to S^1$ una aplicación continua y puntuada cualquiera. Sea $K$ un complejo simplicial tal que $|K| \simeq S^1$. Esto se justifica escogiendo $K$ como el borde de un 2-simplejo. Así, $K$ es un complejo finito con $|K|$ compacto. Desde que $|K|$ y $f$ verifican las hipótesis del teorema de aproximación simplicial relativa, con $A = \{\text{punto base de } S^1\}$, se sigue que existe una subdivisión $K'$ de $K$ y una aplicación simplicial $g : |K'| = |K| \simeq S^1 \to |K| \simeq S^1$ tal que $g$ es homotópica a $f$ relativa al punto base.

Suponga que $K'$ tiene vértices $v_0, v_1, \dots, v_n$ y $K$ tiene vértices $w_0, w_1, w_2$ y los colocamos en sentido antihorario, como en la siguiente figura




Sea

$$g_i = g|_{[v_i, v_{i+1}]}, \quad i = 0, \dots, n$$

donde $w_{n+1} = v_0$. Entonces, claramente

$$[g] = [g_0] \bullet \dots \bullet [g_i] \bullet [g_{i+1}] \bullet \dots \bullet [g_n]. \qquad (1)$$

Ya que $g$ es simplicial lleva los vértice de $K'$ en los vértices de $K$, así cada $g(v_i)$ es algún $w_j$. Además $g(v_0) = w_0$, por ser relativa al punto base.

Cada terna

$$g_i * g_{i+1} * g_{i+2}$$

resulta homotópica al camino

$$w_{\pm 1}(s) = (\cos 2\pi(\pm 1)s, \operatorname{sen} 2\pi(\pm 1)s)$$

que es el lazo que da una vuelta a $S^1$ en sentido antihorario u horario, según sea el signo positivo o negativo.

Se muestra que (1) contiene exactamente un número entero de ternas

$$g_i * g_{i+1} * g_{i+2}$$

esto es, se tienen $q$ ternas como sigue

$$\begin{aligned}[g] =& [g_0 * g_1 * g_2] \bullet \dots \bullet [g_i * g_{i+1} * g_{i+2}] \bullet \dots \\ & \dots \bullet [g_{n-2} * g_{n-1} * g_n]\end{aligned}$$

Así $g$ es homotópica al camino

$$w_q(s) = (\cos 2\pi q s, \operatorname{sen} 2\pi q s)$$

que es lazo que da $q$ vueltas a $S^1$ en sentido antihorario u horario según sea $q$ un entero positivo o negativo.

$$g \sim w_q$$

Esto nos permite definir la aplicación

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{Z}, +) & \to & (\pi_1(S^1), \bullet) \\ q & \mapsto & [w_q] \end{array}$$

que resulta ser un isomorfismo de grupos.

Por lo tanto concluimos que

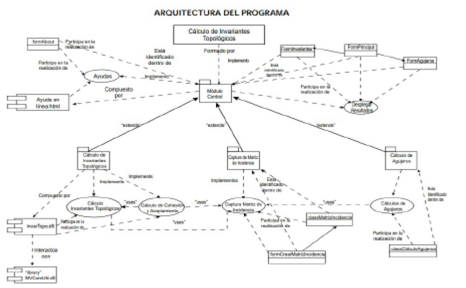
$$\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}.$$

$\blacksquare$

## 4. APLICACIONES DE LOS COMPLEJOS SIMPLICIALES EN LA INGENIERÍA DE SISTEMAS

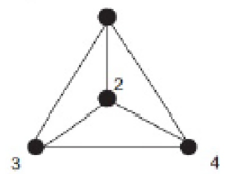
Los complejos simpliciales con otros entes matemáticos, contirbuyen en el proceso de desarrollo de una herramienta de software diseñada con el propósito de realizar los cálculos necesarios para obtener cuatro invariantes topológicos, que son los números de Betti, la dimensión del complejo simplicial, el vector estructura, y la característica Euler-Poincaré.

Los resultados de estos cálculos se interpretan como el planteamiento de una definición formal de cohesión y acoplamiento en ingeniería de software, criterios importantes para evaluar la modularidad de un diseño.

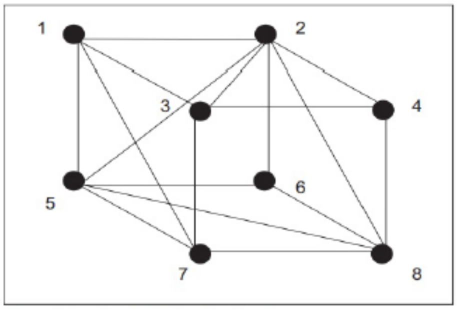



Los complejos simpliciales se suelen representar por medio de una matriz de incidencia (MI), muy conveniente para cálculos computacionales, cuyas columnas son etiquetadas por sus vértices, y las filas son etiquetadas por los símplices. A continuación se muestran los complejos simpliciales con sus respectivas MI. La siguiente figura muestra un tetraedro sólido como un símplex de dimensión tres. Para la mayoría de los casos, se puede tomar al tetraedro como el elemento distinguido de los volúmenes.

| MI | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| Tetraedro | 1 | 1 | 1 | 1 |




A continuación la figura con su respectiva tabla muestran la malla de la superficie de un cubo representado a partir de triángulos representados como símplices de dimensión 2. Esta sería la representación mediante su matriz de incidencia.




| MI | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| T1 | 1 | 1 | 1 | | | | | |
| T2 | | 1 | 1 | 1 | | | | |
| T3 | | 1 | | 1 | | | | 1 |
| T4 | | 1 | | | | 1 | | 1 |
| T5 | | | | | 1 | 1 | | 1 |
| T6 | | | | | 1 | | 1 | 1 |
| T7 | 1 | | | | 1 | | 1 | |
| T8 | 1 | | 1 | | | | 1 | |
| T9 | 1 | 1 | | | 1 | | | |
| T10 | | 1 | | | 1 | 1 | | |
| T11 | | | 1 | 1 | | | 1 | |
| T12 | | | | 1 | | | 1 | 1 |

## 5. CONCLUSIONES

Con las herramientas matemáticas de Topología Combinatoria en complejos simpliciales llegamos a demostrar el isomorfismo de grupos entre el primer grupo de homotopía de la esfera y los enteros.

Los complejos simpliciales son una herramienta matemática muy usada en la Ingeniería de sistemas, de Software y algunos cálculos computacionales de mallas en particular, donde se usa la matriz de incidencia de un complejo simplicial.

## REFERENCIAS

[1] A. Watt and F. Policarpio, *3D Games: Real Time Rendering and Sofware Technology*, vol. 1, Addison Wesley, 2001.

[2] T. Golberg, “Combinatorial Laplacians of simplicial complexes”, Senior Thesis, Bard College, 2002.

[3] H. Poincaré, “Analysis Situs”, *J. Ecole Polytechnique*, pp 1-121.

[4] D. Hernández and D. Sánchez, “Centrality measures in simplicial complexes: Aplications of topological data analysis to network science”, *Applied Mathematics and Computation*, vol. 382, pp. 1-21, 2020.

[5] J. May, *Simplicial objects in algebraic topology*, Van Nostrand Company Inc., 1967.

[6] M. Henle, “A Combinatorial Introduction To Topology”, *Dover Publications*, 1994.

[7] L. Múnera, “Una aproximación topológica al diseño modular en Ingeniería de software”, *S& T. Revista de la Facultad de Ingeniería. Universidad Icesi*, No. 2, pp. 57-73, 2003.

[8] J. Munkres, *Elements of Algebraic Topology*, Addison Wesley, 1984.