

---

# Comparación de la solución de la ecuación de la dinámica poblacional con Retardo, que describe la evolución demográfica del Ecuador considerando el efecto del Covid-19 y la formación de Nuevas familias milenials, en el Periodo de 1990 al 2020, por los métodos de series de potencias modificados y el método de la descomposición en series de Taylor, para obtener la mejor función predictora de la población en Ecuador.

Comparison of the solution of the retarded population dynamics equation, which describes the demographic evolution of Ecuador considering the effect of Covid-19 and the formation of new millennial families, in the Period from 1990 to 2020, using the Modified powers series method and the Taylor series decomposition method, to obtain the best predictive function of Ecuador's populations

Carlos Julio Mayorga M.Sc.<sup>1,\*</sup> Antonio Sirvent<sup>2</sup> and Gabriela Leal<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Departamento de Ciencias Químicas, Universidad Central del Ecuador

<sup>2</sup> Departamento de Matemática Aplicada, Universidad de Alicante, España.

\*cjmayorga@uce.edu.ec

## ABSTRACT

*The effect caused by the Covid 19 pandemic on the population dynamics in the world and particularly in Ecuador, as well as the formation of new millennial families and how this changes fertility and birth rates, has caused a delay in demographic evolution. The objective of this research is to solve the retarded equation of population dynamics for the particular case of Ecuador between the years 1990 and 2020 using non-standard numerical methods and compare it with solutions by other more traditional methods to obtain a model that manages to predict the population of Ecuador for the years of 2021 onwards, for this the theory of the population dynamics theory with delay was described, and with this the retarded equation of the population dynamics for Ecuador between the years 1990 and 2020 was solved by the methods Taylor series for a shifted variable and the modified power series method, both methods were compared and the population of Ecuador was predicted for the years 2021 onwards, and the demographic variables  $K$  and  $\tau$  were reported. , the latter being the variable that causes the delay caused by the effects of the Covid 19 pandemic and the formation of new millennial families.*

**Keywords:** Retarded population dynamics Ecuador, Non-standard numerical method, modified power series, Taylor series for a retarded variable

Digital Object Identifier: (only for full papers, inserted by LACCEI).  
ISSN, ISBN: (to be inserted by LACCEI).  
DO NOT REMOVE

## 1. INTRODUCCIÓN

La evolución demográfica en el mundo y particularmente en Ecuador ha sido perturbada por los efectos de la pandemia de Covid 19, provocando un retardo  $\tau$  en la cantidad de individuos que presenta el Ecuador por año, otro fenómeno que contribuye a este retardo es la formación de nuevas familias milenials y como esto cambia las tasas de fecundidad y nacimiento. Cuando existen retardos de este tipo la evolución demográfica se describe usando la dinámica poblacional con retardo, en este trabajo se resolverá este problema usando métodos numéricos no estándares, teniendo en cuenta la teoría de [1] y [2], usando en particular el método de series de potencias modificados y el método de Taylor para una serie con variable retardada, para describir la evolución poblacional del Ecuador entre los años 1990 al 2020 y poder predecir la población futura.

## 2. ECUACIÓN DE LA DINÁMICA POBLACIONAL CON RETARDO

La demografía es una ciencia que estudia estadísticamente las poblaciones humanas; su dimensión, estructura, evolución y características generales, así como los procesos concretos que determinan su formación, conservación y desaparición. Tales procesos son los de fecundidad, mortalidad y migración: emigración e inmigración. La variedad de combinaciones de estos fenómenos, interdependientes entre sí, supone la velocidad de las modificaciones de la población, tanto en sus dimensiones numéricas como en su estructura poblacional.

Demografía dinámica: Es la parte de la demografía que estudia las poblaciones humanas desde el punto de vista de la evolución en el transcurso del tiempo y los mecanismos por los que se modifica la dimensión, estructura y distribución geográfica de las poblaciones. Ejemplos de tales mecanismos son la natalidad, la mortalidad, la familia, la fecundidad, el sexo, la edad, la educación, el divorcio, el envejecimiento, la migración, el trabajo, la emigración y la inmigración. Su expresión son las tablas demográficas, que son los datos estadísticos numéricos y gráficos. Los administradores utilizan el censo total (real (cada diez años) o muestreos (estimados) mensuales o anuales). Tienen que estar diseñados de forma que no solo se puedan establecer estadísticas descriptivas, sino que también puedan realizarse análisis demográficos cruzados. Un ejemplo son: los sueldos anuales y las edades o la distribución por sueldos, por clases sociales, en la nación y en una comunidad, por viviendas y familias, etc. Tópicos generales o variables básicas son la riqueza, el poder y la movilidad social.

Según el modelo de la transición demográfica los cambios en una población tienen tres componentes: nacimientos, muertes y migración.

### 2.1 Ecuación de la dinámica poblacional con retardo

Los ecólogos de poblaciones usan varios métodos matemáticos para modelar la dinámica de poblaciones (los cambios en el tamaño y la composición de las poblaciones a lo largo del tiempo). Algunos de estos modelos representan el crecimiento sin restricciones ambientales, mientras que otros incluyen "topes" determinados por los recursos limitados. Los modelos matemáticos de las poblaciones pueden utilizarse para describir con precisión los cambios en una población y, aún más importante, predecir los cambios futuros.

Modelado de tasas de crecimiento El modelo más simple de la dinámica poblacional viene dado por:

$$\frac{dN}{dt} = rN$$

En esta ecuación,  $\frac{dN}{dt}$  es la tasa de crecimiento de la población en un momento determinado,  $N$ , es el tamaño de la población,  $t$  es el tiempo, y  $r$  la tasa de aumento per cápita, qué tan rápido crece la población por cada individuo que existe dentro de la misma.

Si se tiene en cuenta que no hay un movimiento de individuos hacia adentro o hacia afuera de la población, entonces  $r$  es solo una función de las tasas de nacimiento y mortalidad. La ecuación anterior es muy general y se pueden hacer formas más específicas de ella para describir dos tipos diferentes de modelos de crecimiento: exponencial y logístico. Cuando la tasa de aumento per cápita  $r$  toma el mismo valor positivo sin importar el tamaño de la población, entonces tenemos un crecimiento exponencial. Cuando la tasa de aumento per cápita  $r$  disminuye a medida que la población alcanza su límite máximo, entonces tenemos un crecimiento logístico.

Crecimiento logístico: El crecimiento exponencial no es una situación muy sostenible, ya que depende de cantidades infinitas de recursos (las cuales no suelen existir en el mundo real). El crecimiento exponencial puede ocurrir durante un tiempo, si hay pocos individuos y muchos recursos, pero cuando el número de individuos es lo suficientemente grande, los recursos empiezan a agotarse, lo que desacelera la tasa de crecimiento. Finalmente, el tamaño de la población se nivelará, o se estabilizará, lo que produce una gráfica con forma de S. El tamaño de la población en el que el crecimiento poblacional se nivela representa el tamaño poblacional máximo que puede soportar un medio

ambiente en particular y se conoce como capacidad de carga o  $K$ .

Se puede modelar matemáticamente el crecimiento logístico al modificar la ecuación del crecimiento exponencial usando una  $r$  (tasa de crecimiento per cápita) dependiente del tamaño poblacional  $N(t)$  y de su cercanía a la capacidad de carga  $K$ . Si se supone que la población tiene una tasa de crecimiento base de  $r_{\max}$  cuando es muy pequeña, se obtiene la siguiente ecuación:

$$\frac{dN}{dT} = r_{\max} \frac{(K - N)}{K} N$$

En cualquier momento dado durante el crecimiento de la población, la expresión  $K - N$  nos dice cuántos individuos más pueden sumarse a la población antes de que esta alcance la capacidad de carga. Así,  $(K - N)/K$  es la fracción de la capacidad de carga que no "se ha agotado" todavía. Mientras más se haya agotado la capacidad de carga, mayor será la reducción que el término  $(K - N)/K$  tenga sobre la tasa de crecimiento. La ecuación de crecimiento poblacional logística se aplica en el trabajo [3] donde se estudia la relación entre la evolución poblacional y cultural.

Cuando la población es pequeña,  $N$  es muy pequeña en comparación con  $K$ . En este punto el término  $(K - N)/K$  es aproximadamente  $(K/K)$ , o 1, lo que resulta nuevamente en la ecuación del crecimiento exponencial. La población crece de manera casi exponencial al principio, pero se va nivelando conforme se acerca a  $K$ .

Factores que determinan la capacidad de carga: Básicamente, cualquier tipo de recurso que sea importante para la supervivencia de una especie puede actuar como límite. Para las plantas el agua, la luz solar, los nutrientes y el espacio para crecer son algunos recursos fundamentales. En el caso de los animales, algunos de los recursos importantes son el alimento, el agua, el refugio y el espacio de anidación. Las cantidades limitadas de estos recursos resultan en una competencia entre los miembros de la misma población o competencia intraespecífica.

La competencia intraespecífica por recursos puede que no afecte a las poblaciones que se encuentran muy por debajo de su capacidad de carga, ya que los recursos son abundantes y todos los individuos obtienen lo que necesitan. Sin embargo, la competencia se intensifica al tiempo que el tamaño de la población aumenta. Adicionalmente, la acumulación de desechos puede reducir la capacidad de carga del medio ambiente.

Para el caso de las poblaciones de humanos algunos de los recursos importantes son el alimento, el agua, la vivienda, o fenómenos sociológicos como la formación de familias milenials o la pandemia de Covid-19.

Ecuación logística con retardo: Supongamos que a tiempo  $t$  hay una cantidad  $N(t)$  de individuos de cierta especie, cuyo número crece a una tasa  $r > 0$  y que existe una capacidad de carga  $K > 0$  que representa la máxima población que puede existir de esta especie por limitaciones del entorno. En este caso, el crecimiento de esta población se puede representar de manera simplificada:

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t) \left( 1 - \frac{N(t - \tau)}{K} \right) \quad (1)$$

La existencia del retardo  $\tau > 0$  en este caso se explica como el tiempo que demoran los individuos en madurar (o sea, volverse aptos para reproducirse).

Al estudiar el comportamiento demográfico en el Ecuador se toman en cuenta otros factores de retardo como la pandemia de Covid-19 y el surgimiento de nuevas familias milenials. Estos factores han sido estudiados antes en [4, 5, 6] y en [7, 8] respectivamente, en este artículo se estudia su efecto en Ecuador.

Se tiene la ecuación logística con retardo para el caso de estudio demográfico en el Ecuador:

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t) \left( 1 - \frac{N(t - \tau_1 - \tau_2 - \tau_3)}{K} \right), \quad (2)$$

donde  $\tau_1$  se define como el tiempo que demoran los individuos en madurar,  $\tau_2$  cuantifica el efecto de la pandemia de Covid-19,  $\tau_3$  describe el efecto del surgimiento de nuevas familias milenials, en la población del Ecuador. Otros factores que influyen en la evolución poblacional se pueden ver en [9], como por ejemplo si esta ocurre en un país en vías de desarrollo.

### 3. RESOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE LA DINÁMICA POBLACIONAL CON RETARDO USANDO SERIES DE TAYLOR

Teorema de Taylor [10]: Sea  $k \geq 1$  un entero y sea  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  una función diferenciable  $k$  veces en el punto  $a \in \mathbf{R}$ . Entonces existe una función  $h_k : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  tal que

$$f(x) = f(a) + \dots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k + h_k(x)(x - a)^k \quad (3)$$

con  $\lim_{x \rightarrow a} h_k(x) = 0$ .

Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función y  $r$  un número positivo fijo. Se define

$$\begin{aligned} \Delta f(x) &= f(x + r) - f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ \Delta^2 f(x) &= \Delta(\Delta f(x)), \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

y así sucesivamente. Si la variable  $x$  pasa del valor  $x$  al valor  $x + nr$ , para  $n \in \mathbb{N}$ , entonces  $f(x)$  pasa a valer  $f(x + nr)$  y se tiene:

$$f(x + nr) = f(x) + \frac{n}{1} \Delta f(x) + \dots + \frac{n(n-1) \dots 1}{1 \cdot 2 \dots n} \Delta^n f(x) \quad (4)$$

Los coeficientes de  $f(x), \Delta f(x), \Delta^2 f(x)$  se forman de la misma manera que los coeficientes del desarrollo del binomio  $(a + b)^n$ . Dichos coeficientes son  $1, \frac{n}{1}, \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}, \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \dots$

A 16 se le conoce como Fórmula de Interpolación de Newton. Ahora, si  $h$  es un número dado positivo, tomando  $n$  y  $r$  tales que  $nr = h$ , entonces  $r$  tiende a cero cuando  $n$  tiende a infinito y, recíprocamente. La ecuación 16 se escribe de la forma:

$$f(x + nr) = f(x) + \frac{nr}{1} \frac{\Delta f(x)}{r} + \dots + \frac{n(n-1) \dots 1 \cdot r^n}{1 \cdot 2 \dots n} \frac{\Delta^n f(x)}{r^n}$$

Según Taylor, si  $r$  tiende a cero,  $n$  tiende a infinito y se tiene:

$$f(x + h) = f(x) + hf'(x) + h^2 \frac{f''(x)}{2!} + \dots \quad (5)$$

### 3.1 Solución de la ecuación logística con retardo teniendo en cuenta una aproximación de segundo orden para el término $N(t - \tau)$

Sea  $\tau = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3$ , se tiene en cuenta 5 entonces  $N(t - \tau)$  se expresa:

$$N(t - \tau) = N(t) + \tau \frac{dN(t)}{dt} + \tau^2 \frac{d^2 N(t)}{2!} + \dots \quad (6)$$

Se puede aproximar a 6 hasta orden 3:

$$N(t - \tau) \approx N(t) + \tau \frac{dN(t)}{dt} + \tau^2 \frac{d^2 N(t)}{2!} \quad (7)$$

con un error del orden de  $O(\tau^2)$  igual a:

$$\sum_{n=3} (\tau^n \frac{d^n N}{dt^n}) \frac{1}{n!}.$$

Se tiene en cuenta 2 y 7 y se define la ecuación logística con retardo aproximada para el caso de estudio en Ecuador como:

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t) \left( 1 - \frac{N(t) + \tau \frac{dN(t)}{dt} + \tau^2 \frac{d^2 N(t)}{2!}}{K} \right) \quad (8)$$

Agrupando términos en 8 se tiene la ecuación diferencial:

$$\frac{d^2 N(t)}{dt^2} \frac{r\tau^2}{2!} + \frac{dN(t)}{dt} (K + r\tau) - rN(t)K + rN^2(t) = 0 \quad (9)$$

La ecuación 9 resulta en las siguientes dos ecuaciones:

$$\frac{dN(t)}{dt} = \frac{-(K + r\tau) + \sqrt{(K + r\tau)^2 - 4 \frac{r\tau^2}{2!} (-rN(t)K + rN^2(t))}}{2 \frac{r\tau^2}{2!}} \quad (10)$$

y

$$\frac{dN(t)}{dt} = \frac{-(K + r\tau) - \sqrt{(K + r\tau)^2 - 4 \frac{r\tau^2}{2!} (-rN(t)K + rN^2(t))}}{2 \frac{r\tau^2}{2!}} \quad (11)$$

Sea  $a = \frac{r\tau^2}{2!}$ ,  $b = (K + r\tau)$  y  $c = -rN(t)K + rN^2(t)$ , entonces:

$$\frac{dN(t)}{dt} = \frac{-b + \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a}$$

El resultado de resolver esta ecuación diferencial viene dado por:

$$\int_1^t \frac{1}{2a(\zeta)} d\zeta + c_1 = \int_1^{N(t)} \frac{1}{\sqrt{b^2 - 4a(r\xi^2 - rK\xi) - b}} d\xi \quad (12)$$

La solución de la ecuación 12 no es exacta y se puede calcular por un método numérico teniendo en cuenta un error determinado.

### 3.2 Solución de la ecuación logística con retardo teniendo en cuenta una aproximación de primer orden para el término $N(t - \tau)$

Véase la solución de la ecuación logística con retardo considerando una aproximación en la expansión de Taylor del término  $N(t - \tau)$  hasta la primera derivada:

$$N(t - \tau) \approx N(t) + \tau \frac{dN}{dt}$$

con un error del orden de  $O(\tau)$  igual a:

$$\sum_{n=2} (\tau^n \frac{d^n N}{dt^n}) \frac{1}{n!}.$$

Entonces se tiene:

$$\frac{dN}{dt} = rN(t) \left( 1 - \frac{N(t) + \tau \frac{dN}{dt}}{K} \right) \quad (13)$$

Agrupando términos en 13 se obtiene:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{rN(t)(K - N(t))}{r\tau N(t) + K}, \quad (14)$$

con resultado:

$$-rt - (r\tau + 1)\log(-K + N(t)) + \log(N(t)) = C_1.$$

Resolviendo para  $N(t)$ :

$$\frac{N(t)}{(N(t) - K)^{r\tau+1}} = 10^{C_1+rt}, \quad (15)$$

se tiene en cuenta que para  $t = 0$   $N(t) = N(0)$  por lo que:

$$C_1 = \log\left(\frac{N(0)}{(N(0) - K)^{r\tau+1}}\right).$$

La ecuación 15 es una solución implícita de la ecuación logística con retardo teniendo en cuenta la aproximación de primer orden de  $N(t - \tau)$ . En 15 se puede observar el comportamiento de la función logística, cuando  $N(t)$  se acerca a  $K$  la variable de tiempo  $t$  tiende a  $\infty$  y cuando la variable  $N(t)$  tiende a cero la variable  $t$  tiende a  $-\infty$ , comportamiento descrito por la función logística.

#### 4. RESOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE LA DINÁMICA POBLACIONAL CON RETARDO USANDO EL MÉTODO DE SERIES DE POTENCIAS MODIFICADO

En la siguiente sección se usa el método de series de potencias modificado(MPSM) usado en [11] para calcular la solución de la ecuación dinámica poblacional.

En este trabajo como en [11] se resuelve una ecuación diferencial con retardo de la forma:

$$y^{(n)}(t) = f(t, y(t), y(\varepsilon(t))), \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (16)$$

$$y^{(i)}(t) = y_i, \quad i = 0, 1, \dots, n-1 \quad (17)$$

donde  $n$  y  $i(n > i)$  denota el orden de las derivadas.

Sea el método de series de potencias modificado estructurado de la siguiente forma:

Sea la solución de Nth grado aproximada de 16 y 17:

$$y_N(t) = \sum_{j=0}^N a_j t^j \quad \text{donde} \quad \lim_{N \rightarrow \infty} y_N(t) = y(t) \quad (18)$$

El MPSM se describe por los siguientes 5 pasos:

Paso 1

Se reescribe la ecuación 16 de tal forma que los términos no homogéneos de la ecuación pasan al lado derecho de esta.

Paso 2

En la parte izquierda de la ecuación se sustituye:

$$y_N(\varepsilon(t)) = \sum_{j=0}^N a_j (\varepsilon(t))^j$$

$$y_N(t) = \sum_{j=0}^N a_j t^j$$

y las derivadas de  $y_N(t)$  hasta el orden  $n$ . Sin embargo, si el término no homogéneo o algún coeficiente de  $y$  o sus derivadas no son polinomiales sino analíticas en  $t = 0$ , se reemplaza por su descomposición en series de Taylor de grado  $N$  alrededor de  $t = 0$ .

Paso 3

Se obtienen todas las potencias de  $t$  en el lado izquierdo de la ecuación resultante del paso 2 y se igualan los coeficientes de estas a los coeficientes de las potencias en el lado derecho de la ecuación.

Paso 4

Se resuelve usando el método de Newton o el método de la sustitución progresiva, las primeras  $(N - n + 1)$  ecuaciones resultantes del paso 3 (estas son las ecuaciones obtenidas al igualar los coeficientes de  $t$  desde  $t^0$  hasta  $t^{N-n}$ ) junto con las  $n$  ecuaciones generadas por la condición asociada para encontrar  $a_j$ ,  $j = 0, 1, \dots, N$ .

Paso 5

Se sustituyen los coeficientes  $a_j$  determinados en el paso 4 en la ecuación 18 para obtener una solución aproximada de grado  $N$  de la ecuación en derivadas parciales retardadas 16 y 17.

#### 4.1 Solución de la ecuación de la dinámica poblacional con retardo usando el método de series de potencias modificado

Sea la ecuación de la dinámica poblacional con retardo 1:

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t) \left(1 - \frac{N(t - \tau)}{K}\right)$$

Se toma:

$$N_2(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$$

$$N_2(t - \tau) = a_0 + a_1(t - \tau) + a_2(t - \tau)^2$$



y se sustituye en 1,

$$a_1 + 2a_2t = r(a_0 + a_1t + a_2t^2) \left(1 - \frac{a_0 + a_1(t - \tau) + a_2(t - \tau)^2}{K}\right)$$

se tiene en cuenta que  $a_0 = N(0)$ , y resolviendo para las potencias de  $t$  se llega a,

$$a_0 = N(0) \quad (19)$$

$$a_1 = ra_0 - \frac{r}{K}a_0^2 \quad (20)$$

$$a_2 = \frac{\frac{1}{4}r[a_1 - \frac{1}{K}a_1a_0 + (\frac{1}{K}a_1^2 + \frac{1}{K}a_0a_1)\tau]}{1 + a_1\tau^2} \quad (21)$$

Se tiene en cuenta 19, 20 y 21 y se llega a la solución de 1 usando el metodo de MPSM, con una aproximación de orden 2, y un error  $O(t^2)$ :

$$N_2(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 \quad (22)$$

Se disminuye el error a  $O(t^3)$  y se toma:

$$N_3(t) = N(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3,$$

$$N_3(t - \tau) = a_0 + a_1(t - \tau) + a_2(t - \tau)^2 + a_3(t - \tau)^3,$$

se sustituye en 1,

$$a_1 + 2a_2t + 3a_3t^2 = r(a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3) \left(1 - \frac{a_0 + a_1(t - \tau) + a_2(t - \tau)^2 + a_3(t - \tau)^3}{K}\right)$$

se tiene en cuenta que  $a_0 = N(0)$ , y resolviendo para las potencias de  $t$  se llega a,

$$a_0 = N(0) \quad (23)$$

$$a_1 = \frac{\frac{r}{K}}{1 - \frac{r}{K}a_0\tau} Q_1, \quad (24)$$

donde  $Q_1 = (a_0K - a_0^2 - a_0a_2\tau^2 + a_0a_3\tau^3)$ ,

$$a_2 = \frac{\frac{r}{K}}{2(1 - \frac{a_0r\tau}{K} + \frac{a_1r\tau^2}{K})} Q_2, \quad (25)$$

donde  $Q_2 = (Ka_1 - a_0a_1 - 3a_0a_3\tau^2 + a_1\tau^2 + a_1a_3\tau^3 - a_1a_0)$ ,

$$a_3 = \frac{\frac{r}{K}}{3 + \frac{r}{K}(-3a_0\tau + 3a_1\tau^2 - a_2\tau^3)} Q_3, \quad (26)$$

donde  $Q_3 = (Ka_2 - a_0a_2 - a_1 + 2a_1a_2\tau - a_2a_0 - a_2a_1\tau^2 - a_2^2\tau^2)$

Se tiene en cuenta 23, 24, 25 y 26 y se llega a la solución de 1 usando el metodo de MPSM, con una aproximación de orden 3, y un error  $O(t^3)$ :

$$N_3(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 \quad (27)$$

Entiéndase que  $\lim_{n \rightarrow \infty} N_n(t) = N(t)$ , donde  $N(t)$  es la solución de la ecuación 1.

## 5. COMPARACIÓN DE LA SOLUCIONES DE LA ECUACIÓN DE LA DINÁMICA POBLACIONAL CON RETARDO AJUSTADA A LA EVOLUCIÓN DEMOGRÁFICA DEL ECUADOR, CONSIDERANDO EL EFECTO DE LAS NUEVAS FAMILIAS MILENIALS Y LA PANDEMIA DE COVID-19 EN EL PERÍODO DE 1990 AL 2020, POR LOS MÉTODOS DE SERIES DE TAYLOR Y POTENCIAS MODIFICADOS

Los datos usados para la comparación de las dos soluciones de la ecuación de la dinámica poblacional para la evolución demográfica en el Ecuador fueron tomados de [12] y [13] respectivamente:

| (  | Año  | Población |
|----|------|-----------|
| 0  | 1990 | 10149666  |
| 1  | 1991 | 10355598  |
| 2  | 1992 | 10567946  |
| 3  | 1993 | 10786984  |
| 4  | 1994 | 11012925, |
|    | Año  | Población |
| 26 | 2016 | 16528730  |
| 27 | 2017 | 16776977  |
| 28 | 2018 | 17023408  |
| 29 | 2019 | 17267986  |
| 30 | 2020 | 17510643) |

Fig. 1. Proyeccion poblacional del Ecuador entre los años 1990 y 2020

Se tiene en cuenta 1, donde se toma a  $r_{max}$  como la mayor  $r$  para los datos en estudios que corresponden a los censos de 1990, 2001 y 2010 en [13] y a las proyecciones poblacionales dadas en [12](1). Para los datos dados se obtuvo  $r_{max} = 0,0226$ .

Los parámetros  $\tau$  y  $K$  se encontraron ajustando los modelos soluciones a los datos demográficos del Ecuador.

### 5.1 Ajuste del modelo solución de la ecuación logística con retardo $\tau$ usando series de Taylor, a los datos de la población proyectada del Ecuador en el periodo de 1990 a 2020

El modelo solución de la ecuación logística con retardo  $\tau$  usando series de Taylor es 15 entonces:

$$\frac{N(t)}{(N(t) - K)^{0,0226\tau+1}} = 10^{C_1+0,0226t},$$

se tiene en cuenta que para  $t = 1990$   $N(t) = N(1990) = 10149666$  por lo que:

$$C_1 = \log\left(\frac{10149666}{(10149666 - K)^{0,0226\tau+1} * 10^{0,0226*1990}}\right).$$

También se entiende 15 como:

$$-0,0226t - (0,0226\tau + 1) \log(-K + N(t)) + \log(N(t)) = C_1. \quad (28)$$

El ajuste de la solución de la ecuación logística con retardo  $\tau$  usando series de Taylor, a los datos de la población proyectada del Ecuador 28 se realizó usando los primeros 15 datos presentados en la figura 1, los 15 datos restantes se usaron para evaluar al modelo 28.

La ecuación 28 depende de las variables  $\tau$  y  $K$ , donde la primera representa el retardo en la variable población del modelo en cuestión provocado por el efecto de la formación de las nuevas familias mileniales y los efectos de la pandemia de Covid 19, y la segunda describe a la capacidad de carga de la población.

Teniendo en cuenta estas dos variables se ajusto el modelo 28 usando el método de mínimos cuadrados a los primeros 15 datos de la figura 1.

El ajuste arrojó a  $\tau_1 = -48.146$  y a  $K_1 = 10.227$ , con una bondad de ajuste para un coeficiente de correlación del  $coef = 0.997$ , el ajuste del modelo se puede apreciar en la gráfica:

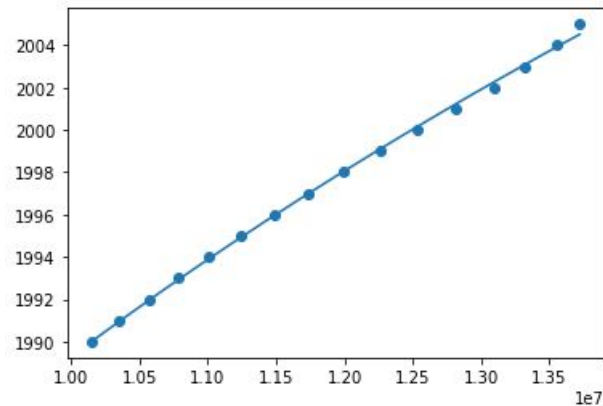


Fig. 2. Ajuste del modelo 28 poblacional del Ecuador entre los años 1990 y 2005

El mismo estudio se realizó al modelo 28 usando los datos intermedios, desde el año 1997 al 2011, para determinar las variables  $\tau_2$  y  $K_2$  y determinar cuales variables logran una mejor inferencia de los datos.

El ajuste arrojó a  $\tau_1 = -49.809$  y a  $K_1 = 10.370$ , con una bondad de ajuste para un coeficiente de correlación del  $coef = 0.999$ , el ajuste del modelo se puede apreciar en la gráfica:

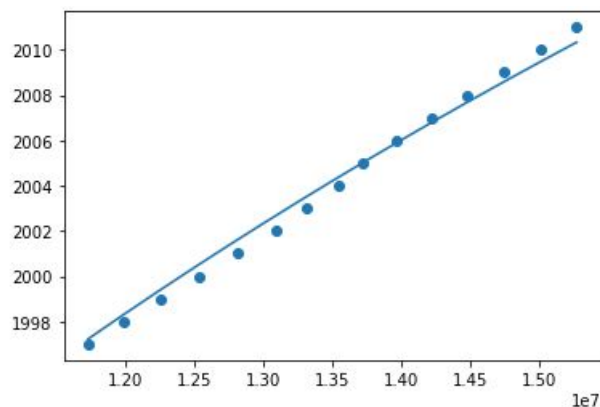


Fig. 3. Ajuste del modelo 28 poblacional del Ecuador entre los años 1997 y 2011

En la siguiente figura se puede observar como el ajuste del modelo 28 para ambos conjuntos de datos logran inferir los datos de tiempo y población restantes:

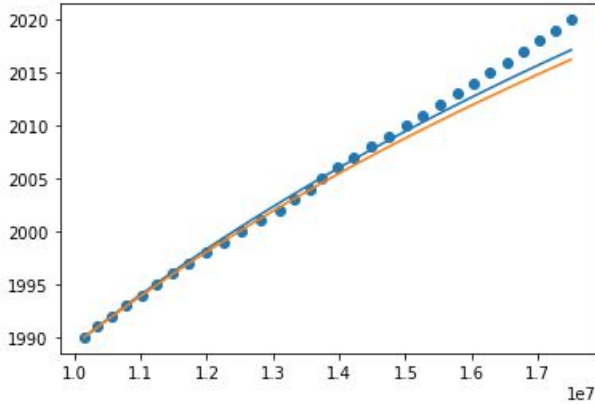


Fig. 4. Ajuste del modelo 28 poblacional del Ecuador entre los años 1997 y 2011 en color azul, ajuste del modelo 28 poblacional del Ecuador entre los años 1990 y 2005 en color amarillo

Se calculó el coeficiente de correlación de el modelo ajustado a los diferentes conjuntos de datos para todos los 31 datos de la población desde 1990 a 2020 en el Ecuador resultando en  $coef = 0.9973917$  común para el modelo ajustado a los primeros 15 datos y a los 15 datos intermedios. Como se puede apreciar en la figura 4 el modelo asjustado a los datos intermedios predice mejor los datos futuros mientras que el modelo ajustado a los primeros 15 datos predice mejor los primeros datos de la población del Ecuador desde 1990 a 2020.

## 5.2 Ajuste del modelo solución de la ecuación logística con retardo $\tau$ usando el método de series de potencias modificado, a los datos de la población proyectada del Ecuador en el periodo de 1990 a 2020

El modelo solución de la ecuación logística con retardo  $\tau$  usando el método de series de potencias modificado, a los datos de la población proyectada del Ecuador en el periodo de 1990 a 2020 está dado por 22:

$$N(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2,$$

donde  $a_0 = N(0)$ ,  $a_1 = r a_0 - \frac{r}{K} a_0^2$  y  $a_2 = \frac{\frac{1}{4} r [a_1 - \frac{1}{K} a_1 a_0 + (\frac{1}{K} a_1^2 + \frac{1}{K} a_0 a_1) \tau]}{1 + a_1 \tau^2}$ .

$N(0)$  es un dato histórico no presente por lo que se mantuvo como variable representando la población del ecuador en el año  $t = 0$ .

La función  $N(t)$  depende de las variables  $N(0)$ ,  $\tau$  y  $K$ , se ajustó usando el método de mínimos cuadrados resultando

en los valores  $N(0) = -66.958$ ,  $\tau = 119.441$  y  $K = 0.652$ , en la siguiente figura se puede apreciar como esta función se ajustó a los datos poblacionales proyectados:

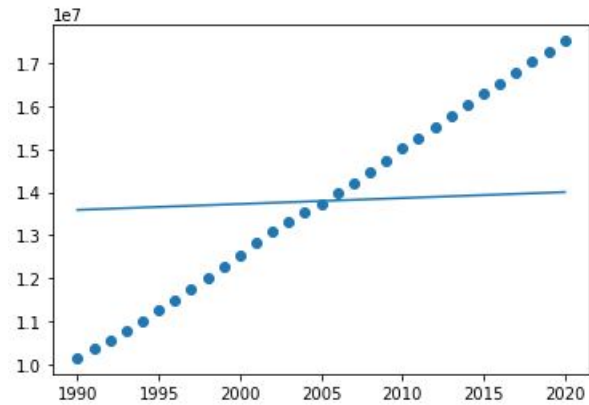


Fig. 5. Ajuste del modelo 22 poblacional del Ecuador entre los años 1990 y 2020

Se aprecia que el valor de  $N(0)$  es negativo lo que no tiene sentido histórico puesto la población del Ecuador tiene un valor positivo en todo momento, y el mejor ajuste posible para el modelo 22 no logra reproducir correctamente los datos proyectados de la población del Ecuador entre los años 1990 y 2020.

Se tuvo en cuenta el valor positivo de  $N(0)$  y se ajustó el modelo 22 para valores de  $N(0) = 1, 10, 1000, 10000$ , resultando en:

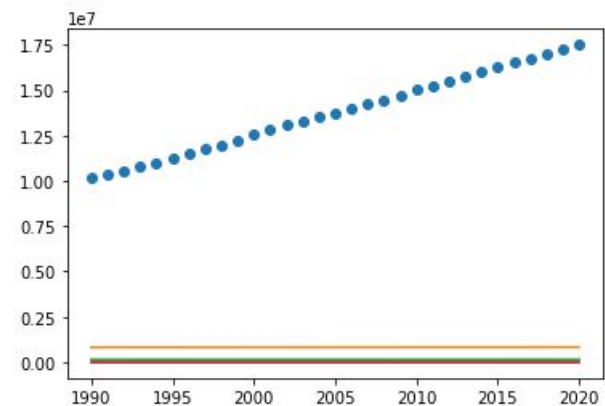


Fig. 6. Ajuste del modelo 22 poblacional del Ecuador entre los años 1990 y 2020 tomando  $N(0) = 1, 10, 1000, 10000$

En la siguiente figura se pueden apreciar los gráficos de los modelos ajustados para  $N(0) = 1, 10, 1000, 10000$ :



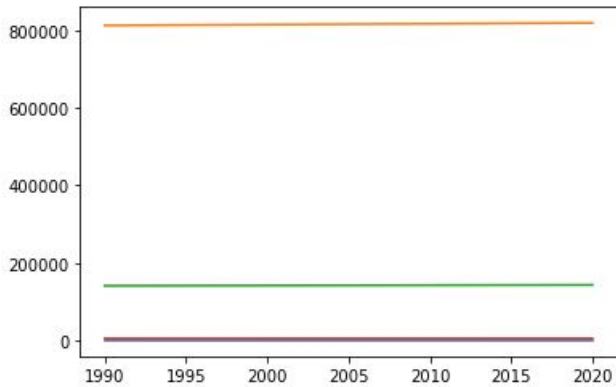


Fig. 7. Modelo 22 poblacional del Ecuador entre los años 1990 y 2020 tomando  $N(0) = 1, 10, 1000, 10000$

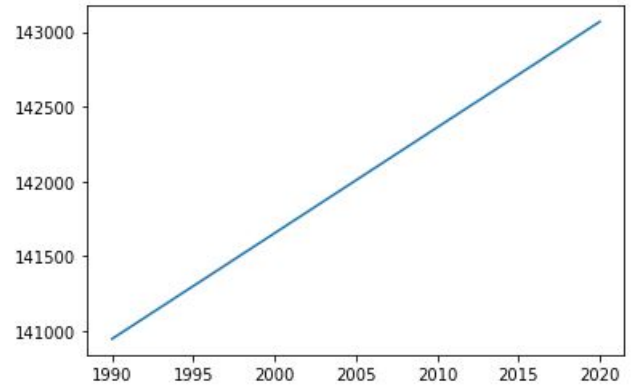


Fig. 10. Modelo 22 poblacional del Ecuador entre los años 1990 y 2020 tomando  $N(0) = 1000$

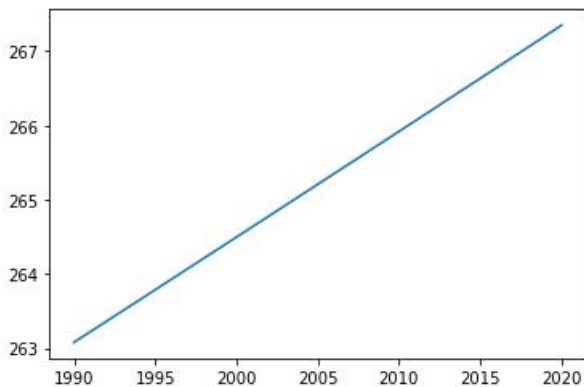


Fig. 8. Modelo 22 poblacional del Ecuador entre los años 1990 y 2020 tomando  $N(0) = 1$

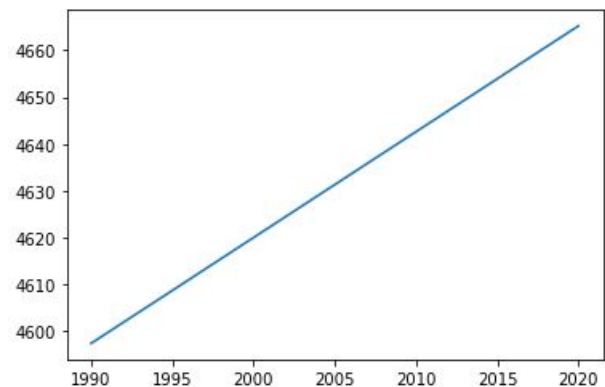


Fig. 11. Modelo 22 poblacional del Ecuador entre los años 1990 y 2020 tomando  $N(0) = 10000$

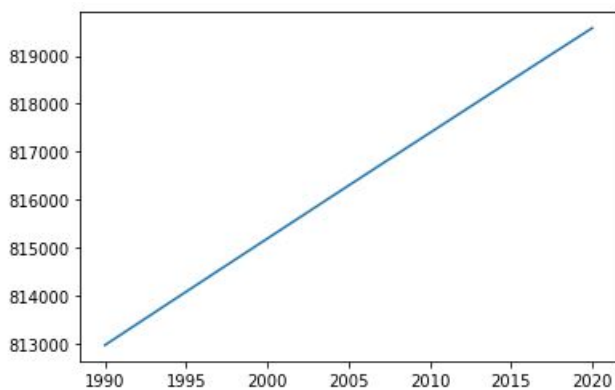


Fig. 9. Modelo 22 poblacional del Ecuador entre los años 1990 y 2020 tomando  $N(0) = 10$

## 6. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

### 6.1 Modelo solución de la ecuación logística con retardo $\tau$ usando series de Taylor 15

El modelo solución de la ecuación logística con retardo  $\tau$  usando series de Taylor 15, se ajustó a los datos de la población del Ecuador entre los años 1990 y 2020 con un coeficiente de correlación  $coef = 0,999$ , y demostró su eficacia para predecir la población futura en el Ecuador cuando se usó para predecir 15 valores de población a partir del ajuste del modelo a 15 datos, resultando en una precisión de ajuste del modelo con  $coef = 0.997$ .

Aunque el ajuste del modelo a los datos fue alto, los valores de  $K$  y  $\tau$  no tienen sentido histórico, los valores de  $K$  deben ser superiores a 18 millones puesto este representa la capacidad de carga de la población en el Ecuador.

El modelo solución de la ecuación logística con retardo  $\tau$  usando series de Taylor 15 se puede usar para inferir la población del Ecuador por los años próximos 2021, 2022, 2023 ... El modelo ajustado a los datos de la población del Ecuador entre los años de 1990 y 2020 se puede apreciar en la siguiente figura:

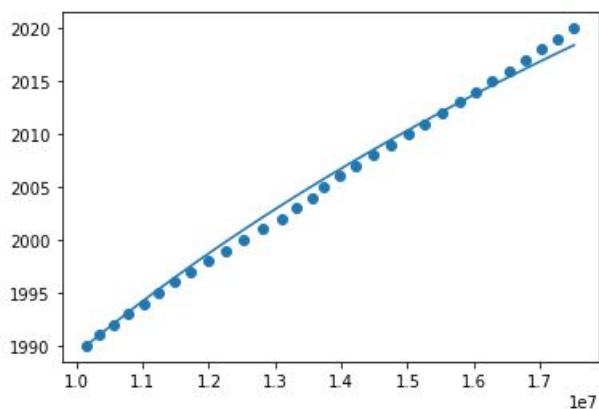


Fig. 12. Modelo 22 poblacional del Ecuador ajustado los años 1990 y 2020

Este modelo infiere una población para el Ecuador en el 2021 de 18405400 para el 2022 de 18762200, para 2023 de 19125900 y para 2024 de 19496600. Estos datos pueden ser corroborados en la página oficial "ecuadorencifras.gob.ec/estadisticas/".

El modelo 15 además, presenta la forma de  $s$  característica de una función logística que es la que describe mejor el comportamiento de una población en estudio.

## 6.2 Modelo solución de la ecuación logística con retardo $\tau$ usando el método de series de potencias modificado 22

Se demostró que el modelo solución de la ecuación logística con retardo  $\tau$  usando el método de series de potencias modificado 22 no es capaz de ajustar correctamente los valores de las poblaciones del Ecuador para los años 1990 a 2020 para ningún valor posible de las variables  $K$  y  $\tau$ .

## 7. CONCLUSIÓN

En este artículo se solucionó la ecuación de dinámica poblacional con retardo para el Ecuador entre los años 1990 y 2020, usando métodos numéricos no estándar, por los métodos de series de Taylor y series de potencias modificados teniendo en cuenta el efecto de la formación de nuevas

familias milenials y la pandemia de Covid 19,  $\tau$ . Se determinó que la solución de la ecuación de dinámica poblacional con retardo para el Ecuador entre los años 1990 y 2020, por los métodos de series de Taylor describe correctamente el comportamiento evolutivo del número de individuos en la población del Ecuador entre los años 1990 y 2020, logrando predecir la población para los años 2021 en adelante; en el 2021 el modelo infirió 18405400 habitantes para el 2022 18762200, para 2023 infirió 19125900 y para 2024 la población inferida fue de 19496600 habitantes. Este modelo ajustado a los datos de estudio no describió correctamente las variables demográficas  $K$  y  $\tau$ , pero atendiendo a que el modelo describe un comportamiento similar a la función logística se cree que ajustando el modelo a una mayor cantidad de datos, este puede arrojar unos valores acertados de  $K$  y  $\tau$ . Por el contrario al método de Taylor, se probó que el método numérico no estándar de series de potencias modificados no resuelve correctamente el problema de la evolución demográfica del Ecuador para los años 1990 al 2020, para ningún valor posible de las variables  $K$  y  $\tau$ , se puede intentar observar si usando una mayor aproximación de este modelo se logra describir correctamente la dinámica poblacional para el Ecuador.

## 8. AGRADECIMIENTOS

A Antonio Sirvent, Paco Rodriguez y Gabriela Leal

## BIBLIOGRAFÍA

- [1] L. Alaoui, "Nonlinear homogeneous retarded differential equations and population dynamics via translation semigroups," *Semigroup Forum*, vol. 63, pp. 330–356, 2001.
- [2] O. Arino and E. Sánchez, "Linear theory of abstract functional differential equations of retarded type," *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 191, pp. 547–571, 5 1995.
- [3] S. Ghirlanda, M. Enquist, and M. Perc, "Sustainability of culture-driven population dynamics," *Theoretical Population Biology*, vol. 77, pp. 181–188, 5 2010.
- [4] A. Bhadra, A. Mukherjee, and K. Sarkar, "Impact of population density on covid-19 infected and mortality rate in india," *Modeling Earth Systems and Environment*, vol. 7, pp. 623–629, 3 2021.
- [5] S. Drefahl, M. Wallace, E. Mussino, S. Aradhya, M. Kolk, M. Brandén, B. Malmberg, and G. Andersson, "A population-based cohort study of socio-demographic risk factors for covid-19 deaths in swe-

- 
- den,” *Nature Communications* 2020 11:1, vol. 11, pp. 1–7, 10 2020.
- [6] A. A. Volk, K. J. Brazil, P. Franklin-Luther, A. V. Dane, and T. Vaillancourt, “The influence of demographics and personality on covid-19 coping in young adults,” *Personality and Individual Differences*, vol. 168, p. 110398, 1 2021.
- [7] K. Chin, “Declining birth rates in the us: An analysis of potential factors \*,” 2022.
- [8] E. S. Rubenstein, “How millennials are slowing u.s. population growth and enhancing sustainability an npg forum paper,” 2017.
- [9] R. P. Cincotta, J. Wisnewski, and R. Engelman, “Human population in the biodiversity hotspots,” *Nature*, vol. 404, pp. 990–992, 4 2000.
- [10] A. Genocchi, *Calcolo differenziale e principii di calcolo integrale*. Fratelli Bocca, 1884.
- [11] O. M. Ogunlaran, A. S. Olagunju, O. M. Ogunlaran, and A. S. Olagunju, “Solution of delay differential equations using a modified power series method,” *Applied Mathematics*, vol. 6, pp. 670–674, 4 2015.
- [12] “Proyecciones poblacionales —.”
- [13] “Población y demografía —.”