

Analytical study of the influence of cracks on the natural vibration frequencies of Euler Bernoulli beams with elastic supports.

Carrizo Marcos Rubén, Engineer.^{1y2}, <https://orcid.org/0000-0002-9843-2738>, Carnelutto Maximiliano, Engineer¹, and Raffo Javier Leandro, PhD in engineering. <https://orcid.org/0000-0001-5891-4436>.

¹ Universidad Tecnológica Nacional – Facultad Regional Delta, Argentina, jraffo@frd.utn.edu.ar, mcarnelutto@frd.utn.edu.ar

² Comisión Nacional de Energía Atómica. Proyecto CAREM 25, mcarrizo@frd.utn.edu.ar - marcoscarrizo@cnea.gob.ar

Abstract - Cracks often exist in mechanical and structural components. If they are not detected in time, a severe damage can occur. The apparition and grow of cracks in a system changes its dynamic and vibratory behaviour. Therefore, determining the modal parameters of structures is a great interest in engineering and well known as the direct problem.

The calculus of variations, based on the use of an intermediate elastic constraint associated with a fractomechanical crack model, proved to be a robust and effective tool to model the free transverse vibrations in cracked homogeneous and isotropic Euler Bernoulli beams.

The dimensionless coefficients of unnormalized and normalized frequencies for beams with a single crack open to the surface are presented; for classic supports, classic supports with intermediate supports, classic supports with ball joints and elastic springs at the ends.

Keywords: *Direct problem - vibrations - beams - Cracks.*

Digital Object Identifier: (only for full papers, inserted by LACCEI).
ISSN, ISBN: (to be inserted by LACCEI).
DO NOT REMOVE

Estudio analítico de la influencia de fisuras en las frecuencias naturales de vibración de vigas Euler Bernoulli con vinculaciones elásticas.

Carrizo Marcos Rubén, Ingeniero.^{1y2}, <https://orcid.org/0000-0002-9843-2738>, Carnelutto Maximiliano, Ingeniero¹ y Raffo Javier Leandro, Doctor en ingeniería¹. <https://orcid.org/0000-0001-5891-4436>.

¹ Universidad Tecnológica Nacional – Facultad Regional Delta, Argentina, jraffo@frd.utn.edu.ar, mcarnelutto@frd.utn.edu.ar

² Comisión Nacional de Energía Atómica. Proyecto CAREM 25, mcarrizo@frd.utn.edu.ar - marcoscarrizo@cnea.gob.ar

Resumen – *En los componentes mecánicos y estructurales suelen existir fisuras. De no ser detectadas oportunamente pueden ocasionar daños severos. La creación y el desarrollo de fisuras en un sistema cambia su comportamiento dinámico y vibratorio. Por lo que determinar los parámetros modales de estructuras con fisuras de características conocidas es de gran interés en ingeniería. Esto se conoce como problema directo.*

El cálculo de variaciones, a partir del empleo de una restricción elástica intermedia asociada a un modelo fractomecánico de fisura, demostró ser una herramienta robusta y eficaz para modelar las vibraciones transversales libres en vigas Euler Bernoulli, homogéneas e isotropas, con presencia de una fisura.

Se presentan los coeficientes adimensionales de frecuencias sin normalizar y normalizados para vigas con una sola fisura abierta a superficie; para las vinculaciones clásicas, con apoyos intermedios, con rótulas y vínculos elásticos en los extremos.

Palabras claves: *Problema directo – vibraciones – vigas-Fisuras.*

I. INTRODUCCIÓN.

El análisis modal analítico consiste en desarrollar un modelo matemático, conocido como modelo modal, a partir del cual se describe una estructura en términos de sus parámetros modales: frecuencias naturales, coeficientes de amortiguamiento y modos normales de vibración. Caracterizar estos parámetros es clave porque permite ante una entrada conocida (carga), determinar la respuesta (desplazamientos,

deformaciones y tensiones) del sistema dinámico; uno de los objetivos principales de la dinámica estructural.

En los componentes mecánicos y estructurales suelen existir fisuras. De no ser detectadas oportunamente pueden ocasionar daños catastróficos e irreversibles, asociados a enormes perjuicios desde el punto de vista económico, social y ambiental.

La creación y el desarrollo de fisuras en un sistema cambian su comportamiento dinámico y vibratorio. Por lo que determinar los parámetros modales de estructuras con fisuras de características conocidas es de gran interés en ingeniería [1]-[8].

El cálculo de variaciones se ha constituido en una herramienta particularmente eficaz para modelar vibraciones transversales libres en vigas homogéneas e isotropas. En particular, el uso de restricciones elásticas internas que permiten emular la presencia de fisuras en vigas [9] y [10].

El objetivo de este trabajo es estudiar en forma analítica la influencia de la presencia de fisuras en las frecuencias naturales de vibración de vigas Euler Bernoulli.

Si bien numerosos autores han abordado el tema en forma analítica, con simulaciones por elementos finitos o en forma experimental, por ejemplo ver [11]-[20]. Es un aporte de este trabajo además de presentar resultados de los coeficientes de frecuencias de vigas con condiciones de vinculación clásicas, considerar apoyos y rótulas intermedias como apoyos elásticos en los extremos.

II. DESARROLLO.

En la Figura 1 se describe una viga tipo Euler Bernoulli, de longitud total l , compuesta por tres tramos, cuyas dimensiones de sección y material son uniformes a lo largo de cada uno. Los mismos, que se corresponden a los intervalos $[0, c_1]$, $[c_1, c_2]$ y $[c, l]$, están vinculados entre sí por dos rótulas internas y dos restricciones elásticas rotacionales $r_{i,i+1}$ con $i = 1, 2$. En cada rotula actúa un resorte traslacional t_{c_i} con $i = 1, 2$; cuyo otro extremo está fijo. El sistema estructural tiene en sus extremos restricciones rotacionales definidas por los parámetros r_0 y r_l y restricciones traslacionales dadas por t_0 y t_l . El desplazamiento transversal de la viga en cualquier instante de tiempo t está descrita por la función $w = w(x, t)$, $x \in [0, l]$.

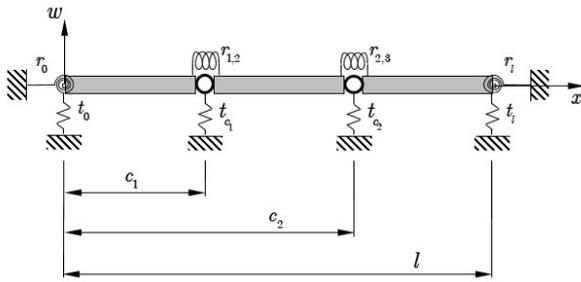


Figura 1 – Viga de tres tramos analizada.

A partir de las expresiones de la energía mecánica del sistema, la aplicación del principio de Hamilton y el cálculo de variaciones, se obtienen, ya adimensionalizadas, la ecuación diferencial que describe el comportamiento vibracional, las condiciones de contorno y transición [9], [10], [19] y [20].

$$\frac{d^4}{d\bar{x}^4} W_{i,n}(\bar{x}) - \lambda_n^2 W_{i,n}(\bar{x}) = 0, \quad \forall \bar{x} \in (\bar{c}_{i-1}, \bar{c}_i), \quad i = 1, 2, 3 \quad (1)$$

$$R_0 \frac{dw}{d\bar{x}}(0^+) = \frac{d^2 w}{d\bar{x}^2}(0^+) \quad (2)$$

$$T_0 w(0^+) = -\frac{d^3 w}{d\bar{x}^3}(0^+) \quad (3)$$

$$w(\bar{c}_i^-) = w(\bar{c}_i^+), \quad i = 1, 2 \quad (4)$$

$$R_{i,i+1} \left(\frac{dw}{d\bar{x}}(\bar{c}_i^+) - \frac{dw}{d\bar{x}}(\bar{c}_i^-) \right) = \frac{d^2 w}{d\bar{x}^2}(\bar{c}_i^-), \quad i = 1, 2 \quad (5)$$

$$R_{i,i+1} \left(\frac{dw}{d\bar{x}}(\bar{c}_i^+) - \frac{dw}{d\bar{x}}(\bar{c}_i^-) \right) = \frac{d^2 w}{d\bar{x}^2}(\bar{c}_i^+), \quad i = 1, 2 \quad (6)$$

$$T_{c_i} w(\bar{c}_i) = \frac{d^3 w}{d\bar{x}^3}(\bar{c}_i^-) - \frac{d^3 w}{d\bar{x}^3}(\bar{c}_i^+), \quad i = 1, 2 \quad (7)$$

$$R_l \frac{dw}{d\bar{x}}(1^-) = -\frac{d^2 w}{d\bar{x}^2}(1^-) \quad (8)$$

$$T_l w(1^-) = \frac{d^3 w}{d\bar{x}^3}(1^-) \quad (9)$$

donde el cambio de variable está dado por $\bar{x} = x/l$ y por lo tanto la posición adimensional de las transiciones son $\bar{c}_i = c_i/l$. Las constantes adimensionales de rigidez de las restricciones elásticas en los extremos están dadas por $T_0 = \frac{t_0 l^3}{EI}$, $R_0 = \frac{r_0 l}{EI}$, $T_l = \frac{t_l l^3}{EI}$, $R_l = \frac{r_l l}{EI}$ y las internas por

$$T_{c_i} = \frac{t_{c_i} l^3}{EI}, \quad R_{i,i+1} = \frac{r_{i,i+1} l}{EI}, \quad i = 1, 2.$$

El coeficiente adimensional de frecuencias λ_n está definido como:

$$\lambda_n = \left(\frac{\rho A}{EI} \right)_i l^4 \omega_n^2, \quad n=1,2,\dots,m \quad (10)$$

y $W_{i,m}(x)$ describe las formas modales del n -ésimo modo.

Las ecuaciones diferenciales ordinarias (E.D.O) de cuarto orden dadas en (1) tiene como posible solución a la función:

$$W_{i,n}(\bar{x}) = A_{i,1} \cosh(\lambda_n \bar{x}) + A_{i,2} \sinh(\lambda_n \bar{x}) + A_{i,3} \cos(\lambda_n \bar{x}) + A_{i,4} \sin(\lambda_n \bar{x}), \quad i = 1, 2, 3. \quad (11)$$

Reemplazando (11) en (2) a (9), se obtiene un sistema lineal de ecuaciones homogéneas. Dicho sistema puede ser escrito en notación matricial. Agrupando los coeficientes del

sistema, se obtiene la matriz A de coeficientes del sistema. Entonces, la solución no trivial se obtiene al encontrar las raíces del polinomio característico $P(\lambda_n)$. Siendo así denominada como ecuación característica a:

$$P(\lambda_n) = \text{Det}[A] = G(T_0, R_0, T_l, R_l, R_{i,i+1}, T_{c_i}, \lambda_n) = 0. \quad (12)$$

Adoptando valores adecuados de T_0 , R_0 y T_l , R_l se pueden generar todas las combinaciones posibles de restricciones de apoyo clásicas (empotrado, simplemente apoyado, libre). Por otra parte, dando valores apropiados a T_{c_i} con $i=1,2$, se pueden considerar efectos de restricciones elásticas intermedias en los puntos intermedios $\bar{x} = \bar{c}_i$, $i=1,2$.

Si se considera que solo está presente la fisura y no existe apoyo intermedio, entonces $T_{c_1} = 0$, $R_{1,2} = \infty$, $T_{c_2} = 0$ y $0 < R_{2,3} < \infty$.

Si se analiza una viga con un apoyo intermedio y una fisura ubicados en diferentes posiciones se considera que los resortes intermedios adoptan $T_{c_1} = \infty$, $R_{1,2} = \infty$, $T_{c_2} = 0$ y $0 < R_{2,3} < \infty$. Vale aclarar, que en caso de que la fisura este antes que el apoyo, los valores de las restricciones elásticas de la primera transición pasan a la segunda y de la segunda a la primera.

Para la implementación del modelo de fisura (Fig.2), se considera el modelo formulado con herramientas fractomecánicas, basado en el factor de intensidad de tensiones para fisuras superficiales simples y abiertas utilizado en [19].

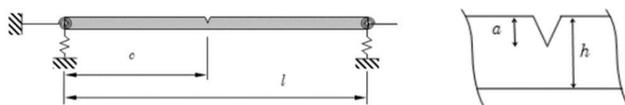


Figura 2 – a) Viga con una fisura superficial a un solo lado. b) Esquema de fisura superficial abierta.

Para diferentes condiciones de vinculación se determina en forma exacta el valor de los coeficientes adimensionales de frecuencias que corresponde a una viga fisurada λ_n , con determinada posición c y profundidad η de fisura, donde el subíndice n indica el modo normal considerado. El análisis está acotado a los modos 1 a 3, variando c y η desde 0.01 a 0.99 con paso 0.01.

Al graficar los casos obtenidos, se conforma en una gráfica tridimensional una superficie, donde para cada posición y profundidad de fisura se corresponde un valor de coeficiente adimensional de frecuencias. A la misma, se la denomina superficie de los coeficientes adimensionales de frecuencias. Si para cada posición y profundidad, el valor de λ_n es dividido por el valor de los coeficientes adimensionales de frecuencias que corresponden a una viga sin presencia de fisuras $\bar{\lambda}_n$, se puede trazar una superficie que se denomina superficie de los coeficientes adimensionales de frecuencias normalizados $(\lambda_n/\bar{\lambda}_n)$, ver (Fig. 3).

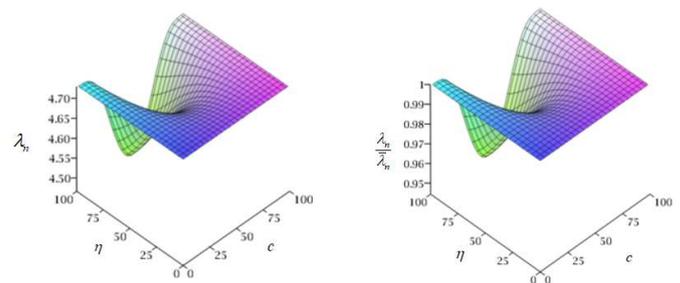


Figura 3 – Condición L-L, modo 1.

- a) Superficie de los coeficientes adimensionales de frecuencias.
- b) Superficie de los coeficientes adimensionales de frecuencias normalizados.

III. RESULTADOS.

A continuación, se presentan los resultados obtenidos para diferentes casos de vinculación, agrupándolos en vinculaciones clásicas, vinculaciones clásicas con apoyos intermedios, vinculaciones clásicas con rotulas y vínculos elásticos en los extremos.

A. Condiciones de vinculación clásicas en los extremos.

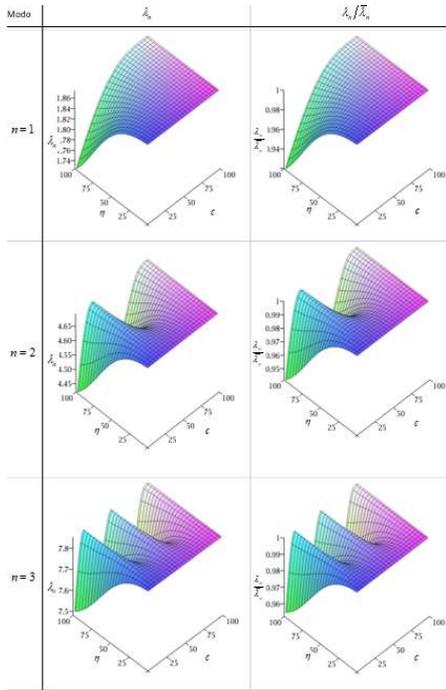


Figura 4 – Superficie de los coeficientes adimensionales de frecuencias para la condición E-L.

B. Condiciones de vinculación clásicas en los extremos con un apoyo simple intermedio.

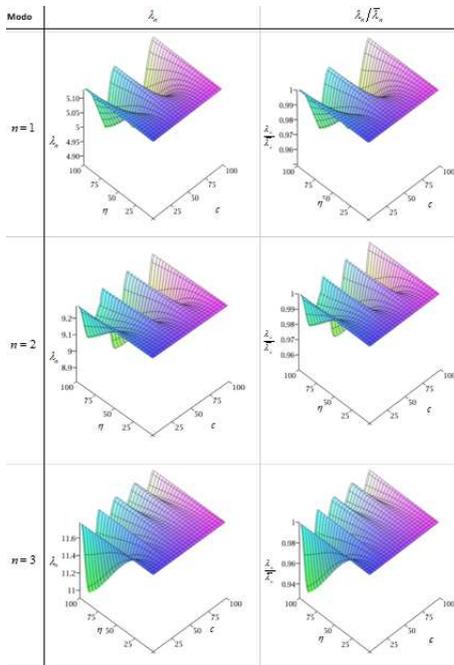


Figura 5 – Superficie de los coeficientes adimensionales de frecuencias para la condición A-A con un apoyo simple en $c = 0.30$.

C. Condiciones de vinculación clásicas en los extremos con una rótula intermedia.

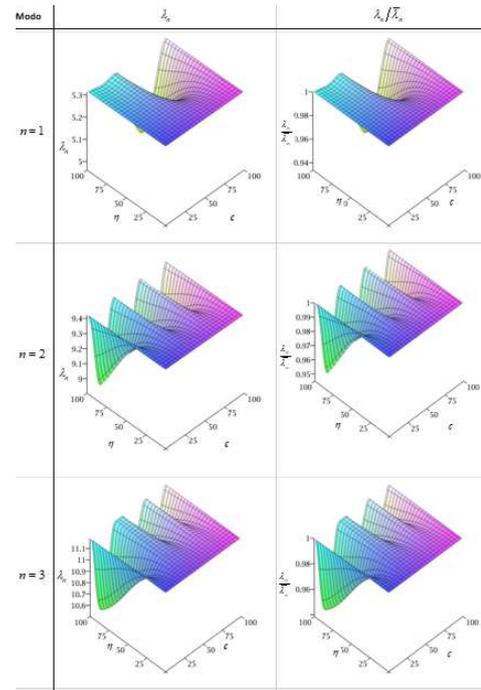


Figura 6 – Superficie de los coeficientes adimensionales de frecuencias para la condición A-A con una rótula en $c = 0.33$.

D. Apoyos elásticos en los extremos

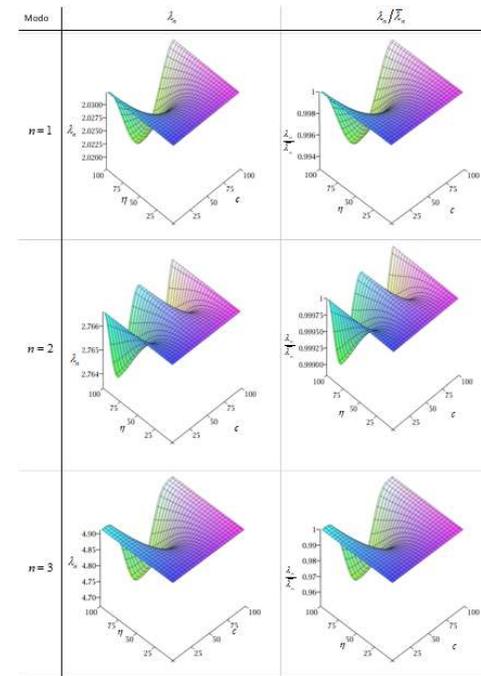


Figura 7 – Superficie de los coeficientes adimensionales de frecuencias para la condición $T_1 = T_2 = 10$, $R_1 = R_2 = 0$.

IV. CONCLUSIONES.

El cálculo de variaciones, a partir del empleo de una restricción elástica intermedia asociada a un modelo fractomecánico de fisura, demostró ser una herramienta robusta y eficaz para modelar las vibraciones transversales libres en vigas Euler Bernoulli, homogéneas e isotrópicas, con presencia de una fisura abierta a superficie. Como ventajas del método utilizado se puede mencionar que los resultados obtenidos son exactos y no aproximados, que resulta de fácil implementación y bajo coste computacional.

Se obtuvieron en forma analítica los valores de los coeficientes adimensionales de frecuencias sin normalizar y normalizados para vigas con una sola fisura y vinculaciones clásicas, clásicas con apoyos intermedios, clásicas con rotulas y vínculos elásticos en los extremos. En experimentos y aún más en aplicaciones de ingeniería, se dificulta encontrar una vinculación que se comporte con correspondencia perfecta con la teoría. Por lo cual, el modelo computacional presentado posee un gran valor. Ya que las restricciones elásticas que emulan las condiciones de vinculación pueden adquirir cualquier valor predeterminado. Los resultados hallados para las vinculaciones clásicas se condicen con los presentados por otros autores. El análisis de casos de estudio en vinculaciones clásicas con apoyos intermedios, clásicas con rotulas y vínculos elásticos en los extremos son los nuevos aportes presentado en este trabajo.

REFERENCIAS.

- [1] T. G., Chondros, A. D., Dimarogonas y J. Yao, "A continuous cracked beam vibration theory," *J. Sound and Vibration*, 215(1): 17-34. 1998.
- [2] J. Fernández-Sáez y C. Navarro, "Fundamental frequency of cracked beams in bending vibrations: an analytical approach," *J. Sound and Vibration*, 256:17-31. 2002.
- [3] R. Ruotolo y C. Surace, "Natural frequencies of a bar with multiple cracks," *J. Sound and Vibration*, 272:301-316. 2004.
- [4] B. Binici, "Vibration of beams with multiple open cracks subjected to axial force," *J. Sound and Vibration* 287:277-295. 2005.
- [5] M-H., Hsu, "Vibration analysis of edge-cracked beam on elastic foundation with axial loading using the differential quadrature method," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194:1-17. 2005.
- [6] J. L., Raffo y O. R. Grossi, "Variational Approach of Timoshenko Beams with Internal Elastic Restraints," *J. Mechanics Engineering and Automation*, 3, 491-498. 2013.
- [7] F. Bakhtiari-Nejad, A. Khorram y M. Rezaeian, "Analytical estimation of natural frequencies and mode shapes of a beam having two cracks," *International Journal of Mechanical Sciences* 78, 193-202. 2014.
- [8] A.C. Neves, F.M.F. Simões y A. Pinto da Costa, "Vibrations of cracked beams: Discrete mass and stiffness models," *Computers and Structures*, 168, 68-77. 2016.
- [9] R., O. Grossi, *Cálculo de variaciones. Teoría y aplicaciones*. CIMNE, Barcelona. 2010.
- [10] J. L. Raffo, "Mecánica de Elementos Estructurales con fallas localizadas", Tesis de Doctorado, Facultad de Ingeniería, UNSa, 2014.
- [11] P. G., Nikolakopoulos, D. E., Katsareas y C. A., Papadopoulos, "Crack identification in frame structures," *Computers & Structures* Vol. 64, No. 14, pp. 389-406. 1997.
- [12] X. F. Yang, A. S. J. Swamidas y R. Seshadri, "Crack identification in vibrating beams using the energy method," *J. Sound and Vibration*, 244(2): 339-357, 2001.
- [13] G. M. Owolabi, A. S. J. Swamidas y R. Seshadri, "Crack detection in beams using changes in frequencies and amplitudes of frequency response functions," *J. Sound and Vibration*, 265:1-22, 2003.
- [14] G.M. Dong, J. Chen y J. Zou, "Parameter identification of a rotor with an open crack," *European Journal of Mechanics A/Solids* 23, 325-333. 2004.
- [15] A. S. J. Swamidas, X. Yang y R. Seshadri, R, "Identification of Cracking in Beam Structures Using Timoshenko and Euler Formulations," *Journal of engineering mechanics* 130:1297-1308. 2004.
- [16] H. Nahvi y M. Jabbari, "Crack detection in beams using experimental modal data and finite element model," *International Journal of Mechanical Sciences* 47, 1477-1497. 2005.
- [17] Z. Yu y F. Chu, "Identification of crack in functionally graded material beams using the p-version of finite element method," *J. Sound and Vibration*, 325:69-84, 2009.
- [18] W. Liu y M. Barkey, "Frequency error based identification of cracks in beam-like structures," *Journal of Mechanical Science and Technology*, 10:4657-4667, 2017.
- [19] J. L. Raffo y M. R. Carrizo, "Estudio de Detección de Fisuras en Vigas con un Apoyo Intermedio," XXII Congreso sobre Métodos Numéricos y sus Aplicaciones, XXII ENIEF, Mecánica Computacional Vol. XXXIV, ISSN 1666-6070, 1521-1535, Córdoba, Argentina, del 8 al 11 de Nov. 2016.
- [20] M. R. Carrizo y J. L. Raffo, "Theoretical and experimental analysis of the elastic support rigidity coefficient's value on the natural frequencies in beams," XIV Congreso Iberoamericano de Ingeniería Mecánica, XIV CIBIM, Cartagena, Colombia, del 12 al 15 de Noviembre. 2019.