

Global Riemannian wave attractors and the optimal measure of localized damping

*Abstract-*In this paper we study the long-term dynamics of a Riemannian wave exposed to critical structural forces in the Sobolev sense, where the dissipation region is located in an optimal sense in measure, in particular, the damping region is ε -controllable in measure. The objective is to prove the existence of a global attractor for the semigroup associated to the model.

Keywords: Riemannian wave equations, Global Attractors, ε -sets controllable in measure.

Atractores globales de ondas Riemannianas y la medida óptima del amortiguamiento localizado

Ruben Dario Mendoza-Arenas¹, Alfredo Sotelo-Pejerrey², Lito Edinson Bocanegra Rodríguez³, Hernan Oscar Cortez Gutierrez⁴, Marisol Paola Delgado Baltazar⁵, Jenny Maria Ruiz Salazar⁶, César Angel Durand Gonzales⁷

^{1,5}Universidad Nacional del Callao, Perú, rdmendozaa@unac.edu.pe

^{2,5}Universidad Nacional del Callao, Perú, asotelop@unac.edu.pe, mpdelgadob@unac.edu.pe

^{3,6}Universidad Nacional del Callao, Perú, lebocanegrar@unac.edu.pe, jmruizs@unac.edu.pe

^{4,7}Universidad Nacional del Callao, Perú, hocortezg@unac.edu.pe, cadurandg@unac.edu.pe

Resumen- *Analizamos la dinámica a largo plazo de una onda Riemanniana expuesta a fuerzas estructurales críticas en el sentido de Sobolev, donde la región de disipación es localizada y se optimiza su medida, en particular, la región de amortiguamiento es ε -controlable en medida. El objetivo es demostrar la existencia de un atractor global para el semigrupo asociado al modelo.*

Palabras clave: *Ecuaciones de onda Riemannianas, Atractores Globales, Conjuntos ε -controlables en medida.*

Abstract- *In this paper we study the long-term dynamics of a Riemannian wave exposed to critical structural forces in the Sobolev sense, where the dissipation region is located in an optimal sense in measure, in particular, the damping region is ε -controllable in measure. The objective is to prove the existence of a global attractor for the semigroup associated to the model.*

Keywords: *Riemannian wave equations, Global Attractors, ε -sets controllable in measure.*

1. INTRODUCCIÓN

La estructura de materiales sujetos a vibraciones puede conducir a su ruptura total, en consecuencia de ello es imperativo que existan amortiguamientos

Digital Object Identifier: (only for full papers, inserted by LACCEI).
ISSN, ISBN: (to be inserted by LACCEI).
DO NOT REMOVE

localizados y optimos en medida para su estabilidad.

Sea (M, g) una variedad Riemanniana compacta con borde suave ∂M y métrica g . Con el fin de entender nuestros objetivos y resultados, primero vamos a considerar la ecuación de onda lineal

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u + \chi_\omega \partial_t u = 0 & , \text{ en } M \times \mathbb{R}^+, \\ u = 0 & , \text{ sobre } \partial M, \\ u(0) = u_0, \partial_t u(0) = u_1, \end{cases}$$

donde Δ es el operador de Laplace-Beltrami sobre M y χ_ω es la función característica de un subconjunto abierto ω de M . La energía del sistema es dada por

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_M (|\partial_t u|^2 + |\nabla u|^2) dx,$$

donde ∇ representa la conexión de Levi-Civita sobre M .

Es bien conocido que la energía $E(t)$ decae exponencialmente a cero si y solo si ω satisface la Condición Geométrica del Control (GCC), un resultado óptimo mostrado por Bardos, Lebeau y Rauch [2]. Esta condición afirma que existe $T_0 > 0$ tal que cualquier geodésica generalizada viajando con velocidad 1 ingresa a ω antes de que transcurra el tiempo T_0 . La idea de que la geodésica debe intersectar una región de control ω se consideró anteriormente para variedades sin borde por Rauch y Taylor [9]. Una distinguida característica es que ω puede ser escogido con un pequeño volumen arbitrario $\text{med}_M(\omega)$.

Una de las preocupaciones es controlar la medida de tal región de observación ω . Vamos a considerar un ejemplo simple con geometría plana. En la Figura 1, M representa un rectángulo de base 2

y altura 1. Es claro que las regiones ω_1 y ω_2 satisfacen (GCC). Aunque $\text{med}_M(\omega_1)$ puede ser tomada arbitrariamente pequeña, la medida de su borde es $\text{med}_{\partial M}(\omega_1 \cap \partial M) > 3$. Por otro lado, para ω_2 , la suma de las medidas del interior y del borde $\text{med}_M(\omega_2) + \text{med}_{\partial M}(\omega_2 \cap \partial M)$ pueden ser tomadas arbitrariamente pequeñas. Aquí, se dice que un subconjunto ω de M es ε -controlable (en medida) si dado $\varepsilon > 0$,

$$\text{med}_M(\omega) + \text{med}_{\partial M}(\omega \cap \partial M) < \varepsilon.$$

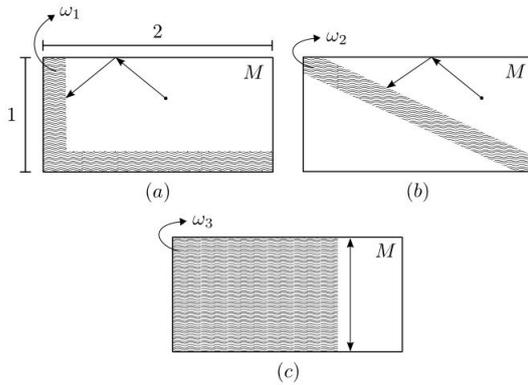


Figura 1: Sea M un rectángulo de base 2 y altura 1. Es fácil ver que las regiones ω_1 y ω_2 satisfacen (GCC). La región ω_2 es ε -controlable pero ω_1 no lo es pues $\text{med}_{\partial M}(\omega_1) > 3$. La región ω_3 no satisface (GCC) desde que M posee rayos (verticales) atrapados.

Esta definición fue descrita inicialmente por Cavalcanti et al. [3] y posteriormente detallada en profundidad por Cavalcanti et al. [4].

Estamos interesados en la dinámica a largo plazo de ondas semilineales con disipación de amortiguamiento efectiva solo en una región ε -controlable. Como es bien conocido necesitamos una propiedad de continuación única adecuada y desigualdades de observabilidad. Recordamos que los métodos usados por Bardos, Lebeau y Rauch [2] combinan finos resultados sobre la propagación de singularidades y análisis microlocal. Sus argumentos requieren que las soluciones tengan alta regularidad. Manteniendo en mente que consideramos soluciones de ecuaciones de onda semilineales con $H^2(M)$ -regularidad usaremos otro enfoque. De hecho, seguimos en parte las ideas desarrolladas en Cavalcanti [4] que está basada sobre los resultados de Triggiani y Yao [11].

Sus argumentos usan el concepto de potencial de escape y de regiones superpuestas y su objetivo es construir una región de control dividiendo el borde ∂M con respecto al signo de $\langle \nabla d, \nu \rangle$, donde ν es la normal exterior unitaria y d es un potencial de escape estratégico. Este método requiere menos regularidad y sigue las estimativas de Carleman.

La principal contribución del trabajo puede ser resumida como sigue:

- (i) Primero, resumimos los resultados más importantes de [4] mostrando la construcción de una función potencial de escape d definida en una parte V de la variedad M de modo que $M \setminus V$ es arbitrariamente pequeño. Esto permite definir en una parte V de la variedad M una región de control/amortiguamiento $\omega \supset \overline{M \setminus V}$ que es ε -controlable.
- (ii) Revisamos un resultado de controlabilidad basado en las estimativas de Carleman por Triggiani y Yao [11]. Luego siguiendo lo mostrado en [4] se resume (en one-shot) una desigualdad de observabilidad y propiedad de continuación única para una ecuación de onda lineal más un potencial, localmente amortiguado en un conjunto ε -controlable *admissible*.
- (iii) Dada M una variedad tridimensional con borde. Estudiamos las dinámicas a largo plazo de las ecuaciones de ondas semilineales dadas por

$$\partial_t^2 u - \Delta u + a(x)g(\partial_t u) + f(u) = 0 \text{ en } M \times \mathbb{R}^+,$$

con condición de borde de Dirichlet y valor inicial en $\mathcal{H} = H_0^1(M) \times L^2(M)$. El amortiguamiento no lineal $g(\partial_t u)$ es localmente lipchitziano, pues, bajo esta condición en Cavalcanti et al. [4], los autores mostraron la existencia de atractores finito dimensionales para $f(u)$ que pueden tener crecimiento crítico de Sobolev, a saber $|f(u)| \approx |u|^3$. Tanto f como g requieren tener solamente C^1 -regularidad. Entonces combinando la desigualdad de observabilidad y la reciente teoría de sistemas cuasi-estables [6], establecemos la existencia de un atractor exponencial generalizado en el sentido de Chueshov y Lasiecka [6] asumiendo $a(x) \geq a_0 > 0$ sobre alguna región ε -controlable *admissible* ω . Suposiciones detalladas y pruebas son presentadas en el trabajo. Para un mejor conocimiento, resultados

comparables solo fueron probados previamente por Ma y Seminario-Huertas [8], en un entorno euclidiano con $f \in C^2$ y ω satisfaciendo una condición de observabilidad geométrica.

En el presente trabajo solamente usamos conceptos estándar y notaciones en la geometría Riemanniana. Para más detalles referimos al lector, por ejemplo, Chavel [5]. Con respecto a los espacios de Sobolev sobre variedades referimos al lector a Cortez [7].

Conjeturamos que la metodología usada se puede aplicar a problemas de biofísica molecular como las vibraciones del ADN para obtener atractores globales en su dinámica no lineal con su correspondiente estabilidad según Cortez et al.

2. RESULTADOS PRELIMINARES

Con la finalidad de entender el problema, se enunciará diferentes resultados que serán de vital importancia para mostrar la existencia de un atractor exponencial para el semigrupo asociado al sistema. Para esto se seguirá lo mostrado en [4, 3, 11, 6].

2.1. Región de disipación óptima en medida

Para entender en su totalidad la localización geométrica de la región de disipación en el modelo, se expondrá las diferentes definiciones y propiedades que se tiene con respecto a los conjuntos ε -controlables en medida, siguiendo lo mostrado en [4].

Definición 2.1. Decimos que un subconjunto medible ω de M es ε -controlable (en medida) si dado $\varepsilon > 0$

$$\text{med}_M(\omega) + \text{med}_{\partial M}(\omega \cap \partial M) < \varepsilon,$$

donde $\text{med}_A(B)$ representa la medida de B con respecto la medida de Lebesgue definida en A . La clase de los conjuntos ε -controlables de M es denotada por $\chi_\varepsilon(M)$.

Empezamos con una versión un poco más general de una construcción geométrica de [3, Sección 6], mostrado en [4].

Teorema 2.1. Sea (M, g) una variedad Riemanniana N -dimensional conexa compacta de clase C^∞ con borde suave ∂M . Entonces, dado $\varepsilon > 0$ y $\varepsilon_0 \in (0, \varepsilon)$, los siguientes enunciados son válidos:

1. Existe un conjunto abierto $V \subset M$, con borde suave $\overline{\partial V} \cap \text{int}(M)$, que intercepta ∂M transversalmente y satisface

$$\overline{M \setminus V} \in \chi_{\varepsilon_0}(M).$$

2. Existe una función $d : M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$(d1) \quad d \in C^\infty(M),$$

$$(d2) \quad \text{Hess } d(X, X) \geq |X|_g^2, \quad \forall X \in T_x M, \quad x \in \overline{V},$$

$$(d3) \quad \inf_V |\nabla d|_g > 0, \quad \min_{\overline{V}} d > 0,$$

$$(d4) \quad \langle \nabla d, \nu \rangle_g < 0 \quad \text{sobre } \partial M \cap \overline{V}.$$

3. Existe un conjunto abierto $\omega \in \chi_\varepsilon(M)$ tal que

$$\overline{M \setminus V} \subset \omega \quad \text{y} \quad \omega \cap V \in \chi_{\varepsilon - \varepsilon_0}(M).$$

Definición 2.2. Dado $\varepsilon > 0$, la familia

$$\{\omega_\varepsilon\} = \{\omega \in \chi_\varepsilon(M) \mid \omega \text{ es dado por el Teorema 2.1 para algún } \varepsilon_0 \in (0, \varepsilon)\} \quad (1)$$

es llamada la clase de las regiones ε -controlables admisibles.

La definición anterior será usada para caracterizar la idea de región de amortiguamiento óptimo en medida.

2.2. Un resultado en One-Shot: Desigualdad de observabilidad y continuación única

A partir de la construcción de una región admisible ε -controlable en medida para la disipación del sistema, se debe obtener dos resultados de extrema importancia en el análisis a largo plazo de los sistemas dinámicos, las cuales son: Una desigualdad de observabilidad y un teorema de continuación única.

Teorema 2.2. Sea (M, g) una variedad Riemanniana compacta conexa de clase C^∞ con borde suave y sea $w \in L^2(0, T; H_0^1(M)) \cap H^1(0, T; L^2(M))$ una solución del problema

$$\begin{cases} \partial_t^2 w - \Delta w = p_0 w + p_1 \partial_t w & \text{en } M \times (0, T), \\ w = 0 & \text{sobre } \partial M \times (0, T) \end{cases} \quad (2)$$

con p_0, p_1 satisfaciendo

$$p_0 \in L^2(0, T; L^2(M)) \text{ y } p_1 \in L^\infty(0, T; L^\infty(M)) \quad (3)$$

y para cualquier solución débil $w \in L^2(0, T; H_0^1(M)) \cap H^1(0, T; L^2(M))$, existe una constante $C_T > 0$ tal que

$$\|p_0 w\|_{L^2(0, T; L^2(M))} \leq C_T \|w\|_{L^2(0, T; H_0^1(M))}. \quad (4)$$

Entonces, para cualquier región ε -controlable admisible $\omega \subset M$ tenemos:

1. *Observabilidad:* Para $T > 0$ suficientemente grande, existe una constante $k_T > 0$ tal que

$$\int_0^T \int_\omega |\nabla w|^2 dx dt \geq k_T (\|(w(0), \partial_t w(0))\|_{\mathcal{H}}^2 + \|(w(T), \partial_t w(T))\|_{\mathcal{H}}^2). \quad (5)$$

2. *Continuación única:* Para el anterior $T > 0$, si $w = 0$ en $\omega \times (0, T)$ entonces $w = 0$ en $M \times [0, \infty)$.

3. DINÁMICA A LARGO PLAZO

Esta sección está dedicada a establecer la existencia de atractores globales para el semigrupo de soluciones de una ecuación de onda presentando amortiguamiento localmente distribuido sobre regiones ε -controlables admisibles y términos de forzamiento no lineal con crecimiento crítico de Sobolev. Para esto seguiremos lo mostrado en [4].

3.1. Existencia de atractores globales

Sea (M, g) una variedad compacta conexa 3-dimensional de clase C^∞ , con borde suave ∂M . Nos interesa estudiar la ecuación de onda semilineal

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u + a(x)g(\partial_t u) + f(u) = 0, & \text{en } M \times (0, \infty) \\ u = 0, & \text{sobre } \partial M \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad \partial_t u(x, 0) = u_1(x), & x \in M. \end{cases} \quad (6)$$

Asumimos que

$$\begin{aligned} f &\in C^1(\mathbb{R}), \quad f(0) = 0, \\ |f'(z)| &\leq C_f(1 + |z|^2), \quad \forall z \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (7)$$

para alguna constante $C_f > 0$,

$$\liminf_{|z| \rightarrow \infty} \frac{f(z)}{z} > -\lambda_1, \quad (8)$$

donde $\lambda_1 > 0$ es el primer autovalor de $-\Delta$ en M con la condición homogénea de borde de Dirichlet, y

$$\begin{aligned} g &\in C^1(\mathbb{R}), \quad g(0) = 0, \\ m_1 &\leq g'(z) \leq m_2, \quad \forall z \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (9)$$

para algunas constantes $m_1, m_2 > 0$. Para el coeficiente de amortiguamiento, existe algún $a_0 > 0$,

$$a \in L^\infty(M), \quad a \geq a_0 \text{ a.e. en } \omega, \quad (10)$$

donde ω es un conveniente conjunto abierto de M .

Recordemos la notación dada en la introducción para el espacio de fase natural para el problema. $\mathcal{H} = H_0^1(M) \times L^2(M)$, equipado con la norma $\|(u, v)\|_{\mathcal{H}}^2 = \|\nabla u\|_{L^2(M)}^2 + \|v\|_{L^2(M)}^2$.

Como veremos en el Teorema 3.2, bajo las suposiciones anteriores, el problema (6) está bien colocado en \mathcal{H} . Luego su operador solución define un C^0 semigrupo no lineal $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ sobre \mathcal{H} . A menudo el correspondiente sistema dinámico continuo generado por el problema (6) es denotado por $(\mathcal{H}, S(t))$.

OBS 3.1. Recordemos que un atractor global para un sistema dinámico $(\mathcal{H}, S(t))$ es un conjunto compacto $\mathcal{A} \subset \mathcal{H}$ que es completamente invariante y atrae conjuntos acotados de \mathcal{H} . También, dado un conjunto compacto $K \subset \mathcal{H}$ su dimensión fractal es definida por

$$\dim_F K = \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(n_\epsilon)}{\ln(1/\epsilon)},$$

donde n_ϵ es el mínimo número de bolas cerradas de radio ϵ necesarias para cubrir K . Véase [1, 10] o [6, Capítulo 7].

Teorema 3.1. (Atractores globales). *Bajo las suposiciones (7)-(9), dado $\varepsilon > 0$, asuma que (10) se satisface para algún conjunto ε -controlable admisible $\omega \subset M$. Entonces las dinámicas del problema (6) tienen un atractor global \mathcal{A} con dimensión fractal finita y regularidad $H^2(M) \times H_0^1(M)$.*

OBS 3.2. La prueba del Teorema 3.1 está dividida en tres partes. Primero, mostramos que nuestro sistema es gradiente usando la propiedad de continuación única en el Teorema 2.2. Luego aplicamos

una reciente teoría de sistemas cuasiestables ([6]) y la desigualdad de observabilidad en el Teorema 2.2 para probar la compacidad asintótica del sistema. Finalmente, aplicando un resultado clásico de existencia (véase [6, Corolario 7.5.7]) obtenemos un atractor global caracterizado por $\mathcal{A} = \mathbb{M}^u(\mathcal{N})$, es decir, por la variedad inestable del conjunto \mathcal{N} de soluciones estacionarias de (6).

3.2. Buena colocación y estimativas de energía

Vamos a escribir

$$U = \begin{bmatrix} u \\ \partial_t u \end{bmatrix}, \quad \mathbb{A} = \begin{bmatrix} 0 & -I \\ -\Delta & a(x)g(\cdot) \end{bmatrix},$$

$$\mathbb{F} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ f(\cdot) & 0 \end{bmatrix}.$$

Entonces el problema (6) es equivalente al problema de Cauchy

$$\partial_t U + \mathbb{A}U + \mathbb{F}U = 0, \quad U(0) = \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \end{bmatrix},$$

definido en \mathcal{H} con dominio

$$D(\mathbb{A}) = (H^2(M) \cap H_0^1(M)) \times H_0^1(M).$$

De la suposición (7) es bien conocido que \mathbb{F} es localmente lipschitziana en \mathcal{H} y entonces la existencia de soluciones débiles y fuertes se sigue de la teoría de semigrupos. El siguiente resultado de existencia es esencialmente probado en [4].

Teorema 3.2. (Buena colocación). *Asuma que (7)-(10) son válidos. Entonces*

1. *Para el dato inicial $(u_0, u_1) \in \mathcal{H}$, el problema (6) posee una única solución débil*

$$u \in C(\mathbb{R}^+; H_0^1(M)) \cap C^1(\mathbb{R}^+; L^2(M)). \quad (11)$$

2. *Para el dato inicial $(u_0, u_1) \in D(\mathbb{A})$, el problema (6) posee una única solución fuerte*

$$u \in C(\mathbb{R}^+; H^2(M) \cap H_0^1(M)) \cap C^1(\mathbb{R}^+; H_0^1(M)).$$

3. *Dado $T > 0$ y un conjunto acotado B de \mathcal{H} , existe una constante $D_{BT} > 0$ tal que para cualquier par de valores iniciales $z_0^i \in B$,*

$i = 1, 2$, las correspondientes soluciones $z^i = (u^i, \partial_t u^i)$ satisfacen

$$\|z^1(t) - z^2(t)\|_{\mathcal{H}}^2 \leq D_{BT} \|z_0^1 - z_0^2\|_{\mathcal{H}}^2, \quad \forall t \in [0, T], \quad (12)$$

donde $D_{BT} > 0$ es constante.

La energía total del problema (6) es definida por

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2} \|(u(t), \partial_t u(t))\|_{\mathcal{H}}^2 + \int_M F(u(t)) dx, \quad (13)$$

con $F(u) = \int_0^u f(r) dr$. Para evitar confusión, a veces escribiremos \mathcal{E}_u en lugar de \mathcal{E} . Finalizamos esta sección con algunas útiles estimativas de energía.

Lema 3.3. *Bajo las suposiciones del Teorema 3.2*

1. *La energía total es no creciente y*

$$\frac{d\mathcal{E}_u}{dt}(t) = - \int_M a(x)g(\partial_t u) \partial_t u dx, \quad t \geq 0 \quad (14)$$

2. *Existen las constantes $\beta, C_1, C_2 > 0$ tales que*

$$\beta \|(u(t), \partial_t u(t))\|_{\mathcal{H}}^2 - C_1 \leq \mathcal{E}_u(t) \leq C_2(1 + \|(u(t), \partial_t u(t))\|_{\mathcal{H}}^4), \quad t \geq 0. \quad (15)$$

3. *Existe una constante $C_0 > 0$ tal que para cualquier dato inicial $(u_0, u_1) \in \mathcal{H}$ y $t \geq 0$*

$$\|(u(t), \partial_t u(t))\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C_0(1 + \|(u_0, u_1)\|_{\mathcal{H}}^4) \quad (16)$$

3.3. Estructura gradiente

Un sistema dinámico $(\mathcal{H}, S(t))$ es gradiente si posee un funcional de Lyapunov, esto es, una función $\Psi : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\Psi(S(t)z)$ es no creciente y si

$$\Psi(S(t)z) = \Psi(z); \quad \forall t \geq 0, \quad (17)$$

entonces z es un punto fijo de $S(t)$.

Cavalcanti et al. [4] mostraron que el sistema $(\mathcal{H}, S(t))$ posee una estructura gradiente (véase Teorema 4.3) a partir de la desigualdad de observabilidad (5). En particular los autores mostraron el siguiente resultado.

Teorema 3.4. (Estructura gradiente). *Bajo las suposiciones del Teorema 3.1 el sistema dinámico $(\mathcal{H}, S(t))$ asociado al problema (6) es gradiente. Además, la energía total $\mathcal{E}(t)$ genera un funcional de Lyapunov.*

3.4. Cuasiestabilidad

En orden de probar la suavidad asintótica y otras propiedades de atractores globales, aplicamos una reciente teoría de sistemas cuasiestables [6] que es muy útil para estudiar dinámicas a largo plazo de ecuaciones de onda no lineales. Su marco está basado en un sistema $(H, S(t))$ con $H = X \times Y$, donde X e Y son espacios de Banach y $X \hookrightarrow Y$ compactamente. Además, dado $z_0 = (u_0, u_1) \in H$, la trayectoria $S(t)z_0 = (u(t), \partial_t u(t))$ satisface

$$u \in C^0(\mathbb{R}^+; X) \cap C^1(\mathbb{R}^+; Y).$$

Para presentar la definición de cuasiestabilidad, dado un conjunto B y $z^1, z^2 \in B$, denotemos las correspondientes trayectorias como

$$S(t)z^i = (u^i(t), \partial_t u^i(t)), \quad i = 1, 2, \quad t \geq 0.$$

Bajo estas premisas, el sistema dinámico $(H, S(t))$ es llamado cuasiestable en un conjunto $B \subset H$ si existen constantes positivas ζ y C_B tales que para cualquier $z^1, z^2 \in B$,

$$\|S(t)z^1 - S(t)z^2\|_H^2 \leq e^{-\zeta t} \|z^1 - z^2\|_H^2 + C_B \sup_{s \in [0, t]} \|u^1(s) - u^2(s)\|_W^2, \quad (18)$$

donde $W \subset Y$ es un espacio de Banach con inmersión compacta $X \hookrightarrow W$.

OBS 3.3. Los sistemas cuasiestables tienen tres características principales con respecto a los atractores globales.

- (a) Si un sistema es cuasiestable sobre cualquier conjunto acotado positivamente invariante, entonces es asintóticamente suave (véase [6, Proposición 7.9.4]).
- (b) Si un sistema posee un atractor global \mathcal{A} y es cuasiestable sobre \mathcal{A} , entonces ese atractor tiene dimensión fractal finita (véase [6, Teorema 7.9.6]).
- (c) La constante $C_B > 0$ en (18) puede ser reemplazada por una L^1_{loc} función. Sin embargo, en el caso de que C_B es una constante, las trayectorias completas $(u(t), \partial_t u(t))$ dentro del atractor global tienen otras regularidades de tiempo, a saber

$$\|\partial_t u(t)\|_X + \|\partial_t^2 u(t)\|_Y \leq R, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (19)$$

donde $R > 0$ es una constante (véase [6, Teorema 7.9.8]).

El siguiente Teorema muestra que nuestro sistema es cuasiestable sobre cualquier conjunto acotado invariante hacia adelante. La demostración del resultado se remite a [4, Teorema 4.4].

Teorema 3.5. (Cuasiestabilidad). *El sistema dinámico $(\mathcal{H}, S(t))$ generado por el problema (6) es cuasiestable sobre cualquier conjunto B de \mathcal{H} acotado positivamente invariante. Más precisamente, existen constantes positivas ζ y C_B tales que cualquier par de soluciones dadas $z^i = (u^i, \partial_t u^i)$, $i = 1, 2$ del problema (6) con dato inicial $z_0^1, z_0^2 \in B$, cumple*

$$\|z^1(t) - z^2(t)\|_{\mathcal{H}}^2 \leq e^{-\zeta t} \|z_0^1\|_{\mathcal{H}}^2 + C_B \sup_{s \in [0, t]} \|u^1(s) - u^2(s)\|_{L^3(M)}^2, \quad t \geq 0. \quad (20)$$

Note que (20) es una desigualdad de cuasiestabilidad como (18) desde que $X = H_0^1(M)$ está compactamente inmerso en $W = L^3(M)$.

La prueba de este Teorema está dado a través de varios resultados previos. Primero vemos que el operador solución $S(t)$ del problema (6) definido sobre el espacio de fase \mathcal{H} satisface (11) y consecuentemente nuestro sistema $(\mathcal{H}, S(t))$ cae en el marco de los sistemas cuasiestables. Por lo tanto para probar la cuasiestabilidad de conjuntos de \mathcal{H} acotados invariantes hacia adelante es suficiente probar la desigualdad (20). Para este fin, haciendo $w = u^1 - u^2$, vemos que $(w, \partial_t w)$ satisface la ecuación

$$\begin{cases} \partial_t^2 w - \Delta w = p_0 w + p_1 \partial_t w, & \text{en } M \times (0, \infty), \\ w = 0, & \text{sobre } \partial M \times (0, \infty), \\ w(0) = w_0, \quad \partial_t w(0) = w_1, & \text{en } M, \end{cases} \quad (21)$$

donde $(w_0, w_1) = (z_0^1 - z_0^2, \partial_t z_0^1 - \partial_t z_0^2)$,

$$\begin{aligned} p_0 &= -f'(\alpha u^1 + (1 - \alpha)u^2) \text{ y} \\ p_1 &= -ag'(\beta \partial_t u^1 + (1 - \beta)\partial_t u^2), \end{aligned} \quad (22)$$

$\alpha, \beta \in [0, 1]$. La energía del sistema es definida por

$$E(t) = \frac{1}{2} \|(w(t), \partial_t w(t))\|_{\mathcal{H}}^2 = \frac{1}{2} \|z^1(t) - z^2(t)\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Vemos que

$$\frac{d}{dt} E \leq -a_0 m_1 \|\partial_t w\|_{L^2(\omega)}^2 - \int_M p_0 w \partial_t w dx. \quad (23)$$

En orden de establecer la estimativa (20) vamos a usar el método de la energía perturbada. Vamos a definir

$$\phi(t) = \int_M w(t) \partial_t w(t) dx, \quad \psi(t) = \int_\omega w(t) \partial_t w(t) dx,$$

y

$$\Phi(t) = \mu E(t) + \eta \phi(t) + \psi(t),$$

donde $\mu, \eta > 0$ serán fijadas más adelante.

Es así que en Cavalcanti et al. [4] muestran que bajo las suposiciones y notaciones anteriores,

1. Para μ suficientemente grande y $\eta \leq 1$ tenemos

$$\beta_1 E(t) \leq \Phi(t) \leq \beta_2 E(t), \quad t \geq 0, \quad (24)$$

$$\text{con } \beta_1 = \mu - \frac{2}{\sqrt{\lambda_1}} \text{ y } \beta_2 = \mu + \frac{2}{\sqrt{\lambda_1}}.$$

2. Existe una constante $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{dt} &\leq -E - \frac{1}{2} \|\nabla w\|_{L^2(M)}^2 + 2 \|\partial_t w\|_{L^2(M)}^2 \\ &+ C \|w\|_{L^3(M)}^2 + \int_M p_0 |w|^2 dx, \end{aligned} \quad (25)$$

3. Existe una constante $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{dt} &\leq -\|\nabla w\|_{L^2(\omega)}^2 + 2 \|\partial_t w\|_{L^2(\omega)}^2 \\ &+ C \|w\|_{L^3(M)}^2 + \int_\omega p_0 |w|^2 dx. \end{aligned}$$

y por lo tanto, a partir de (23) y tomando $\mu > 2/(a_0 m_1)$ se sigue que

$$\frac{d}{dt} \Phi(t) \leq -\eta E(t) + Z(t), \quad t \geq 0,$$

donde

$$\begin{aligned} Z &= -\frac{3}{2} \|\nabla w\|_{L^2(\omega)}^2 - \mu \int_M p_0 w w_t dx + 2\eta \|w_t\|_{L^2(M)}^2 \\ &+ 2 \int_M |p_0 w^2| dx + C_B \|w\|_{L^3(M)}^2. \end{aligned}$$

Luego usando (7) y el lema de Gronwall, se obtiene

$$\phi(t) \leq e^{-\frac{\eta}{\beta_2} t} \phi(0) + \int_0^t e^{-\frac{\eta}{\beta_2} (t-s)} Z(s) ds. \quad (26)$$

Finalmente a partir de las estimativas de Strichartz sobre $p_0 w$ se tiene el resultado.

3.5. Atractor global

Prueba del Teorema 3.1. (a) Se ha probado que el sistema es asintóticamente suave y gradiente. También, notamos que $\Psi(z) \rightarrow \infty$ si y solo si $\|z\|_{\mathcal{H}} \rightarrow \infty$. Todo se reduce a mostrar que las soluciones estacionarias de (6) están uniformemente acotadas. De hecho, si

$$\|\nabla u\|_{L^2(M)}^2 + \int_M f(u) u dx = 0,$$

usando (8) podemos escribir

$$\int_M f(u) u dx \geq -\frac{\lambda_1}{4} \|u\|_{L^2(M)}^2 - c_f,$$

para alguna constante $c_f > 0$. Esto da $\|\nabla u\|_2^2 \leq 2c_f$, que muestra que \mathcal{N} está acotada. Entonces la existencia de un atractor global \mathcal{A} se sigue de un resultado clásico (véase [6, Corolario 7.5.7]). (b) El Teorema 3.5 muestra que nuestro sistema es cuasiestable sobre el atractor global \mathcal{A} . Por lo tanto, como se mencionó en la observación 3.3, \mathcal{A} tiene dimensión fractal finita de [6, Teorema 7.9.6]. (c) Para ver la regularidad del atractor \mathcal{A} , sabemos de (19) que cualquier trayectoria completa $(u(t), \partial_t u(t))$ satisface

$$\|\partial_t u(t)\|_{H_0^1(M)} + \|\partial_t^2 u(t)\|_{L^2(M)} \leq R, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Entonces, la ecuación (6) da que $-\Delta u \in L^2(M)$ y por lo tanto $(u, \partial_t u) \in (H^2(M) \cap H_0^1(M)) \times H_0^1(M)$. Esto completa el Teorema 3.1.

4. CONCLUSIONES

1. El sistema (9) modela las vibraciones de ondas localmente amortiguadas expuestas a fuerzas estructurales críticas en el sentido de Sobolev sobre un dominio espacial Riemanniano. En este nuevo contexto, el control en medida de la localización espacial del amortiguador es óptimo en el sentido de los conjuntos ε -controlables en medida.
2. En este nuevo ambiente se estudió las regiones compactas de estabilización generadas por las fuerzas no conservativas comprobando la existencia de un atractor exponencial para el sistema (9). Es importante destacar que este resultado es novedoso sobre este escenario.

3. En el trabajo se ha considerado un amortiguamiento localizado débil no lineal donde la no linealidad dada por $g(\cdot)$ es bien comportada. En este sentido esta investigación es una invitación a explorar restricciones más débiles sobre g en el contexto antes mencionado.

REFERENCIAS

- [1] A. Babin and M. Vishik, *Attractors of Evolution Equations, Studies in Mathematics and its Applications 25*, North-Holland, Amsterdam, 1992.
- [2] C. Bardos, G. Lebeau and J. Rauch, “Sharp sufficient conditions for the observation, control, and stabilization of waves from the boundary”, *SIAM J. Control Optim.* 30, pp. 1024-1065, 1992.
- [3] M. Cavalcanti, V. Domingos Cavalcanti, R. Fukuoka and J. A. Soriano, “Asymptotic stability of the wave equation on compact manifolds and locally distributed damping: a sharp result”, *Arch. Ration. Mech. Anal.* 197, pp. 925-964, 2010.
- [4] M. Cavalcanti, T. Ma, P. Marín-Rubio, P. Seminario-Huertas, “Dynamics of Riemann waves with sharp measure-controlled damping”, aceptado para publicación, ArXiv: 1908.04814.
- [5] I. Chavel, *Isoperimetric Inequalities: Differential Geometric and Analytic Perspectives*, Cambridge University Press, 2001.
- [6] I. Chueshov and I. Lasiecka, *Von Karman Evolution Equations. Well-Posedness and Long-Time Dynamics*, Springer Monographs in Mathematics, Springer, New York, 2010.
- [7] H. Cortez, “Mobile breathers in a nonlinear model for DNA breathing”, *Ecletica Quimica Journal*, Sao Paulo, 2017.
- [8] T. Ma and P. Seminario-Huertas, “Attractors for semilinear wave equations with localized damping and external forces”, *Communications on Pure and Applied Analysis.* 19, pp. 2219-2233, 2020.
- [9] J. Rauch and M. Taylor, “Exponential decay of solutions to hyperbolic equations in bounded domains”, *Indiana Univ. Math. J.* 24, pp. 79-86, 1974.
- [10] R. Temam, *Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics, Applied Mathematical Sciences 68*, Springer-Verlag, New York, 1997.
- [11] T. Triggiani and P. Yao, “Carleman estimates with no lower-order terms for general Riemann wave equations. Global uniqueness and observability in one shot”, *Special issue dedicated to the memory of Jacques-Louis Lions, Appl. Math. Optim.* 46, pp. 331-375, 2002.