

Free vibration finite element analysis of composite laminated beams

I. Balarezo, Bachiller, E. Corilla, Bachiller, R. Arciniega, Ph.D.

Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas (UPC), Perú, u201620289@upc.edu.pe, u201619472@upc.edu.pe,
roman.arciniega@upc.edu.pe

Abstract: This research focuses on the free vibration analysis of laminated composite beams using the finite element method. The formulation utilizes an improved first order shear deformation theory, which considers 3D constitutive equations and thickness stretching. The finite element model is derived by the Hamilton's principle and the fundamental field variables are approximated with high-order interpolations functions to avoid shear locking. Applications are done to laminated composite beams. A computational program is implemented in MATLAB. Results are compared with others formulations obtained in the literature to validate the model. A parametric analysis is carried out to study free vibration response under different number layers, layer scheme and fiber orientations. The formulation proved to be quite accurate with very satisfactory results. sulta ser bastante precisa con resultados muy satisfactorios.

Keywords —IFSDT, Hamilton's principle, Finite element Method, MATLAB, Composite laminate

Digital Object Identifier (DOI): http://dx.doi.org/10.18687/LACCEI2021.1.1.342 ISBN: 978-958-52071-8-9 ISSN: 2414-6390
--

Vibración libre de vigas laminadas compuestas usando el Método de los Elementos Finitos

I. Balarezo, Bachiller, E. Corilla, Bachiller, R. Arciniega, Ph.D.

Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas (UPC), Perú, u201620289@upc.edu.pe, u201619472@upc.edu.pe, roman.arciniega@upc.edu.pe

Resumen— Esta investigación se centra en el análisis de vibración libre de vigas compuestas laminadas utilizando el método de elementos finitos. La formulación utiliza una teoría mejorada de la deformación por corte de primer orden (IFSFT siglas en inglés), que considera ecuaciones constitutivas 3D y estiramiento del espesor. El modelo de elementos finitos se deriva del principio de Hamilton y las variables de campo fundamentales se aproximan con funciones de interpolación de alto orden para evitar el locking. Las aplicaciones se hacen a vigas compuestas laminadas. Se implementa un programa computacional en MATLAB. Los resultados se comparan con otras formulaciones obtenidas en la literatura para validar el modelo. Se presenta un análisis paramétrico para estudiar la respuesta a la vibración bajo diferentes números de láminas, configuración de láminas y orientaciones de las fibras. La formulación resulta ser bastante precisa con resultados muy satisfactorios.

Palabras Clave— IFSFT, Principio de Hamilton, Elementos Finitos, MATLAB, Material Compuesto Laminado

I. INTRODUCCIÓN

Los materiales compuestos laminados (formados por láminas paralelas apilables) son muy resistentes y menos pesados. Asimismo, tienen una deformación cortante significativa que no puede ser analizada por teorías clásicas como Euler-Bernoulli que desprecia la deformación cortante y la inercia rotacional. Para ello, Abramovich [1] ha concluido que la teoría clásica no puede predecir las frecuencias naturales de las vigas compuestas laminadas, ya que el efecto cortante en las mismas es más significativo que en las vigas homogéneas, debido a la alta relación entre el módulo de elasticidad y el módulo de cortante transversal. Por lo tanto, las teorías mejoradas son críticas para el análisis de casos de materiales compuestos. Chen y Yang [2] fue la primera en introducir el método de elementos finitos para predecir la flexión y la vibración libre de vigas compuestas laminadas, incluida la deformación por cortante.

El uso de estos nuevos materiales compuestos para muchas aplicaciones (construcción civil, industria aeronáutica, medicina, industria automotriz) se ha incrementado en los últimos años y todo indica que este crecimiento continuará en el futuro. Entre sus aplicaciones recientes encontramos: la construcción de estructuras con materiales compuestos (MC), la TORAYCA BRASIL que fabrica laminados de fibra de carbono a base de poliacrilonitrilo, etc. En Argentina, como CMEARGENTINA que fabrica materiales compuestos de fibra de vidrio que tienen buena resistencia a la corrosión, gran

resistencia mecánica aliada a bajo peso y propiedades dieléctricas. En Perú, su uso es relativamente limitado en comparación con otros países en el campo estructural. A pesar de ello, lo encontramos principalmente en el campo de la medicina y la construcción. Uno de los MC más utilizados son los materiales compuestos de fibra de vidrio, así como las fibras compuestas de cabuya e ichu. En otras partes del mundo, tienen mayores usos de los MC en comparación entre los casos de otros países iberoamericanos.

En la literatura existen diferentes trabajos que estudian la vibración libre de una viga laminada de material compuesto. Estos estudios evidenciaron, tal como, Khdeir y Reddy [3] los efectos de inercia rotativa y la deformación por cortante. En efecto, diferentes trabajos usan varios métodos para hallar la frecuencia natural de vibración libre de flexión en vigas de material compuesto laminado, como muestran Chandrashekhara, et al. [4], Eisenberger et al. [5], Abramovich y Livshits [6] y Madabhushi-Raman y Davalos [7].

El objetivo de este trabajo es estudiar el comportamiento de las vigas con vibración libre mediante el principio de Hamilton. La formulación del campo de desplazamiento se basa en una teoría mejorada de la deformación por corte de primer orden utilizando el método de los elementos finitos. Las propiedades del material de la viga laminada varían a lo largo del espesor. Se considera para los ejemplos una masa de un material compuesto, como caso típico, 6 grafito / epoxi. Se llevaron a cabo ejemplos para dos condiciones de borde diferentes: soporte simple – simple y fijo - libre. Los resultados numéricos y la precisión de la formulación se han comparado y validado con otras investigaciones encontradas en la literatura.

II. FORMULACION TEORICA

A. Teoría Mejorada de la deformación por Corte de Primer Orden (IFSFT)

La teoría de primer orden de deformación por corte considera las siguientes hipótesis: (1) Las secciones no permanecen planas, sino que poseen una deformación o concavidad cuadrática, (2) Existe dos giros en la sección debido tanto a la deformación axial y a la deformación vertical, (3) No existe alargamiento de la sección, por tanto, las deformaciones en la dirección del peralte y su perpendicular son despreciables. Teniendo en consideración estas hipótesis se representa el campo de desplazamiento.

Digital Object Identifier (DOI):
<http://dx.doi.org/10.18687/LACCEI2021.1.1.342>
ISBN: 978-958-52071-8-9 ISSN: 2414-6390

donde $\mathbf{u}_0(x_1)$ y $\mathbf{w}_0(x_1)$ son desplazamiento axial y transversal respectivamente, $\boldsymbol{\varphi}_1$ y $\boldsymbol{\varphi}_3$ son la rotación axial y transversal de

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1(x_1, x_3) &= \mathbf{u}_0(x_1) - \boldsymbol{\varphi}_1(x_1) \cdot (x_3) \\ \mathbf{u}_2(x_1, x_3) &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

$$\mathbf{u}_3(x_1, x_3) = \mathbf{w}_0(x_1) + \boldsymbol{\varphi}_3(x_1) \cdot (x_3) - \boldsymbol{\psi}_3(x_1) \cdot (x_3)^2,$$

la sección transversal y, $\boldsymbol{\psi}_3(x_1)$ es una cuadrática deformación en la altura de la sección transversal de la viga.

Al remplazar el campo de desplazamiento en el tensor de deformación de Green-Lagrange resulta lo siguiente:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_i = \boldsymbol{\varepsilon}_i^{(0)} + \boldsymbol{\varepsilon}_i^{(1)}(x_3), \quad (2)$$

B. Principio de Hamilton

El principio de Hamilton establece que es más conveniente operar con magnitudes energéticas. Para analizar el problema de vibración libre esta componente se hace igual a cero.

$$\int \mathbf{J} dt = 0. \quad (3)$$

donde

$$\mathbf{J} = \delta(\mathbf{K} - \mathbf{W}_i) + \delta \mathbf{W}_e. \quad (4)$$

donde δ denota la variación producida por un desplazamiento virtual (infinitésimo) a partir de la solución exacta $\mathbf{u}(t)$; \mathbf{K} es la energía cinética del sistema; \mathbf{W}_i es la energía de deformación elástica, y $\delta \mathbf{W}_e$ es el trabajo virtual que realizan las fuerzas no conservativas en la variación de la función $\mathbf{u}(t)$. Los límites de la integral son dos instantes distintos, en los cuales dicha variación es nula ($\delta \mathbf{u} = 0$ in $t = t_1$ y $t = t_2$). Al expandir la ecuación resulta lo siguiente.

$$\int_{t_1}^{t_2} [\delta \mathbf{K} - \delta \mathbf{W}_i + \delta \mathbf{W}_e] dt = 0. \quad (5)$$

C. Vigas de Material Compuesto

Para el estudio de este material partiremos a partir de La ley de Hooke generalizada que relaciona las tensiones con las deformaciones, al ser expresa en la notación de Voight se puede escribir mediante la siguiente expresión:

$$\boldsymbol{\sigma}_i = \mathbf{Q}_{ij} \boldsymbol{\varepsilon}_j. \quad (6)$$

Al expresar matricialmente la relación tensión-deformación invertida se reduce a

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix}. \quad (7)$$

donde, \mathbf{Q}_{ij} son las rigideces reducidas de la lámina que están relacionadas con los componentes de la matriz de material y las constantes elásticas.

$$Q_{11} = \frac{S_{22}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} Q_{12} = Q_{21} &= \frac{S_{12}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2} = \frac{\nu_{12}E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \\ Q_{22} &= \frac{S_{11}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \\ Q_{66} &= \frac{1}{S_{66}} = G_{12}, \end{aligned}$$

Este tipo de materiales depende de la orientación de las láminas, por ello se debe calcular componente de la matriz del material de la lámina transformada $\bar{\mathbf{Q}} = [\mathbf{T}]^{-1}[\mathbf{Q}][\mathbf{T}]$ y esta se define como:

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11} &= Q_{11} \cos^4 \theta + Q_{22} \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta, \\ \bar{Q}_{12} = \bar{Q}_{21} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{12}(\cos^4 \theta + \sin^4 \theta), \\ \bar{Q}_{16} = \bar{Q}_{61} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \cos^3 \theta \sin \theta - (Q_{22} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta, \\ \bar{Q}_{26} = \bar{Q}_{62} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta - (Q_{22} - Q_{12} - 2Q_{66}) \cos^3 \theta \sin \theta, \\ \bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{66}(\cos^4 \theta + \sin^4 \theta), \end{aligned} \quad (9)$$

A partir de esta componente se obtiene los valores de $\mathbf{A}_{11}, \mathbf{A}_{13}, \mathbf{A}_{33}, \mathbf{A}_{55}, \mathbf{B}_{11}, \mathbf{D}_{11}, \mathbf{D}_{13}, \mathbf{D}_{33}, \mathbf{D}_{55}$ de la siguiente forma:

$$[\mathbf{A}_{ij}, \mathbf{B}_{ij}, \mathbf{D}_{ij}] = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \bar{Q}_{ij} \varepsilon_{ij} dz, \quad (10)$$

C. Trabajo Virtual Interno

El trabajo virtual interno se expresa como:

$$\delta \mathbf{W}_I = \int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV, \quad (11)$$

Los esfuerzos resultantes se definen de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mathbf{N1} &= A_{11} \varepsilon_1^{(0)} + B_{11} \varepsilon_1^{(1)}, \\ \mathbf{N3} &= A_{13} \varepsilon_1^{(0)} + A_{33} \varepsilon_1^{(1)}, \\ \mathbf{M1} &= D_{13} \varepsilon_3^{(1)} + D_{11} \varepsilon_1^{(1)}, \\ \mathbf{M3} &= D_{13} \varepsilon_1^{(1)} + D_{33} \varepsilon_3^{(1)}, \\ \mathbf{N5} &= AKS(A_{55} \varepsilon_5^{(0)} + A_{55} \varepsilon_5^{(1)}), \\ \mathbf{M5} &= AKS(D_{55} \varepsilon_5^{(0)} + D_{55} \varepsilon_5^{(1)}), \end{aligned} \quad (12)$$

Finalmente, el trabajo virtual queda expresada del siguiente modo:

$$0 = \int_{x_1} \left\{ \left[A_{11} \frac{du}{dx_1} \frac{d\delta u}{dx_1} + A_{13} \frac{d\delta u}{dx_1} \varphi_3 + D_{11} \frac{d\varphi_1}{dx_1} \frac{d\delta\varphi_1}{dx_1} \right. \right. \\ \left. \left. + 2 \cdot D_{13} \frac{d\varphi_1}{dx_1} \frac{d\delta\varphi_1}{dx_1} + A_{13} \frac{du}{dx_1} \varphi_3 \right. \right. \\ \left. \left. + A_{33} \varphi_3 \varphi_3 + 2 \cdot D_{13} \frac{d\varphi_1}{dx_1} \psi_3 \right. \right. \\ \left. \left. + 4 \cdot D_{13} \psi_3 \cdot \psi_3 + K_S A_{55} \frac{d\omega}{dx_1} \frac{d\delta\omega}{dx_1} \right. \right. \\ \left. \left. + K_S A_{55} \frac{d\delta\omega}{dx_1} \varphi_1 + K_S A_{55} \frac{d\omega \cdot \varphi_1}{dx_1} \right. \right. \\ \left. \left. + K_S A_{55} \varphi_1 \varphi_1 + K_S D_{55} \frac{d\varphi_3}{dx_1} \right] \right\} dx_1, \quad (13)$$

Por el principio de Hamilton se obtiene:

$$\int_{t_1}^{t_2} [\delta K - \delta W_i + \delta W_e] dt = 0. \quad (14)$$

Se analiza, primero, el término cinético:

$$\int_{t_1}^{t_2} [\delta K] dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta \left[\frac{1}{2} \int_v \rho \cdot \dot{u} \cdot \dot{u} dv \right] dt \\ \approx \int_{t_1}^{t_2} \delta \left[\frac{1}{2} \int_{v_0} \rho_0 \cdot \dot{u} \cdot \dot{u} dv_0 \right] dt. \quad (15)$$

Asimismo, se asume un movimiento periódico:

$$\mathbf{u}(x_j, t) = \mathbf{u}^0(x_j) e^{i\omega t}. \quad (16)$$

Al reemplazar en la ecuación de energía cinética se obtiene:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta \mathbf{k} dt = \int_{t_1}^{t_2} e^{2i\omega t} \left[\int_v \rho \omega^2 u^0 \delta u^0 dV \right] dt. \quad (17)$$

donde, $\int_{t_1}^{t_2} e^{2i\omega t} dt$ es diferente de cero y es factorizado de la ecuación anterior

$$\int_v \rho \cdot \omega^2 \cdot u^0 \delta u^0 dv \\ = \omega^2 \int_x [(u\delta u)I^{(0)} \\ + (w\delta w)I^{(2)} \\ + (\psi_3\delta\psi_3)I^{(4)}] dx_1. \quad (18)$$

donde:

$$[I^{(0)}, I^{(2)}, I^{(4)}] = \int_{x^2} \int_{x^3} \rho(x^3)^j dx^3 dx^2, \quad (19)$$

Finalmente, el principio de Hamilton se reduce en la siguiente forma, ya que se analiza vibración libre:

$$\int_v \rho \cdot \omega^2 \cdot u^0 \delta u^0 dv - \int_v \sigma_{ij} \cdot \delta \epsilon_{ij} dv = 0. \quad (20)$$

Expandiendo la expresión:

$$0 = \omega^2 \int_x [(u\delta u)I^{(0)} + (w\delta w)I^{(2)} \\ + (\psi_3\delta\psi_3)I^{(4)}] dx_1 - \int_{x^1} \left\{ \left[A_{11} \frac{du}{dx_1} \frac{d\delta u}{dx_1} \right. \right. \\ \left. \left. + A_{13} \frac{d\delta u}{dx_1} \varphi_3 + D_{11} \frac{d\varphi_1}{dx_1} \frac{d\delta\varphi_1}{dx_1} \right. \right. \\ \left. \left. + 2 \cdot D_{13} \frac{d\varphi_1}{dx_1} \frac{d\delta\varphi_1}{dx_1} + A_{13} \frac{du}{dx_1} \varphi_3 \right. \right. \\ \left. \left. + A_{33} \varphi_3 \varphi_3 + 2 \cdot D_{13} \frac{d\varphi_1}{dx_1} \psi_3 \right. \right. \\ \left. \left. + 4 \cdot D_{13} \psi_3 \cdot \psi_3 + K_S A_{55} \frac{d\omega}{dx_1} \frac{d\delta\omega}{dx_1} \right. \right. \\ \left. \left. + K_S A_{55} \frac{d\delta\omega}{dx_1} \varphi_1 + K_S A_{55} \frac{d\omega \cdot \varphi_1}{dx_1} \right. \right. \\ \left. \left. + K_S A_{55} \varphi_1 \varphi_1 + K_S D_{55} \frac{d\varphi_3}{dx_1} \right] \right\}, \quad (21)$$

III. MODELO DE ELEMENTOS FINITOS

La formulación de elementos finitos, para vigas isotrópicas, se basa en el principio de trabajos virtuales. En esta sección, cinco variables se aproximan utilizando la función de interpolación de Lagrange para discretizar el desplazamiento y las rotaciones. Ellos se interpolan como:

$$\mathbf{u} \approx \mathbf{u}_h = \sum_{i=1}^{p+1} u_i \psi_i(x_1), \\ \mathbf{w} \approx \mathbf{w}_h = \sum_{i=1}^{p+1} \omega_i \psi_i(x_1), \\ \varphi_1 \approx \varphi_1 h = \sum_{i=1}^{p+1} \varphi_1^{(i)} \psi_i(x_1), \\ \varphi_3 \approx \varphi_3 h = \sum_{i=1}^{p+1} \varphi_3^{(i)} \psi_i(x_1), \\ \psi_3 \approx \psi_3 h = \sum_{i=1}^{p+1} \psi_3^{(i)} \psi_i(x_1). \quad (22)$$

donde $p + 1$ es el número de nodos obtenidos en la discretización del elemento, ψ_i es la función de interpolación y $(u_i, w_i, \varphi_1^{(i)}, \varphi_3^{(i)}, \psi_3^{(i)})$ son el valor nodal de desplazamiento. Tenga en cuenta que, en los polinomios de Lagrange, el eje se normaliza en el dominio de $[-1, 1]$ para obtener un sistema de coordenadas natural independiente de su geometría.

El problema de eigenvalue es obtenido al sustituir la aproximación (22) en (21). El resultado de la ecuación en forma matricial está dado por:

$$\omega^2 [\mathbf{K}]_n \{\mathbf{u}\} = [\mathbf{K}]\{\mathbf{u}\}. \quad (23)$$

donde $[\mathbf{K}]$ representa la matriz de rigidez $[\mathbf{K}]_n$, la componente geométrica de la matriz de rigidez; $\{\mathbf{u}\}$, los auto vectores contienen el pandeo de las formas de modo y ω^2 es el auto valor cuyo valor más pequeño es la carga crítica de pandeo.

IV. RESULTADOS NUMERICOS

En esta sección, se estudian los diferentes trabajos de referencia para evaluar la precisión del comportamiento de la presente formulación de vibración libre de vigas IFSDT, utilizando el método de los elementos finitos

A. Verificación

Los presentes resultados de la investigación se comparan con resultados similares obtenidos por otras modelos y / o técnicas alternativas incluyendo soluciones aproximadas analíticas y exactas para validar el presente programa de elementos finitos.

Los ejercicios presentados son una viga isotrópica hecha de acero con la diferente condición de borde: Empotrado – Libre (EL), Simple – Simple (SS). La longitud de la viga es de 0.45 metros, con un ancho unitario de 0.03 m, una altura de 0.003 m. Para el análisis se considerará un grado de interpolación P=8 (como resultado de nuestro estudio paramétrico) y un número de elementos (N=4). Asimismo, se realizará para los primeros tres modos. El material por el que está compuesto tiene los siguientes módulos de elasticidad $E_1 = 14.5 \times 10^{10} N/m^2$, $E_2 = 0.96 \times 10^{10} N/m^2$, $G_{12} = G_{13} = 0.41 \times 10^{10} N/m^2$, un coeficiente de Poisson $\nu_{13} = 0.3$ y $\rho = 1.57 \times 10^3 kg.s^2.m^{-4}$. El factor de corrección de corte k es igual a 5/6. AS 4/3501 - Viga compuesta de 6 grafito / epoxi de sección rectangular con todos los ángulos de fibra organizado (0/ 90/ 90/ 0).

TABLA 1

FRECUENCIA DE VIBRACIÓN ($\omega = \omega L^2 \sqrt{\rho/E_1 h^2}$) DE (0/90/90/0) (L/H=15) CON P=8 Y N=4 (FIJO – LIBRE)

# Modo	TEORÍAS					
	HOB T4 [8]	PT1 [9]	PT1 [8]	PT2 [9]	FOBT [10]	Presente
1	0.924	0.9189	0.923	0.913	0.924	0.924
2	4.985	4.766	4.921	4.861	4.894	4.893
3	11.832	11.234	11.596	11.547	11.449	11.442

Como se muestra en la Tabla 1, las frecuencias de vibración libre de una viga se comparan con una relación de (L/h) de 15/1 y así como la masa del compuesto laminado. Se evalúa las diferentes condiciones de borde, tal como en una viga empotrada - libre, donde se evalúa con la Teoría de la Viga Orden Superior (HOB T siglas en inglés) por Subramanian [8], Teoría de Lámina (PT1 siglas en inglés) en Singh [9] y Teoría

de Lámina (PT1 siglas en inglés) en Subramanian [8], Teoría de la Deformación por Cortante de Primer Orden (FOBT siglas en inglés) en Ref. [10]. Los presentados resultados del trabajo se han realizado con la IFSDT.

TABLA 2

FRECUENCIA DE VIBRACIÓN ($\omega = \omega L^2 \sqrt{\rho/E_1 h^2}$) DE (0/90/90/0) (L/H=15) CON P=8 Y N=4 (SIMPLE – SIMPLE)

# Modo	Teorías					
	HOT [11]	FOBT [12]	HOB T [13]	Ramtekkar [14]	FOBT [10]	Presente
1	2.519	2.512	2.516	2.513	2.5026	2.5025
2	8.682	8.589	8.669	8.66	8.4853	8.4824
3	16.378	16.045	16.32	16.33	15.7769	15.759

Como se muestra en la Tabla 2, las frecuencias de vibración libre de una viga se comparan con una relación de (L/h) de 15/1 y así como la masa del compuesto laminado. Se evalúa las diferentes en una viga simplemente poyada, donde se evalúa con la Teoría de Orden Superior (HOT siglas en inglés) por Band y Desai [11], Teoría de la Deformación por Cortante de Primer Orden (FOBT siglas en inglés) por Marur and Kant [12], Teoría de la Viga Orden Superior (HOB T siglas en inglés) Kant et al. [13], Solución de los elementos finitos por Ramtekkar et al. [14] y Teoría de la Deformación por Cortante de Primer Orden (FOBT siglas en inglés) en Ref. [10]. Los presentados resultados del trabajo se han realizado con la IFSDT.

B. Estudio Paramétrico

Caso de Estudio: Cross Ply

El ejercicio presentado es una AS 4/3501 - viga compuesta de 6 grafito / epoxi de sección rectangular con la condición de borde: Empotrado – Libre (EL). La longitud de la viga es de 0.45 metros, con un ancho unitario de 0.03 m, con alturas de 0.03m. Para el análisis se considerará un grado de interpolación P=8 (como resultado de nuestro estudio paramétrico) y un número de elementos (N=4). Asimismo, se realizará para los primeros cinco modos. El material por el que está compuesto tiene los siguientes módulos de elasticidad $E_1 = 14.5 \times 10^{10} N/m^2$, $E_2 = 0.96 \times 10^{10} N/m^2$, $G_{12} = G_{13} = 0.41 \times 10^{10} N/m^2$, un coeficiente de Poisson $\nu_{13} = 0.3$ y $\rho = 1.57 \times 10^3 kg.s^2.m^{-4}$. El factor de corrección de corte k es igual a 5/6.

TABLA 3

FRECUENCIA DE VIBRACIÓN ($\omega = \omega L^2 \sqrt{\rho/E_1 h^2}$) CON DIFERENTES CAPAS (L/H=15) CON P=8 Y N=4 (FIJO – LIBRE)

# Modo	CAPAS			
	2	4	6	8
	(90/0)	(90/0/90/0)	(90/0/90) s	(90/0/90/0) s
1	0.728	0.728	0.728	0.728
2	4.075	4.075	4.075	4.075
3	9.960	9.960	9.960	9.960
4	16.848	16.848	16.848	16.848
5	17.259	17.259	17.259	17.259
6	24.204	24.204	24.204	24.204
7	31.704	31.704	31.704	31.704
8	39.217	39.217	39.217	39.217
9	46.684	46.684	46.684	46.684
10	51.777	51.777	51.777	51.777

A continuación, se presenta gráficamente el compartimento de los cuatro primeros modos del presente estudio a (0/90/0/90)

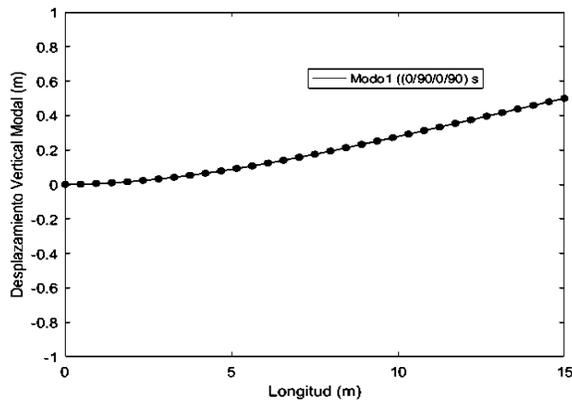


Fig. 1 Modo de vibración 1 para vigas IFSDT (0/90/0/90)

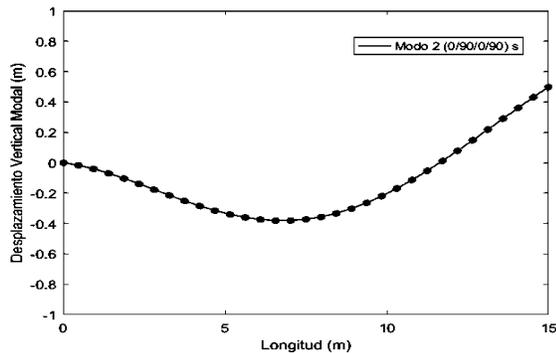


Fig. 2 Modo de vibración 2 para vigas IFSDT (0/90/0/90)

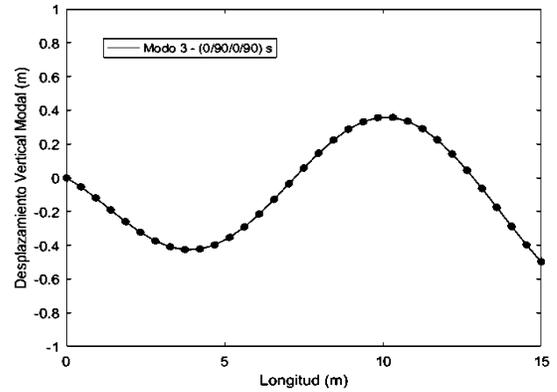


Fig. 3 Modo de vibración 3 para vigas IFSDT (0/90/0/90)

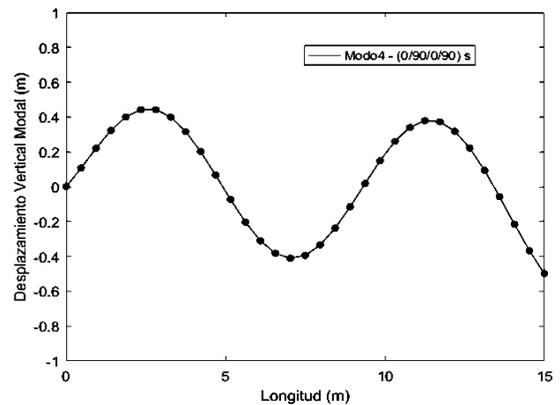


Fig. 4 Modo de vibración 4 para vigas IFSDT (0/90/0/90)

V. CONCLUSIONES

En el presente trabajo se desarrolló una formulación para calcular la vibración libre de vigas laminadas compuestas. Una teoría mejorada de la deformación por corte de primer orden se utilizó para desarrollar un modelo de elementos finitos a través del principio de Hamilton. La formulación proporciona resultados superiores a la teoría de Euler-Bernoulli porque considera deformación por corte y extensión de la sección transversal. las restricciones impuestas para la deformación por cortante hacen que el modelo sea más consistente para los materiales compuestos laminados, debido a su alta relación entre el módulo de Young y el módulo de cortante.

Se llevó a cabo el estudio paramétrico y se determinó que las frecuencias de vibración libre son similares cuando el número de capas se incrementa (cada dos capas simétricas) como se muestra en la Tabla 3. Sin embargo, cuando las capas se colocan de forma simétrica, los resultados de la frecuencia naturales en vigas varían. Los resultados son muy satisfactorios y muestran las ventajas de la presente formulación cuando se comparan con teorías clásicas.

REFERENCES

- [1] H. Abramovich, "Shear deformation and rotary inertia effects of vibrating composite beams," *Compos. Struct.*, vol. 20, no. 3, pp. 165–173, 1992.
- [2] A. T. Chen and T. Y. Yang, "Static and Dynamic Formulation of a Symmetrically Laminated Beam Finite Element for a Microcomputer," *J. Compos. Mater.*, vol. 19, no. 5, pp. 459–475, 1985.
- [3] A. A. Khdeir and J. N. Reddy, "Free vibration of cross-ply laminated beams with arbitrary boundary conditions," *Int. J. Eng. Sci.*, vol. 32, no. 12, pp. 1971–1980, 1994.
- [4] K. Chandrashekhara, K. Krishnamurthy, and S. Roy, "Free vibration of composite beams including rotary inertia and shear deformation," *Compos. Struct.*, vol. 14, no. 4, pp. 269–279, 1990.
- [5] M. Eisenberger, H. Abramovich, and O. Shulepov, "Dynamic stiffness analysis of laminated beams using a first order shear deformation theory," *Compos. Struct.*, vol. 31, no. 4, pp. 265–271, 1995.
- [6] H. Abramovich and A. Livshits, "Free vibrations of non-symmetric cross-ply laminated composite beams," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 176, no. 5, pp. 597–612, 1994.
- [7] P. Madabhushi-Raman and J. F. Davalos, "Static shear correction factor for laminated rectangular beams," *Compos. Part B Eng.*, vol. 27, no. 3–4, pp. 285–293, 1996.
- [8] P. Subramanian, "Dynamic analysis of laminated composite beams using higher order theories and finite elements," *Compos. Struct.*, vol. 73, no. 3, pp. 342–353, 2006.
- [9] Y. Singh, "Free Vibration Analysis of the Laminated Composite Beam with Various Boundary Conditions Conditions," p. 115, 2012.
- [10] Mohamoud Yassin Osman and Osama Mohammed Elmardi Suleiman, "Free Vibration Analysis of Laminated Composite Beams using Finite Element Method", *International Journal of Engineering Research and Advanced Technology (IJERAT)*, vol. 3, no. 2, pp. 5–22, Feb. 2017.
- [11] U. N. Band and Y. M. Desai, "Multi-model finite element scheme for static and free vibration analyses of composite laminated beams," *Lat. Am. J. Solids Struct.*, vol. 12, no. 11, pp. 2061–2077, 2015.
- [12] S. R. Marur and T. Kant, "Free vibration analysis of fiber reinforced composite beams using higher order theories and finite element modelling," *J. Sound Vib.*, vol. 194, no. 3, pp. 337–351, 1996.
- [13] T. Kant, S. R. Marur, and G. S. Rao, "Analytical solution to the dynamic analysis of laminated beams using higher order refined theory," *Compos. Struct.*, vol. 40, no. 1, pp. 1–9, 1997.
- [14] G. S. Ramtekkar, Y. M. Desai, and A. H. Shah, "Natural vibrations of laminated composite beams by using mixed finite element modelling," *J. Sound Vib.*, vol. 257, no. 4, pp. 635–651, 2002.