

Analytical Solution of Temperature Distribution in a Homogeneous Medium due to a Rectangular Wave-Shaped Electrical Wire

Heberth Diestra-Cruz¹, Melanie A. Brunet², Melvin Santos-Sánchez³, Paul Alvarez-Herrera⁴, Guillermo Quevedo-Novoa⁴

¹ Universidad Privada del Norte (UPN), Trujillo, Perú, heberth.diestra@upn.edu.pe

² University of Illinois at Urbana-Champaign (UIUC), Illinois, USA, mab15@illinois.edu

³ University of Puerto Rico at Mayagüez (UPRM), Puerto Rico, USA, melvin.santos1@upr.edu

⁴ Universidad Nacional de Trujillo (UNT), Trujillo, Perú, palvarez@unitru.edu.pe, lquevedo@unitru.edu.pe

Abstract—Due to the limited amount of oil reserves, it is essential to ensure the efficient use of available energy, which is closely linked to the optimal design of electrical devices. Because these devices work with electrical energy, they cannot avoid having discrete heat generating sources and their design depends on the precise determination of the temperature field in the body. In this work, the integral method of Green's functions is used to determine the three-dimensional temperature distribution of a homogeneous medium due to a rectangular wave-shaped heat generation source. The geometry of the heat generation has been selected in such a way that it has the typical shape of the commercially available flexible electric heaters. The solution obtained is exact and mathematically simple. To demonstrate the versatility of the results, this analytical solution has been compared with the purely numerical solution obtained using a computer package widely used in engineering (COMSOL Multiphysics). The analytical and numerical results coincide well in all the evaluated ranges. Using the equation obtained in this work, a procedure is proposed to determine the effective thermal conductivity of a material from the experimental data of temperature and position. The results of this research offer a simple way to calculate the thermal conductivity of a material and can be applied in the design of thermo-optical devices, flexible electric heaters or thermo-adjustable microfluidic devices.

Keywords: *Green function, Heat transfer, Heat generation sources, Temperature distribution, Electric heaters*

Digital Object Identifier (DOI): http://dx.doi.org/10.18687/LACCEI2020.1.1.612 ISBN: 978-958-52071-4-1 ISSN: 2414-6390
--

Analytical Solution of Temperature Distribution in a Homogeneous Medium due to a Rectangular Wave-Shaped Electrical Wire

Solución Analítica de la Distribución de Temperaturas en un Medio Homogéneo Debido a un Cable Eléctrico con Forma de Onda Rectangular

Heberth Diestra-Cruz¹, Melanie A. Brunet², Melvin Santos-Sánchez³, Paul Alvarez-Herrera⁴, Guillermo Quevedo-Novoa⁴

¹ Universidad Privada del Norte (UPN), Trujillo, Perú, heberth.diestra@upn.edu.pe

² University of Illinois at Urbana-Champaign (UIUC), Illinois, USA, mab15@illinois.edu

³ University of Puerto Rico at Mayagüez (UPRM), Puerto Rico, USA, melvin.santos1@upr.edu

⁴ Universidad Nacional de Trujillo (UNT), Trujillo, Perú, palvarez@unitru.edu.pe, lquevedo@unitru.edu.pe

Resumen— Debido a la limitada cantidad de reservas de petróleo, es fundamental garantizar el uso eficiente de la energía disponible, lo cual está íntimamente ligado al diseño óptimo de los equipos eléctricos. Estos equipos (por funcionar con energía eléctrica) no pueden evitar tener fuentes discretas de generación de calor y su diseño depende de la determinación precisa del campo de temperaturas en todo el cuerpo. En este trabajo se utiliza el método integral de las funciones de Green para determinar la distribución de temperaturas tridimensional de un medio homogéneo debido a una fuente de generación de calor con forma de onda rectangular. La geometría de la generación de calor ha sido seleccionada de tal manera que tenga la forma típica de los calentadores eléctricos flexibles que se encuentran comercialmente disponibles. La solución obtenida es exacta y matemáticamente simple. Para demostrar la versatilidad de los resultados, esta solución analítica ha sido comparada con la solución puramente numérica obtenida usando un paquete computacional de amplio uso en ingeniería (COMSOL Multiphysics). Los resultados analíticos y numéricos coinciden en todos los rangos evaluados. Usando la ecuación obtenida en este trabajo, se propone un procedimiento sencillo para determinar la conductividad térmica efectiva de un material a partir de los datos experimentales de temperatura y posición. Los resultados de esta investigación pueden ser aplicados en el diseño de dispositivos termo-ópticos, calentadores eléctricos flexibles o dispositivos microfluídicos termo-regulables y ofrecen un método conveniente para obtener la conductividad térmica efectiva de un material.

Palabras claves: Función de Green, transferencia de calor, fuentes de generación de calor, distribución de temperaturas, calentadores eléctricos

I. INTRODUCCIÓN

Debido a la naturaleza de nuestras sociedades, necesitamos inmensas cantidades de energía para mantener los procesos productivos (industrias, agricultura, transporte, etc.) que nos permiten vivir como sociedades modernas. La industrialización de los países emergentes y el crecimiento de la población

mundial, entre otros factores, están incrementando continuamente la demanda de energía [1]. Como la mayor parte de esta demanda es cubierta por el uso de combustibles fósiles y debido a que su cantidad es limitada, es fundamental buscar nuevas formas de producción de energía eléctrica [2-4]. Sin embargo, la implementación y uso de fuentes renovables de energía todavía presenta muchas dificultades y retos [5,6], por lo que es indispensable garantizar el uso eficiente de la energía actualmente disponible. Dado que el uso eficiente de los recursos energéticos está relacionado con el diseño óptimo de los equipos eléctricos, enormes esfuerzos se están realizando en el desarrollo, aplicación y extensión de técnicas analíticas y numéricas que permitan determinar la distribución de temperaturas en cuerpos que poseen fuentes discretas de generación de calor [7-9]. Que la generación de calor sea discreta (es decir, altamente concentrada en ciertas zonas del cuerpo), aumenta drásticamente la complejidad del problema y las técnicas matemáticas típicamente usadas, como el método separación de variables, no son suficientes para este tipo de fenómenos [10].

Por otro lado, a pesar de que los métodos puramente numéricos han permitido avanzar en la solución de muchos problemas relevantes para la ingeniería [11,12], estos métodos sólo ofrecen soluciones aproximadas (que deben ser validadas) y generalmente requieren de computadoras con alta capacidad de procesamiento, lo cual por supuesto, implica una inversión económica considerable [13]. A diferencia de las soluciones puramente numéricas, las soluciones analíticas permiten profundizar nuestro entendimiento de los fenómenos de transferencia de calor y nos ofrecen ecuaciones explícitas simples que pueden ser usadas para determinar la conductividad térmica o la capacidad calorífica de un material, parámetros esenciales para el diseño óptimo de los equipos eléctricos [14,15]. Además, las soluciones analíticas son más convenientes que las soluciones puramente numéricas por ser

Digital Object Identifier (DOI):

<http://dx.doi.org/10.18687/LACCEI2020.1.1.614>

ISBN: 978-958-52071-4-1 ISSN: 2414-6390

exactas, elegantes, versátiles y porque pueden servir de referencia para validar los resultados de los métodos puramente numéricos.

A pesar de que en los últimos años se han hecho avances significativos en el modelamiento y solución de problemas que envuelven fuentes discretas de generación de calor [16-18], es fundamental extender el uso de las técnicas analíticas para modelar fuentes de generación de calor con formas más complejas, de relevancia para la ingeniería y que se encuentren comercialmente disponibles. En este trabajo utilizamos el método integral de las funciones de Green para determinar la solución analítica de la distribución de temperaturas tridimensional en un medio homogéneo con una fuente de generación de calor en forma de onda rectangular, geometría típica usada en los calentadores eléctricos flexibles que están comercialmente disponibles [19-21]. Utilizando la solución analítica obtenida, se presenta una ecuación simple que permite calcular la conductividad térmica efectiva de un cuerpo a partir de los datos experimentales de temperatura y posición. Dado que la situación física es similar a la encontrada en calentadores eléctricos [22,23], dispositivos termo-ópticos y dispositivos microfluídicos termo-regulados [24-26], los resultados de esta investigación pueden ser usados en el diseño de estos aparatos y ofrecen la posibilidad de establecer procedimientos experimentales que faciliten la determinación de la conductividad térmica efectiva de un material.

II. MARCO TEÓRICO

La distribución de temperaturas en estado estable, $T(\vec{x})$, para un sólido de conductividad térmica constante, k , que está sometido a una razón de generación de calor por unidad de volumen, $Q(\vec{x})$, puede ser hallada resolviendo la siguiente ecuación diferencial [27,28]

$$\nabla^2 T(\vec{x}) = -\frac{Q(\vec{x})}{k} \quad (1)$$

Por otro lado, el método integral de las funciones de Green es una técnica matemática avanzada que permite encontrar soluciones exactas a muchos problemas complejos de transferencia de calor, por ejemplo, cuando la generación de calor es discreta (ver Fig. 1).

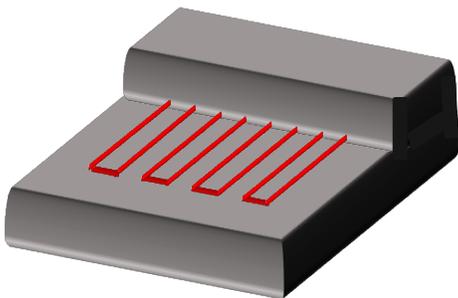


Fig. 1 Sólido homogéneo con una fuente discreta de generación de calor en su interior. La generación de calor está representada por las líneas rojas.

Usando el método integral de las funciones de Green podemos resolver (1) y expresar el campo de temperaturas de la siguiente manera [16-18,29]

$$T(\vec{x}) = \iiint_{v'} Q(\vec{x}') G(\vec{x}, \vec{x}') dv' + k \iint_{s'} \left(G(\vec{x}, \vec{x}') \frac{\partial T(\vec{x}')}{\partial n'} - T(\vec{x}') \frac{\partial G(\vec{x}, \vec{x}')}{\partial n'} \right) ds' \quad (2)$$

donde dv' es un elemento de volumen, \hat{n}' es el vector unitario normal a la superficie ds' y $G(\vec{x}, \vec{x}')$ es la función de Green, que representa la temperatura en el punto de campo \vec{x} debido a una generación de calor unitaria en el punto fuente \vec{x}' (ver Fig. 2).

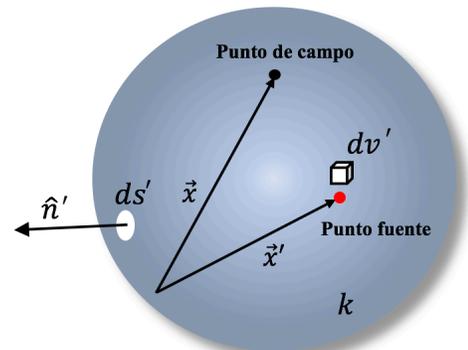


Fig. 2 Punto de campo y punto fuente en un sólido.

La ecuación (2) modela la distribución de temperaturas en un cuerpo homogéneo tomando en cuenta la contribución de la generación de calor (integral triple) y el aporte de las condiciones en la frontera (integral doble). Notar que la integración se lleva a cabo sobre los puntos fuente.

Para el caso donde la temperatura es especificada en la frontera (condición de Dirichlet), tenemos que $G(\vec{x}, \vec{x}') = 0$ en toda la frontera. Luego, el campo de temperaturas en estado estable queda expresada como sigue

$$T(\vec{x}) = \iiint_{v'} Q(\vec{x}') G(\vec{x}, \vec{x}') dv' - k \iint_{s'} T(\vec{x}') \frac{\partial G(\vec{x}, \vec{x}')}{\partial n'} ds' \quad (3)$$

Como la ecuación de conducción de calor (aplicada a un cuerpo de conductividad térmica constante) es una ecuación diferencial lineal, podemos usar el método de superposición y expresar la temperatura de la siguiente manera

$$T(\vec{x}) = T_{amb} + T_H(\vec{x}) \quad (4)$$

donde T_{amb} es la temperatura muy lejos de la generación de calor (es decir, es la temperatura que tendría el cuerpo en ausencia de generación de calor) y $T_H(\vec{x})$ es la distribución de

temperaturas homogénea que se obtiene resolviendo la siguiente ecuación diferencial

$$\nabla^2 T_H(\vec{x}) = -\frac{Q(\vec{x})}{k} \quad (5)$$

con $T_H(\vec{x}) = 0$ en la frontera (condición de frontera homogénea). Debido a esta condición de frontera, la integral doble en (3) se hace cero. Luego, $T_H(\vec{x})$ puede ser calculada con la siguiente ecuación

$$T_H(\vec{x}) = \iiint_{v'} Q(\vec{x}') G(\vec{x}, \vec{x}') dv' \quad (6)$$

Finalmente, colocando (6) en (4), la expresión general del campo de temperaturas (en estado estable) para un sólido homogéneo con fuentes discretas de generación de calor y con la temperatura especificada en la frontera está dada por

$$T(\vec{x}) = T_{amb} + \iiint_{v'} Q(\vec{x}') G(\vec{x}, \vec{x}') dv' \quad (7)$$

Claramente, para poder evaluar (7) debemos tener la expresión matemática de la función generación de calor, $Q(\vec{x}')$, y de la función de Green, $G(\vec{x}, \vec{x}')$, para el caso de interés.

Para un punto de generación de calor en un sólido homogéneo infinito, la función de Green tridimensional en coordenadas cartesianas es la siguiente [16-18]

$$G(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{1}{4\pi k (\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2})} \quad (8)$$

Notar que cuando las dimensiones geométricas de la generación de calor son despreciables (con respecto a las dimensiones geométricas del cuerpo) entonces es razonable considerar al cuerpo como un medio infinito. Los resultados analíticos obtenidos con esta hipótesis han sido validados experimentalmente [30-33], lo cual demuestra que esta hipótesis puede usarse (bajo las condiciones adecuadas) para modelar correctamente muchos casos relevantes para la ingeniería. Con el propósito de evidenciar la validez de esta hipótesis y resaltar la versatilidad de las técnicas analíticas, los resultados obtenidos en este trabajo (que están basados en la hipótesis de medio infinito) se han comparado con los resultados numéricos obtenidos tomando un cuerpo finito, cuyas dimensiones geométricas son mucho mayores que las dimensiones de la generación de calor (ver Sección IV).

III. CÁLCULO DE LA DISTRIBUCIÓN DE TEMPERATURAS TRIDIMENSIONAL EN UN MEDIO INFINITO CON UNA FUENTE DE GENERACIÓN DE CALOR EN FORMA DE ONDA RECTANGULAR

A. Definición del Problema

El objetivo de este trabajo es determinar analíticamente la distribución de temperaturas, en estado estable, de un sólido homogéneo infinito causada por una generación de calor discreta con forma de onda rectangular (ver Fig. 3). Es importante resaltar que la generación de calor posee la geometría típica encontrada en los calentadores eléctricos que se usan en muchas aplicaciones de ingeniería. La generación de calor está representada por un cable eléctrico de espesor despreciable que tiene la forma de una onda rectangular con “ m ” número de pasos y está ubicada en el plano xy ($z = 0$). Notar que cada una de las formas rectangulares verticales corresponde a un paso (en la Fig. 3 se pueden observar cuatro pasos).

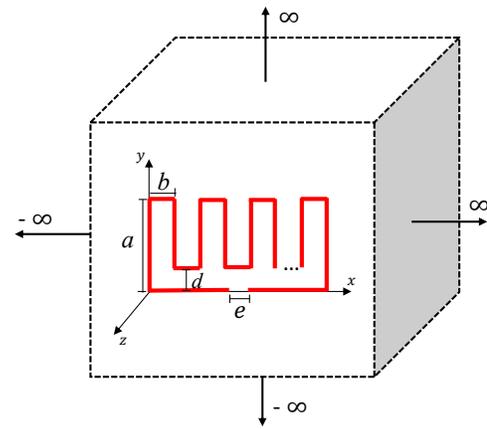


Fig. 3 Medio homogéneo infinito con una generación de calor en forma de onda rectangular ubicada en el plano xy .

Debido a que la generación de calor está concentrada en una porción limitada del cuerpo, la distribución de temperaturas en el sólido homogéneo es tridimensional y depende de la forma, el número de pasos y las dimensiones específicas de la generación de calor.

B. Determinación de la Función Generación de Calor

La geometría y las dimensiones que se requieren para modelar matemáticamente la generación de calor se muestran en la Fig. 3. Las dimensiones de la generación de calor son parámetros ajustables, lo que permite aplicar estos resultados a cualquier generación de calor en forma de onda rectangular. El número de pasos, m , también es un parámetro a escoger y en este problema puede tomar cualquier valor entero. Utilizando la geometría de la generación de calor y las propiedades de las funciones delta de Dirac, $\delta(\vec{x})$, y paso de Heaviside, $H(\vec{x})$, la función generación de calor queda expresada por la siguiente ecuación

$$\begin{aligned}
Q(\vec{x}) = \Lambda \left[\delta(x)\delta(z)\{H(y) - H(y-a)\} + \delta(y-a)\delta(z)\{H(x) - H(x-b)\} + \delta(x-b)\delta(z)\{H(y-d) - H(y-a)\} \right. \\
+ \sum_{n=1}^p \{ \delta(y-d)\delta(z)\{H[x - (2n-1)b] - H[x - 2nb]\} + \delta(y-a)\delta(z)\{H[x - 2nb] - H[x - (2n+1)b]\} \\
+ \delta(z)\{H(y-d) - H(y-a)\}\{\delta(x-2nb) + \delta(x - (2n+1)b)\} + \delta(z)\delta[x - b(2p+1)]\{H(y) - H(y-d)\} \\
+ \delta(z)\delta(y) \left\{ H(x) - H\left(x - \left[\frac{(2p+1)b - e}{2}\right]\right) \right\} \\
\left. + \delta(z)\delta(y) \left\{ H\left(x - \left[\frac{(2p+1)b + e}{2}\right]\right) - H(x - [(2p+1)b]) \right\} \right] \quad (9)
\end{aligned}$$

donde Λ [W/m] es la razón de generación de calor por unidad de longitud del cable conductor y "p" es el número de pasos menos uno ($p = m - 1$).

C. Determinación de la Distribución de Temperaturas

Como se mencionó en la Sección II, reemplazando la función de Green, dada por (8), y la función generación de

calor, especificada en (9), podemos hallar la distribución de temperaturas homogénea, $T_H(\vec{x})$, usando (6). Luego, la distribución de temperaturas homogénea para un sólido infinito de conductividad térmica constante y con una generación de calor en forma de onda rectangular, puede hallarse resolviendo la siguiente integral triple

$$\begin{aligned}
T_H(x, y, z) = \frac{\Lambda}{4\pi k} \iiint_{-\infty}^{\infty} \left[\delta(x)\delta(z)\{H(y) - H(y-a)\} + \delta(y-a)\delta(z)\{H(x) - H(x-b)\} + \delta(x-b)\delta(z)\{H(y-d) - H(y-a)\} \right. \\
+ \sum_{n=1}^p \{ \delta(y-d)\delta(z)\{H[x - (2n-1)b] - H[x - 2nb]\} + \delta(y-a)\delta(z)\{H[x - 2nb] - H[x - (2n+1)b]\} \\
+ \delta(z)\{H(y-d) - H(y-a)\}\{\delta(x-2nb) + \delta(x - (2n+1)b)\} + \delta(z)\delta[x - b(2p+1)]\{H(y) - H(y-d)\} \\
+ \delta(z)\delta(y) \left\{ H(x) - H\left(x - \left[\frac{(2p+1)b - e}{2}\right]\right) \right\} \\
\left. + \delta(z)\delta(y) \left\{ H\left(x - \left[\frac{(2p+1)b + e}{2}\right]\right) - H(x - [(2p+1)b]) \right\} \right] \left\{ \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} \right\} dx' dy' dz' \quad (10)
\end{aligned}$$

Antes de resolver la integral, vamos a definir algunas magnitudes adimensionales de tal manera que los resultados queden expresados en la forma más general posible. Estas magnitudes adimensionales son

$$d\bar{y}' = \frac{dy'}{a} \quad : \text{Diferencial de } y' \text{ adimensional}$$

$$\bar{b} = \frac{b}{a} \quad : \text{Distancia adimensional } b$$

$$\bar{T}_H(\bar{x}) = \frac{T_H(\vec{x})}{T_{amb}} \quad : \text{Temperatura adimensional}$$

$$\bar{\Lambda} = \frac{\Lambda}{kT_{amb}} \quad : \text{Razón de generación de calor adimensional}$$

$$\bar{x} = \frac{x}{a} \quad : \text{Distancia adimensional } x$$

$$\bar{y} = \frac{y}{a} \quad : \text{Distancia adimensional } y$$

$$\bar{z} = \frac{z}{a} \quad : \text{Distancia adimensional } z$$

$$d\bar{x}' = \frac{dx'}{a} \quad : \text{Diferencial de } x' \text{ adimensional}$$

$$\bar{a} = \frac{a}{a} = 1 \quad : \text{Distancia adimensional } a$$

$$\bar{x}' = \frac{x'}{a} \quad : \text{Distancia adimensional } x'$$

$$\bar{y}' = \frac{y'}{a} \quad : \text{Distancia adimensional } y'$$

Luego, utilizando estos parámetros adimensionales es posible expresar (4) de la siguiente manera

$$\bar{T}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = 1 + \bar{T}_H(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \quad (11)$$

Finalmente, haciendo uso de las propiedades de la función delta de Dirac para integrar la expresión dada por (10) y reemplazando en (11), la solución analítica para la distribución de temperaturas adimensional en un sólido homogéneo infinito causada por una generación de calor en forma de onda rectangular está dada por

$$\begin{aligned}
\bar{T}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = 1 + \frac{\bar{\Lambda}}{4\pi} & \left\{ \left[\operatorname{arsenh} \left(\frac{1 - \bar{y}}{\sqrt{\bar{x}^2 + \bar{z}^2}} \right) + \operatorname{arsenh} \left(\frac{\bar{y}}{\sqrt{\bar{x}^2 + \bar{z}^2}} \right) + \operatorname{arsenh} \left(\frac{\bar{b} - \bar{x}}{\sqrt{(\bar{y} - 1)^2 + \bar{z}^2}} \right) \right. \right. \\
& + \left. \operatorname{arsenh} \left(\frac{\bar{x}}{\sqrt{(\bar{y} - 1)^2 + \bar{z}^2}} \right) + \operatorname{arsenh} \left(\frac{\bar{y} - \bar{d}}{\sqrt{(\bar{x} - \bar{b})^2 + \bar{z}^2}} \right) + \operatorname{arsenh} \left(\frac{1 - \bar{y}}{\sqrt{(\bar{x} - \bar{b})^2 + \bar{z}^2}} \right) \right] \\
& + \sum_{n=1}^p \left[\operatorname{arsenh} \left(\frac{\bar{x} - \bar{b}(2n - 1)}{\sqrt{(\bar{y} - \bar{d})^2 + \bar{z}^2}} \right) - \operatorname{arsenh} \left(\frac{\bar{x} - 2\bar{b}n}{\sqrt{(\bar{y} - \bar{d})^2 + \bar{z}^2}} \right) + \operatorname{arsenh} \left(\frac{\bar{x} - 2\bar{b}n}{\sqrt{(\bar{y} - 1)^2 + \bar{z}^2}} \right) \right. \\
& - \operatorname{arsenh} \left(\frac{\bar{x} - \bar{b}(2n + 1)}{\sqrt{(\bar{y} - 1)^2 + \bar{z}^2}} \right) + \operatorname{arsenh} \left(\frac{\bar{y} - \bar{d}}{\sqrt{(\bar{x} - 2\bar{b}n)^2 + \bar{z}^2}} \right) - \operatorname{arsenh} \left(\frac{\bar{y} - 1}{\sqrt{(\bar{x} - 2\bar{b}n)^2 + \bar{z}^2}} \right) \\
& + \left. \operatorname{arsenh} \left(\frac{\bar{y} - \bar{d}}{\sqrt{(\bar{x} - (2n + 1)\bar{b})^2 + \bar{z}^2}} \right) - \operatorname{arsenh} \left(\frac{\bar{y} - 1}{\sqrt{(\bar{x} - (2n + 1)\bar{b})^2 + \bar{z}^2}} \right) \right] \\
& + \left[\operatorname{arsenh} \left(\frac{\bar{y}}{\sqrt{(\bar{x} - (2p + 1)\bar{b})^2 + \bar{z}^2}} \right) - \operatorname{arsenh} \left(\frac{\bar{y} - \bar{d}}{\sqrt{(\bar{x} - (2p + 1)\bar{b})^2 + \bar{z}^2}} \right) + \operatorname{arsenh} \left(\frac{\bar{x}}{\sqrt{\bar{y}^2 + \bar{z}^2}} \right) \right. \\
& \left. \left. - \operatorname{arsenh} \left(\frac{2\bar{x} - \bar{b}(2p + 1) + \bar{e}}{2\sqrt{\bar{y}^2 + \bar{z}^2}} \right) + \operatorname{arsenh} \left(\frac{2\bar{x} - \bar{b}(2p + 1) - \bar{e}}{2\sqrt{\bar{y}^2 + \bar{z}^2}} \right) - \operatorname{arsenh} \left(\frac{\bar{x} - \bar{b}(2p + 1)}{\sqrt{\bar{y}^2 + \bar{z}^2}} \right) \right] \right\} \quad (12)
\end{aligned}$$

La ecuación (12) es exacta y matemáticamente simple, ya que no tiene problemas de convergencia por no tener series infinitas. Esta ecuación permite hacer una evaluación fácil y detallada de todos los parámetros envueltos en la distribución de temperaturas para el problema de interés. Notar que los primeros siete términos de (12) corresponden al efecto del primer paso de la generación de calor sobre la temperatura.

IV. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

La Fig. 4 muestra el comportamiento de la temperatura adimensional, $\bar{T}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, como una función de la distancia adimensional, \bar{x} , para los diferentes parámetros envueltos en el proceso de transferencia de calor del caso bajo estudio. Los resultados muestran que lejos de las zonas de generación de calor las curvas son suaves, pero en las proximidades de las fuentes de generación de calor las curvas presentan cambios bruscos, lo cual indica que los gradientes de temperatura son intensos en estas regiones (Fig. 4a). En la Fig. 4d se puede observar que para posiciones muy alejadas (por ejemplo $\bar{y} = 10$), la temperatura no se ve afectada por la generación de calor. Este hecho es físicamente consistente con (8) ya que la temperatura (T) es inversamente proporcional a la distancia entre el punto de interés y la zona de la generación de calor

(r), es decir, se cumple que $T \propto \frac{1}{r}$. En general, los resultados indican que la temperatura se incrementa a medida que nos acercamos a la generación de calor, lo cual es razonable y consistente con la física del fenómeno.

Desde la perspectiva del diseño de dispositivos eléctricos, es necesario tener un control adecuado de la intensidad y la distribución de temperaturas en todo el cuerpo. Por esta razón, es indispensable predecir la distribución de temperaturas para diferentes valores de los parámetros envueltos, de tal manera que se pueda obtener la condición más favorable dependiendo de la aplicación que nos interesa. Los resultados demuestran que el valor de la temperatura puede ser controlado (por ejemplo, para hacer que aumente), modificando el número de pasos (Fig. 4a), las dimensiones del paso (Fig. 4b) y el valor de la intensidad de la generación de calor (Fig. 4c). Esto se debe a que aumentando cualquiera de estos parámetros, el valor total de la generación de calor aumenta y en consecuencia aumenta el valor de las temperaturas que se pueden alcanzar en el estado estable. Las Figs. 4a y 4b indican que se puede controlar la posición de la temperatura máxima modificando el número de pasos y la geometría del paso en la generación de calor. Esto es importante para decidir, por ejemplo, el número de pasos que se necesitan para asegurar que se alcanzará la temperatura deseada en el dispositivo a ser diseñado.

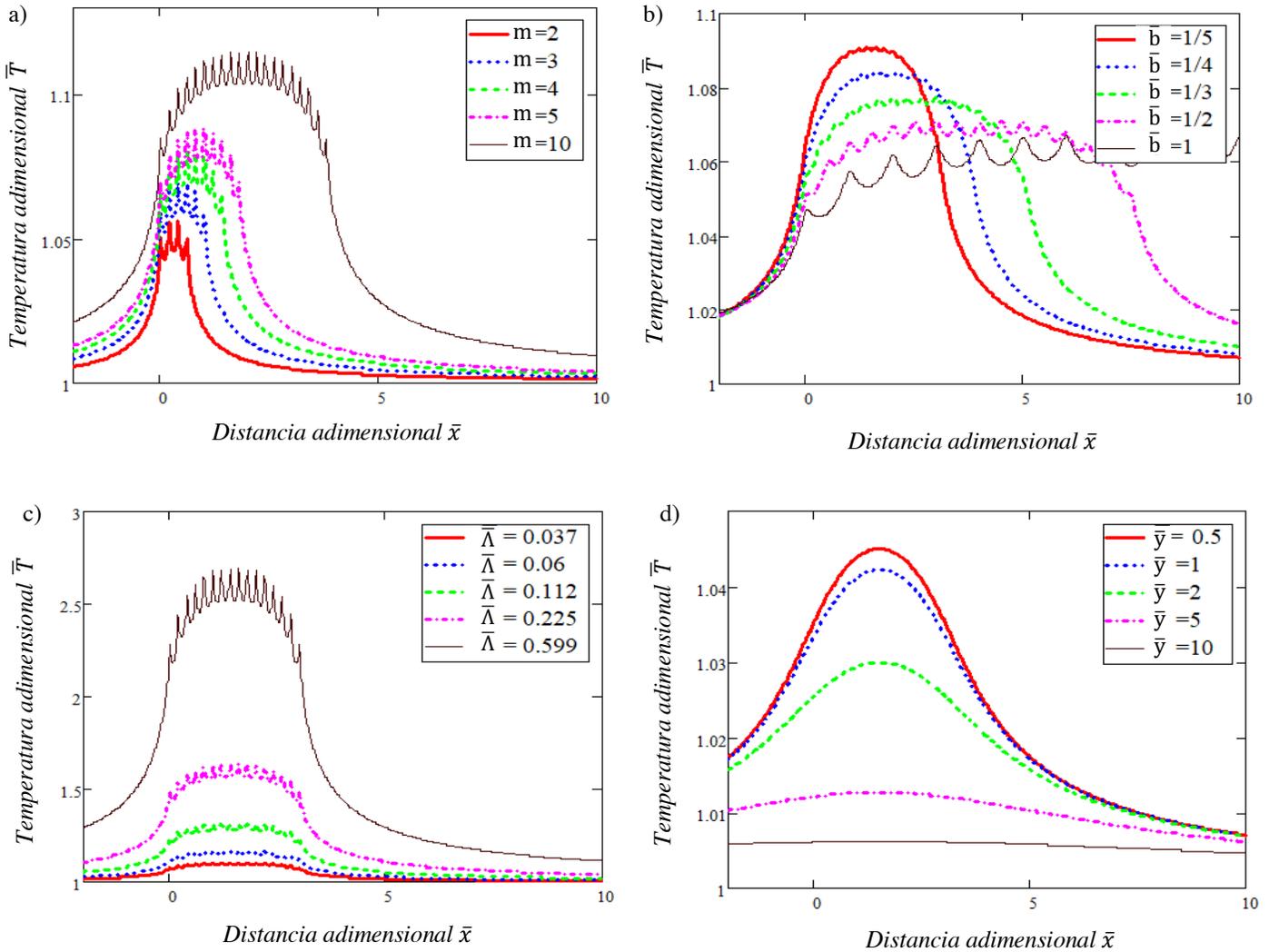


Fig. 4 Distribución de temperaturas adimensionales para un sólido infinito con una generación de calor con “m” número de pasos. (a) Para diferentes números de pasos, m ($\bar{y} = 0.5$, $\bar{z} = 0.01$, $\bar{\Lambda} = 0.037$, $\bar{b} = \frac{1}{5}$, $\bar{d} = 0.1$, $\bar{e} = 0.5$). (b) Para diferentes longitudes del paso, \bar{b} ($\bar{y} = 0.5$, $\bar{z} = 0.1$, $\bar{\Lambda} = 0.037$, $m = 8$, $\bar{d} = 0.1$, $\bar{e} = 0.5$). (c) Para diferentes intensidades de generación de calor, $\bar{\Lambda}$ ($\bar{y} = 0.5$, $\bar{z} = 0.01$, $\bar{b} = \frac{1}{5}$, $m = 8$, $\bar{d} = 0.1$, $\bar{e} = 0.5$). (d) Para diferentes distancias adimensionales, \bar{y} ($m = 8$, $\bar{z} = 1$, $\bar{\Lambda} = 0.037$, $\bar{b} = \frac{1}{5}$, $\bar{d} = 0.1$, $\bar{e} = 0.5$).

La solución analítica obtenida en este trabajo fue comparada con su respectiva solución numérica. Para obtener las soluciones puramente numéricas utilizamos el paquete computacional robusto de COMSOL Multiphysics, versión 5.3. Debido a que los gradientes de temperatura son intensos cerca de la generación de calor, para conseguir resultados razonables con el método puramente numérico se usó una malla computacional extremadamente fina, de tal manera que sea posible capturar el comportamiento de la temperatura cerca de la generación de calor. Como al incrementar el número de nodos de la malla se aumenta el tiempo necesario para obtener los resultados, es importante tener en cuenta el costo computacional que requiere hacer una evaluación detallada de cada parámetro envuelto en este proceso. A pesar de que los

resultados analíticos y numéricos coinciden en todo el rango de valores estudiados (ver Fig. 5), el tiempo requerido por el método puramente numérico fue considerablemente mayor que el de la solución analítica obtenida en este trabajo. Por ejemplo, al cambiar el número de pasos o las dimensiones de la generación de calor se debe volver a correr el programa para cada nuevo valor escogido, lo cual demuestra las limitaciones y la poca versatilidad de los métodos puramente numéricos para hacer este tipo de análisis. Para realizar una evaluación detallada de todos los parámetros que tienen influencia en la temperatura, se hace notar que la solución analítica resultó ser más simple, económica y rápida que el método de solución puramente numérico.

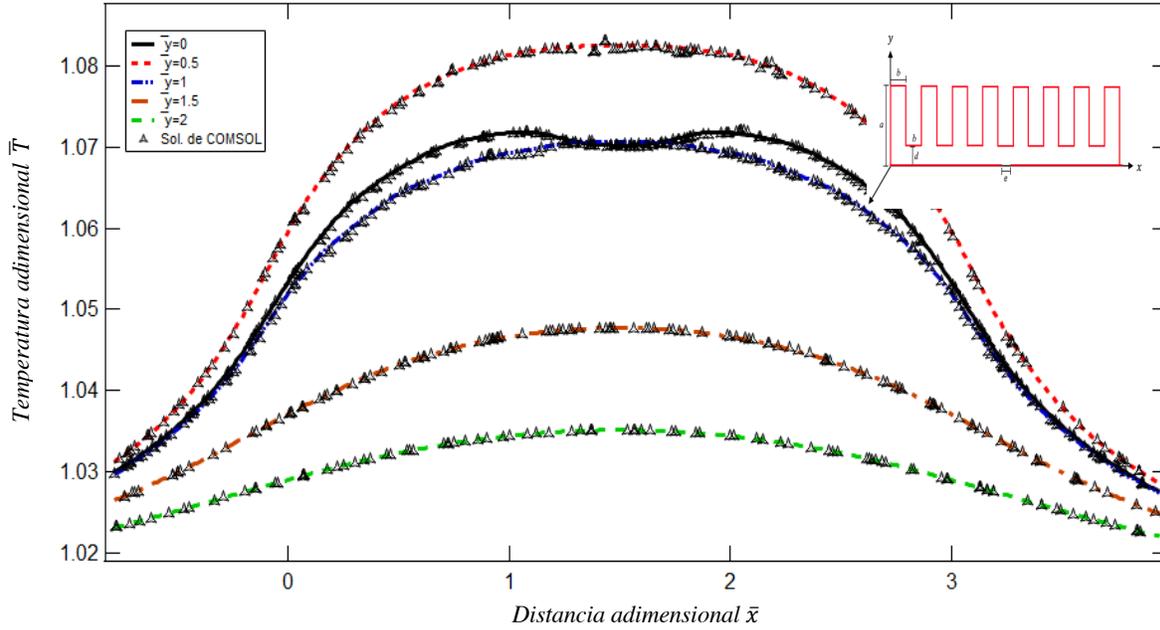


Fig. 5 Distribución de temperaturas adimensionales para un sólido infinito con una generación de calor en forma de onda rectangular. Comparación entre los resultados analíticos (líneas) y los resultados puramente numéricos (triángulos) ($m = 8$ $\bar{\Lambda} = 0.037$ $\bar{b} = \frac{1}{5}$ $\bar{d} = 0.1$ $\bar{e} = 0.5$, $\bar{z} = 0.2$). La figura insertada muestra la geometría de la generación de calor.

Como la solución analítica obtenida, (12), relaciona explícitamente a la temperatura con la posición, en lo que queda de los resultados, se evaluarán algunos casos particulares. El objetivo es obtener una ecuación simple que nos permita calcular la conductividad térmica efectiva de un sólido a partir de datos experimentales fáciles de medir como temperatura y posición.

La aplicación de (12) a casos más simples es directa, por ejemplo, para obtener el perfil de temperaturas tridimensional

para una generación de calor de un paso (ver figura insertada en la Fig. 6), debemos considerar solamente los siete primeros términos de (12) con $\bar{d} = 0$, que corresponden a la contribución del primer paso. Luego, la solución analítica de la distribución de temperaturas adimensionales para una generación de calor de un paso está dada por la siguiente expresión

$$\begin{aligned} \bar{T}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = 1 + \frac{\bar{\Lambda}}{4\pi} \left\{ \left[\operatorname{arsenh} \left(\frac{1 - \bar{y}}{\sqrt{\bar{x}^2 + \bar{z}^2}} \right) + \operatorname{arsenh} \left(\frac{\bar{y}}{\sqrt{\bar{x}^2 + \bar{z}^2}} \right) \right] \right. \\ \left. + \left[\operatorname{arsenh} \left(\frac{\bar{b} - \bar{x}}{\sqrt{(\bar{y} - 1)^2 + \bar{z}^2}} \right) + \operatorname{arsenh} \left(\frac{\bar{x}}{\sqrt{(\bar{y} - 1)^2 + \bar{z}^2}} \right) \right] \right. \\ \left. + \left[\operatorname{arsenh} \left(\frac{\bar{y}}{\sqrt{(\bar{x} - \bar{b})^2 + \bar{z}^2}} \right) + \operatorname{arsenh} \left(\frac{1 - \bar{y}}{\sqrt{(\bar{x} - \bar{b})^2 + \bar{z}^2}} \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (13)$$

Esta ecuación modela matemáticamente el caso más simple que puede encontrarse para una generación de calor en forma de onda rectangular. Notar que los primeros tres términos corresponden a la contribución de la línea vertical que pasa por el origen de coordenadas de la generación de calor (ver la figura insertada en la Fig. 6).

La Fig. 6 muestra la comparación entre el resultado analítico obtenido en este trabajo y el resultado numérico para la distribución de temperaturas adimensionales de un cuerpo infinito debido a la generación de calor de un paso. Como puede observarse los resultados coinciden para todos los valores evaluados.

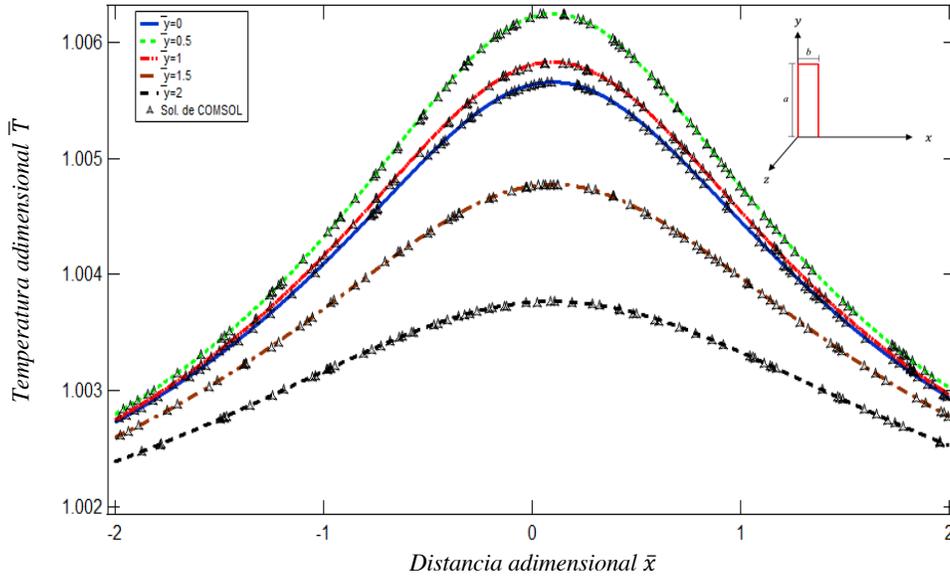


Fig. 6 Distribución de temperaturas adimensionales para un sólido infinito con una generación de calor de un paso. Comparación entre los resultados analíticos (líneas) y los resultados puramente numéricos (triángulos) ($\bar{b} = 0.2$, $\bar{z} = 1$, $\bar{\Lambda} = 0.037$). La figura insertada muestra la geometría de la generación de calor.

Para obtener una ecuación aún más compacta, vamos a simplificar (13) para el caso en que la generación de calor es un cable eléctrico vertical de longitud finita y que pasa por el origen de coordenadas (ver Fig. 7).

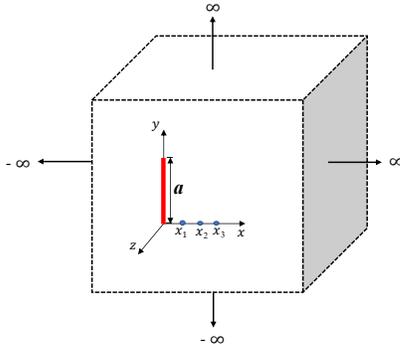


Fig. 7 Medio homogéneo infinito con un cable vertical de generación de calor

Tomando los tres primeros términos de (13), obtenemos la ecuación de la distribución de temperaturas adimensionales para un sólido infinito con una generación de calor en forma de línea vertical de longitud “a”. La expresión matemática en este caso tiene la siguiente forma

$$\bar{T}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = 1 + \frac{\bar{\Lambda}}{4\pi} \left[\operatorname{arsenh} \left(\frac{1 - \bar{y}}{\sqrt{\bar{x}^2 + \bar{z}^2}} \right) + \operatorname{arsenh} \left(\frac{\bar{y}}{\sqrt{\bar{x}^2 + \bar{z}^2}} \right) \right] \quad (14)$$

Finalmente, si usamos (14) para $\bar{y} = 0$ y $\bar{z} = 0$ (fijos), obtenemos la siguiente ecuación

$$\bar{T}(\bar{x}) = 1 + \frac{\bar{\Lambda}}{4\pi} \left[\operatorname{arsenh} \left(\frac{1}{|\bar{x}|} \right) \right] \quad (15)$$

La ecuación (15) es la solución analítica de la temperatura adimensional para las posiciones que se encuentran a lo largo del eje x (ver puntos indicados como x_1, x_2, x_3 en la Fig. 7). Claramente, la ecuación (15) puede usarse para calcular la conductividad térmica efectiva de un cuerpo a partir de los datos experimentales de temperatura y posición.

A continuación se describe la secuencia para calcular la conductividad térmica efectiva de un material usando (15):

Primer paso: Hacer una gráfica de $\bar{T}(\bar{x})$ vs $\operatorname{arsenh} \left(\frac{1}{|\bar{x}|} \right)$ usando los datos experimentales de temperatura adimensional, $\bar{T}(\bar{x}) = \frac{T(x)}{T_{amb}}$, y posición adimensional, $|\bar{x}| = \frac{|x|}{a}$.

Segundo paso: Realizar una regresión lineal de los datos experimentales (puede usarse Excel) y obtener la pendiente de la recta generada (ver Fig. 8). Notar que la intersección con el eje de las ordenadas ocurre en $\bar{T} = 1$.

Tercer paso: Calcular la conductividad térmica efectiva del material mediante la siguiente ecuación

$$k = \frac{\Lambda}{4\pi (\text{pendiente}) T_{amb}} \quad (16)$$

los valores de Λ y T_{amb} están dados por las condiciones experimentales.

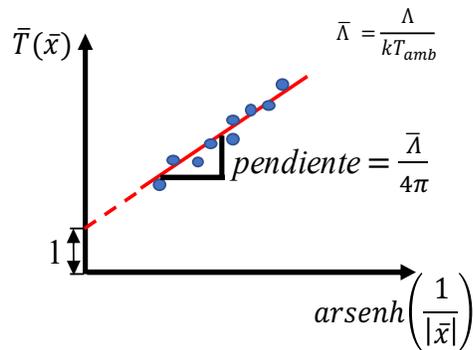


Fig. 8 Gráfica para obtener la conductividad térmica efectiva de un material.

La ecuación (15) de este trabajo es similar (en simplicidad y elegancia) a las ecuaciones que actualmente son utilizadas para determinar experimentalmente la conductividad térmica efectiva de un cuerpo. Estas ecuaciones son la base científica de métodos ampliamente usados en ingeniería, tales como el método de la placa caliente aislada (que usa la ley de Fourier) [34,35], y el método del alambre caliente (que usa la transferencia de calor en estado transitorio) [36,37].

V. CONCLUSIONES

En este trabajo se ha utilizado el método integral de las funciones de Green para calcular analíticamente la distribución de temperaturas en un medio homogéneo debido a una generación de calor en forma de onda rectangular (geometría que es ampliamente utilizada en los calentadores eléctricos flexibles que se encuentran comercialmente disponibles y que son de gran interés para la industria e ingeniería). La solución obtenida es exacta y fue utilizada para realizar una evaluación detallada de todos los parámetros envueltos en el proceso.

Al comparar los resultados analíticos obtenidos en este trabajo con las soluciones puramente numéricas correspondientes, encontramos que los resultados coinciden en todo el rango de valores usados en las simulaciones. Sin embargo, las ventajas intrínsecas de los métodos analíticos hacen de la técnica integral de las funciones de Green una herramienta matemática potente en la solución de este tipo de problemas complejos. Para todos los casos evaluados en este trabajo, los resultados analíticos permitieron realizar una evaluación paramétrica más directa y rápida que el método puramente numérico.

Aplicando la solución analítica obtenida a un caso particular, ha sido posible llegar a una ecuación simple y elegante que puede utilizarse para determinar la conductividad térmica efectiva de un material a partir de datos experimentales fáciles de medir como temperatura y posición.

Los resultados de este trabajo demuestran que es posible resolver problemas complejos (relevantes para la ingeniería y de interés industrial) utilizando métodos analíticos y abren la posibilidad de aplicar estos métodos a problemas cada vez más sofisticados y que por el momento no tienen solución.

AGRADECIMIENTOS

Expresamos nuestro agradecimiento a la Universidad Privada del Norte (UPN), Universidad Nacional de Trujillo (UNT) y Universidad de Puerto Rico-Mayagüez (UPRM) por facilitar los espacios y recursos necesarios para llevar a cabo esta investigación. Agradecemos al Dr. Aldo Acevedo de la UPRM y a la Lic. Kely Soria de la UNT por su ayuda en la realización de este trabajo.

Deseamos agradecer también al Mg. Ing. Wiston Azañedo por facilitar la redacción de este paper y a la UPN por financiar nuestra participación en LACCEI 2020.

REFERENCIAS

- [1] N. Abas, A. Kalair, and N. Khan, "Review of fossil fuels and future energy technologies," *Futures*, vol. 69, pp. 31–49, May 2015, doi: 10.1016/j.futures.2015.03.003.
- [2] P. A. Owusu and S. Asumadu-Sarkodie, "A review of renewable energy sources, sustainability issues and climate change mitigation," *Cogent Engineering*, vol. 3, no. 1, p. 1167990, Dec. 2016, doi: 10.1080/23311916.2016.1167990.
- [3] D. Ahuja and M. Tatsutani, "Sustainable energy for developing countries," *S.A.P.I.E.N.S. Surveys and Perspectives Integrating Environment and Society*, no. 2.1, Apr. 2009.
- [4] I. Staffell et al., "The role of hydrogen and fuel cells in the global energy system," *Energy Environ. Sci.*, vol. 12, no. 2, pp. 463–491, Feb. 2019, doi: 10.1039/C8EE01157E.
- [5] E. Oro, V. Depoorter, A. Garcia, and J. Salom, "Energy efficiency and renewable energy integration in data centres. Strategies and modelling review," *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, vol. 42, pp. 429–445, Feb. 2015, doi: 10.1016/j.rser.2014.10.035.
- [6] M. A. Islam, M. Hasanuzzaman, N. A. Rahim, A. Nahar, and M. Hosenuzzaman, "Global Renewable Energy-Based Electricity Generation and Smart Grid System for Energy Security," *The Scientific Journal*, 2014. Available: <https://www.hindawi.com/journals/tswj/2014/197136/>.
- [7] A. Purusothaman, K. Murugesan, and A. J. Chamkha, "3D modeling of natural convective heat transfer from a varying rectangular heat generating source," *J Therm Anal Calorim*, vol. 138, no. 1, pp. 597–608, Oct. 2019, doi: 10.1007/s10973-019-08259-9.
- [8] F. Suarez, A. Nozariabmarz, D. Vashae, and M. C. Öztürk, "Designing thermoelectric generators for self-powered wearable electronics," *Energy Environ. Sci.*, vol. 9, no. 6, pp. 2099–2113, Jun. 2016, doi: 10.1039/C6EE00456C.
- [9] R. Kantharaj and A. M. Marconnet, "Heat Generation and Thermal Transport in Lithium-Ion Batteries: A Scale-Bridging Perspective," *Nanoscale and Microscale Thermophysical Engineering*, vol. 23, no. 2, pp. 128–156, Apr. 2019, doi: 10.1080/15567265.2019.1572679.
- [10] A. D. Polyinin, A. I. Zhurov, and A. V. Vyazmin, "Generalized Separation of Variables in Nonlinear Heat and Mass Transfer Equations," *Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics*, vol. 25, no. 3–4, pp. 251–267, 2005, doi: 10.1515/JNETDY.2000.017.
- [11] N. P. Karagiannakis, N. Bali, E. D. Skouras, and V. N. Burganos, "An Efficient Meshless Numerical Method for Heat Conduction Studies in Particle Aggregates," *Applied Sciences*, vol. 10, no. 3, p. 739, Jan. 2020, doi: 10.3390/app10030739.
- [12] K. D. K. P. and R. Kn, "Numerical solution of non-linear dual-phase-lag bioheat transfer equation within skin tissues.," *Math Biosci*, vol. 293, pp. 56–63, Aug. 2017, doi: 10.1016/j.mbs.2017.08.009.
- [13] E. Botma and E. Kotzé, "Feasibility of a low-cost computing cluster in comparison to a high-performance computing cluster: A developing country perspective," *CONF-IRM 2016 Proceedings*, Jan. 2016.
- [14] M. Weglarski, "Thermal diffusivity and thermal conductivity measurement in thick — Film microsystems," in *2008 31st International Spring Seminar on Electronics Technology*, 2008, pp. 139–144, doi: 10.1109/ISSE.2008.5276506.

- [15] S. Lee, J. Lee, B. Ryu, and S. Ryu, "A micromechanics-based analytical solution for the effective thermal conductivity of composites with orthotropic matrices and interfacial thermal resistance," *Scientific Reports*, vol. 8, no. 1, pp. 1–11, May 2018, doi: 10.1038/s41598-018-25379-8.
- [16] N. S. Venkataraman and O. E. Meza Castillo, "Conduction heat transfer in semi-infinite and infinite regions with discrete heat sources," *Acta Astronautica*, vol. 58, no. 1, pp. 15–37, Jan. 2006, doi: 10.1016/j.actaastro.2005.04.011.
- [17] N. S. Venkataraman, E. G. Pérez, and I. Delgado-Velázquez, "Temperature distribution in spacecraft mounting plates with discrete heat generation sources due to conductive heat transfer," *Acta Astronautica*, vol. 53, no. 3, pp. 173–183, Aug. 2003, doi: 10.1016/S0094-5765(02)00201-1.
- [18] N. S. Venkataraman, A. M. Vélez García, V. Venkataraman, and H. Diestra-Cruz, "Three dimensional temperature field in a conducting sphere due to an arbitrarily located split ring heating source," *Acta Astronautica*, vol. 94, no. 2, pp. 656–661, Feb. 2014, doi: 10.1016/j.actaastro.2013.09.012.
- [19] K. Malecha, E. Remiszewska, and D. G. Pijanowska, "Technology and application of the LTCC-based microfluidic module for urea determination," *Microelectronics International*, vol. 32, no. 3, pp. 126–132, Jan. 2015, doi: 10.1108/MI-01-2015-0010.
- [20] H. K. Park et al., "Flexible plane heater: Graphite and carbon nanotube hybrid nanocomposite," *Synthetic Metals*, vol. 203, pp. 127–134, May 2015, doi: 10.1016/j.synthmet.2015.02.015.
- [21] P. M. Perillo and D. F. Rodríguez, "TiO₂ Nanotubes Membrane Flexible Sensor for Low-Temperature H₂S Detection," *Chemosensors*, vol. 4, no. 3, p. 15, Sep. 2016, doi: 10.3390/chemosensors4030015.
- [22] B. Souhir, G. Sami, C. S. Hekmet, and K. Abdennaceur, "Design, Simulation, and Optimization of a Meander Micro Hotplate for Gas Sensors," 2016, doi: 10.4313/TEEM.2016.17.4.189.
- [23] L. Filipovic and A. Lahlalia, "Review—System-on-Chip SMO Gas Sensor Integration in Advanced CMOS Technology," *J. Electrochem. Soc.*, vol. 165, no. 16, p. B862, Dec. 2018, doi: 10.1149/2.0731816jes.
- [24] C.-C. Hong, S. Murugesan, S. Kim, G. Beauceage, J.-W. Choi, and C. H. Ahn, "A functional on-chip pressure generator using solid chemical propellant for disposable lab-on-a-chip," *Lab Chip*, vol. 3, no. 4, pp. 281–286, Nov. 2003, doi: 10.1039/B306116G.
- [25] A. Karbalaie, R. Kumar, and H. J. Cho, "Thermocapillarity in Microfluidics—A Review," *Micromachines*, vol. 7, no. 1, p. 13, Jan. 2016, doi: 10.3390/mi7010013.
- [26] Z. Zhang and N. Keil, "Thermo-optic devices on polymer platform," *Optics Communications*, vol. 362, pp. 101–114, Mar. 2016, doi: 10.1016/j.optcom.2015.08.026.
- [27] H. S. Carslaw and J. C. Jaeger, *Conduction of Heat in Solids*, Edition: 2. Oxford, New York: Oxford University Press, 1986.
- [28] V. S. Arpaci, *Conduction Heat Transfer*, Edition: 2. Reading, Mass: Addison-Wesley, 1966.
- [29] K. D. Cole, J. V. Beck, A. Haji-Sheikh, and B. Litkouhi, *Heat Conduction Using Green's Functions*, Edition: 2. Boca Raton: CRC Press, 2010.
- [30] A. I. Campbell, S. J. Ebbens, P. Illien, and R. Golestanian, "Experimental observation of flow fields around active Janus spheres," *Nat Commun*, vol. 10, Sep. 2019, doi: 10.1038/s41467-019-11842-1.
- [31] J. Kim and J. H. Shin, "Stable, Free-space Optical Trapping and Manipulation of Sub-micron Particles in an Integrated Microfluidic Chip," *Scientific Reports*, vol. 6, no. 1, pp. 1–9, Sep. 2016, doi: 10.1038/srep33842.
- [32] N. Simões, I. Simões, A. Tadeu, C. A. B. Vasconcellos, and W. J. Mansur, "3D transient heat conduction in multilayer systems – Experimental validation of semi-analytical solution," *International Journal of Thermal Sciences*, vol. 57, pp. 192–203, Jul. 2012, doi: 10.1016/j.ijthermalsci.2012.02.007.
- [33] A. Angelotti, F. Ly, and A. Zille, "On the applicability of the moving line source theory to thermal response test under groundwater flow: considerations from real case studies," *Geothermal Energy*, vol. 6, no. 1, p. 12, Jul. 2018, doi: 10.1186/s40517-018-0098-z.
- [34] I. Yang, D. Kim, and S. Lee, "Construction and preliminary testing of a guarded hot plate apparatus for thermal conductivity measurements at high temperatures," *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 122, pp. 1343–1352, Jul. 2018, doi: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2018.02.072.
- [35] D. Zhao, X. Qian, X. Gu, S. A. Jajja, and R. Yang, "Measurement Techniques for Thermal Conductivity and Interfacial Thermal Conductance of Bulk and Thin Film Materials," *J. Electron. Packag*, vol. 138, no. 4, Dec. 2016, doi: 10.1115/1.4034605.
- [36] B. Merckx, P. Dudoignon, J. P. Garnier, and D. Marchand, "Simplified Transient Hot-Wire Method for Effective Thermal Conductivity Measurement in Geo Materials: Microstructure and Saturation Effect," *Advances in Civil Engineering*, 2012. Available: <https://www.hindawi.com/journals/ace/2012/625395/>.
- [37] H. Wang, W. Chu, and G. Chen, "A Brief Review on Measuring Methods of Thermal Conductivity of Organic and Hybrid Thermoelectric Materials," *Advanced Electronic Materials*, vol. 5, no. 11, p. 1900167, 2019, doi: 10.1002/aelm.201900167.