

# Solution paths in solving geometry problems in a paper and pencil environment in leveling courses for engineering

Jaime Calderón<sup>1</sup>, MBA; Ruth Cueva<sup>2</sup>, Master en Pedagogía Profesional; Nelson Medina<sup>3</sup>, Dr. En Ciencias Físicas y Matemáticas, Julián Simbaña<sup>4</sup>, Máster en Automatización, Walter Salas<sup>5</sup>, Máster en Mecatrónica y Robótica

<sup>1</sup> Instituto de Altos Estudios Nacionales, Ecuador; jaime.calderon@iaen.edu.ec;

<sup>2,4,5</sup> Departamento de Formación Básica, Escuela Politécnica Nacional, Ecuador; ruth.cueva@epn.edu.ec; julian.simbana@epn.edu.ec; walter.salash@epn.edu.ec

<sup>3</sup> Departamento de Física, Escuela Politécnica Nacional, Ecuador; nelson.medina@epn.edu.ec

*Abstract– The present article focuses on the different methods to solve a geometrical problem from the formal perspective, considering three fundamental ways present on the written discourse and that are dependent on how the problem is approached. The objective of the study is to find paths to the solution after the problem has been approached, with special interest on the method and the quality of the developed cognitive structure. From the obtained results, we differentiate three ways for the solution to the problems posed to engineering students in academic leveling courses at Escuela Politécnica Nacional. One path to solution is realized on the mental plane, where the configurational discourse is used in a heuristic manner and the language in a synoptic way. Another path to solution is one where the student assigns a great value to the initial configuration through the natural or symbolic language, and starts to structure a discourse, by granting it a heuristic role. Finally, the third solution path is achieved by the student structuring the approach phase cognitively, for it starts with previous analogies to similar problems in the past.*

**Keywords:** paths, solution, cognitive structure, mental plane

Digital Object Identifier (DOI):  
<http://dx.doi.org/10.18687/LACCEI2020.1.1.555>  
ISBN: 978-958-52071-4-1 ISSN: 2414-6390

# Vías de solución en la Resolución de Problemas de Geometría en un entorno de Lápiz y Papel en Estudiantes de Ingeniería

Jaime Calderón<sup>1</sup>, MBA; Ruth Cueva<sup>2</sup>, Master en Pedagogía Profesional; Nelson Medina<sup>3</sup>, Dr. En Ciencias Físicas y Matemáticas, Julián Simbaña<sup>4</sup>, Máster en Automatización, Walter Salas<sup>5</sup>, Máster en Mecatrónica y Robótica

<sup>1</sup> Instituto de Altos Estudios Nacionales, Ecuador; jaime.calderon@iaen.edu.ec; <sup>2,4,5</sup> Departamento de Formación Básica, Escuela Politécnica Nacional, Ecuador; ruth.cueva@epn.edu.ec; julian.simbaña@epn.edu.ec; walter.salash@epn.edu.ec

<sup>3</sup> Departamento de Física, Escuela Politécnica Nacional, Ecuador; nelson.medina@epn.edu.ec

**Abstract**– Este artículo aborda las diferentes formas de resolver un problema geométrico desde una perspectiva formal, considerando tres vías fundamentales, presentes en el discurso escrito y que son dependientes de cómo se aborda el problema. El estudio tiene por objetivo encontrar las vías de solución presentes después de realizar el abordaje del problema; por lo tanto, depende de la realización y de la calidad de la estructura cognitiva formada. De los resultados obtenidos, diferenciamos tres vías de solución a los problemas planteados a estudiantes del curso de nivelación para ingeniería de la Escuela Politécnica Nacional. Una vía de solución es la que se realiza en el plano mental, y usa la configuración del discurso de manera heurística y el lenguaje de manera sinóptica. Otra vía de solución es aquella en la que el estudiante asigna a la configuración inicial un importante valor mediante el lenguaje natural o simbólico y empieza a estructurar el discurso, concediéndole a esta un papel heurístico. Y finalmente se tiene la vía de solución que estructura cognitivamente la fase de abordaje, ya que parte de analogías previas a problemas que recuerda haber resuelto con anterioridad.

**Keywords**– vías, solución, estructura cognitiva, plano mental.

## I. INTRODUCCIÓN

Para el análisis de las tres formas de soluciones de los estudiantes a problemas de geometría, se parte del marco teórico desarrollado en el Modelo Histórico Cultural (MHC) [1], [2]. También son referentes importantes las concepciones y los resultados más importantes de la Teoría Cognitiva desarrollada por Raymond Duval en [3], [4], [5], [6], [7] [8], [9]; y El Modelo de Razonamiento Configural, (MRC), estructurado por Torregrosa y otros en [10], [11], [12].

Las nuevas estructuras mentales que se forman en el ser humano son derivadas de la interiorización de la forma inicial de su actividad, y varios sistemas de signos desempeñan un papel fundamental en el proceso de interiorización [13].

Según la teoría de Ausubel, el aprendizaje será mucho más significativo en la medida en que un nuevo material sea incorporado a las estructuras de conocimiento de un alumno, adquiriendo significado para él a partir de la relación lógica que se establece entre el nuevo conocimiento y los conocimientos precedentes. Por otra parte, el aprendizaje dejará de ser significativo, siendo mecánico y repetitivo, en la medida en que el nuevo material sea almacenado por medio de asociaciones arbitrarias en las estructuras cognitivas del sujeto [14].

Los teóricos del MHC consideran que el origen del desarrollo intelectual, y por lo tanto del aprendizaje, es la

actividad mental que el sujeto realiza. Estos investigadores analizaron el tránsito desde la actividad externa al sujeto, hacia la transformación en una actividad interna o psíquica. Este proceso de interiorización de la experiencia externa, constituye la estructura mental del sujeto. Es decir, la estructura mental es formada por las representaciones mentales de objetos de la realidad, a través de la interiorización de acciones externas.

Cuando un sujeto produce una representación mental de un objeto material, está realizando una actividad cognitiva motivada y condicionada por sus circunstancias, intereses personales y por el contexto. El objetivo de la actividad cognoscitiva es el de usar las operaciones mentales requeridas como mediadoras para la transformación o la construcción de un objeto de la realidad [2].

La actividad que realiza un sujeto, sea física o mental, está constituida por acciones, éstas a su vez por operaciones, y es ejecutada por fases. La acción es un proceso y la operación es una vía o medio para realizar la actividad. Las fases de desarrollo de la acción son: orientadora, ejecutora y de control. La fase orientadora corresponde a la información de las características del objeto hacia el cual se dirige la acción y del método para lograr el objetivo. La fase ejecutora refiere el uso del método elegido, es decir la ejecución de la acción. La fase de control aporta información del avance de la fase de ejecución y de las correcciones necesarias para la consecución del objetivo [15].

Las acciones tienen características primarias y secundarias [16]. Se puede establecer como características primarias, la forma, el carácter generalizado, desplegado y asimilado. Las características secundarias, que se derivan de las primarias, son el carácter razonable, abstracto y consiente de la acción, que inciden en la solidez de la acción. La forma de la acción representa el cómo el individuo hace suyo el resultado derivado de la transformación de un objeto exterior a una representación interior. Es decir, la forma corresponde a la etapa de la ejecución de la acción, por lo tanto, las cuatro formas que puede tomar una acción son: material o materializada, perceptiva, verbal y mental. Cada una de las formas de la acción ocurre en el respectivo plano de actividad del individuo.

Así, por ejemplo, en la geometría, la formación de representaciones mentales:

*En el plano material o materializado*, son motivadas por las palabras del lenguaje natural o los símbolos del lenguaje simbólico que componen el enunciado del problema, o por las configuraciones. Las acciones que ocurren en este plano, son principalmente físicas y producen cambios en los objetos. Por

Digital Object Identifier (DOI):

<http://dx.doi.org/10.18687/LACCEI2020.1.1.555>

ISBN: 978-958-52071-4-1 ISSN: 2414-6390

ejemplo, realizar gráficos o marcas sobre las configuraciones originales, o manipular las configuraciones, etc. [17].

*En el plano perceptivo*, son motivadas por el contacto a través de los sentidos, principalmente por la visión, de los objetos materiales o materializados. Las acciones que ocurren en el plano perceptivo no producen cambios en el objeto, son la transición desde el plano material o materializado hasta el verbal.

*En el plano verbal*, son motivadas por la necesidad de expresar la actividad cognitiva. Las acciones que ocurren en este plano se manifiestan mediante un lenguaje oral o escrito, es decir, mediante el uso de palabras o proposiciones en el lenguaje natural o en el lenguaje simbólico. Es en éste plano que “el lenguaje mediatiza el paso de la acción mental” [18]. Los objetivos que orientan la actividad en el plano verbal son los de permitir la comprensión oral de ésta, o la de favorecer la transición hacia la representación abstracta del objeto de la actividad. La función que cumple el lenguaje es el de la comunicación, y de medio para la representación mental.

Para desarrollar y ejecutar los procesos cognitivos, se debe contar con estructuras que promuevan y aporten al procesamiento de la información, transformándola de manera sistémica a través de un conjunto de acciones y operaciones naturales, espontáneas y autorreguladas. La estructura psicológica ha sido definida e interpretada de maneras muy diferentes por distintas escuelas de la psicología cognitiva.

Duval en [3] [4] [5] [6] [7] [8] [9]; estudia los procesos cognitivos evidenciados en los estudiantes al enfrentarse a problemas matemáticos. Su aporte es muy significativo dentro del aprendizaje de la geometría. Centra su atención en la visualización, el razonamiento y la coordinación entre el funcionamiento de éstos. Una de las conclusiones que requerimos para nuestra investigación es que, para la actividad geométrica se debe partir de una configuración inicial, sea esta proporcionada junto al enunciado, o construida a partir de los datos dados en el texto del problema. A partir de contar con una configuración inicial se realizan intervenciones sobre ella; es decir, se usa la configuración de manera heurística, con el fin de resolver el problema. Además, realiza un análisis de las interacciones entre los procesos de visualización y de razonamiento.

A partir de los resultados de Duval, Torregrasa y otros [19] [8] [10], identifican, caracterizan y definen los elementos presentes en los procesos cognitivos que intervienen en la resolución de problemas de probar en geometría, y proponen el Modelo de Razonamiento Configuracional que caracteriza las interacciones evidenciadas entre la visualización y el razonamiento involucrados, destacando la actividad que realiza el resolutor sobre la configuración inicial, como la evidencia de la ocurrencia de un tipo especial de razonamiento: “configuracional”.

En 1981 Kantowski deja clara la diferencia entre ejercicio y problema cuando asevera: “un problema es una situación que difiere de un ejercicio en que el resolutor de problemas no tiene un proceso algorítmico que lo conducirá con certeza a la solución.” [20]. A partir de este momento se pueden encontrar

en la literatura múltiples definiciones, las mismas que no se contradicen y permiten delimitar dos importantes elementos.

1. La vía de pasar de la situación inicial a la nueva situación debe ser desconocida, estableciéndose diferencias esenciales entre ejercicio y problema.

2. La persona quiere realizar esa transformación, poniendo bien en claro que lo que constituye un problema para uno puede no serlo para otro.

Schoenfeld manifiesta que las vías de solución se basan en:  
El conocimiento de base.

Las estrategias específicas de resolución de problemas.

Los aspectos metacognitivos

#### A. Generalidades

El planteamiento de una vía de solución depende de la realización y la calidad de la estructura cognitiva formada al resolver un problema. De acuerdo a los resultados obtenidos, diferenciamos tres vías para ejecutar esta fase.

Así, la vía uno para realizar la fase del planteamiento del problema, se presenta cuando el componente afectivo motivacional le sugiere al individuo que la coordinación del razonamiento configuracional le está conduciendo para obtener las asociaciones adecuadas. Entonces, continuará manipulando de manera heurística la configuración inicial, en el plano mental.

La vía dos para el desarrollo de la fase del planteamiento del problema, que hemos evidenciado en nuestra investigación, se diferencia de la vía uno, descrita anteriormente, en el papel sinóptico que el estudiante asigna a la configuración inicial y en que el lenguaje, natural o simbólico, es usado para empezar a estructurar el discurso, concediéndole un papel heurístico. Estas diferencias son profundas, ya que el estudiante no selecciona la información que le será útil para la resolución del problema, más bien hemos constatado que este tipo de estudiante realiza sobre la configuración inicial las marcas que registran todas las afirmaciones y relaciones geométricas que ha logrado identificar. Esto es registrado en un discurso que empieza por identificar y anotar las hipótesis que constan en el enunciado del problema. El discurso es la actividad que se realiza en el plano concreto, que da cuenta de las acciones que se realizan en el plano mental, es decir, es la evidencia de la realización coordinada de aprehensiones. Esta forma de proceder evidencia que el estudiante no hace una selección de los resultados obtenidos anteriormente, lo cual nos informa que no tiene claridad de los elementos útiles. Este modo de realizar esta fase tiene la particularidad de que se da inicio a la expansión del discurso por sustitución.

La vía tres para el desarrollo del planteamiento del problema, tiene como diferencia con la vía dos, que la estructura cognitiva formada por el individuo, en la fase de abordaje incluye una analogía con un problema previo que recuerda haber resuelto. Hemos evidenciado que los individuos que hacen uso de esta vía, condicionan la realización sobre la configuración inicial de las aprehensiones operativas que acercarían al problema a la situación recordada. Lo que incide en que el individuo seleccione la información que va a utilizar, que es otra diferencia con la vía dos. El individuo registra sus

actividades en un discurso, que ocurre en el plano concreto, y que es evidencia de la realización coordinada de las acciones mentales realizadas en el plano mental. Dicho de otro modo, se evidencia el proceso de coordinación entre las representaciones mentales o aprehensiones. La realización de esta fase inicia la expansión del discurso por sustitución.

## II. MÉTODO DE INVESTIGACIÓN

### B. Diseño de estudio

Para lograr una comprensión preliminar de la naturaleza de las dificultades que presentan los estudiantes de nivelación para ingeniería en la resolución de problemas geométricos, se realizó una prueba, destinada a ser el primer paso en un proyecto de investigación que utiliza una variedad de métodos, incluidas entrevistas. Las preguntas del instrumento de recolección de datos fueron diseñadas para cubrir el conocimiento de la geometría plana.

Los cuatro problemas implicaban identificar los distintos procesos de razonamiento [21]. Para la selección de los problemas se cuidó que los conocimientos geométricos necesarios para su resolución hayan sido tratados en el respectivo curso de los estudiantes. [22] Se determinó que tres (3) de los problemas que se plantearon demandan una demostración formal con una estructura deductiva, porque se consideró que este tipo de problemas aporta en mayor medida al desarrollo de habilidades básicas del pensamiento lógico formal, requerido en la formación de profesionales en cualquier rama, especialmente en ciencias e ingeniería. El restante problema contiene un enunciado con datos numéricos específicos, es decir, constituye un problema de aplicación, de búsqueda o empírico. Este tipo de problemas desarrolla capacidades específicas operativas que permiten visualizar la aplicación de afirmaciones matemáticas en ámbitos concretos de la realidad, que pueden ser representados por objetos geométricos, y en particular en la solución de problemas de la ingeniería. La característica común de los 4 problemas es que presentaban una configuración inicial, junta con el enunciado del problema, con el fin de identificar el papel que juegan los procesos de visualización en la identificación de las afirmaciones geométricas, y facilitar el papel heurístico de las configuraciones [23]. Todos los problemas requieren para su solución la identificación de subconfiguraciones relevantes [24]. Los problemas 1, 3 y 4 tienen más de una manera de resolverlos, que depende de la subconfiguración relevante identificada ya que ésta condiciona las afirmaciones matemáticas asociadas, sin que esto asegure que se pueda resolver el problema [25]. Para el análisis se registró todo el proceso de resolución con el fin de lograr la identificación de la organización del discurso [4].

### C. Contenido de la herramienta

Para resolver los problemas de probar en geometría se han utilizado las formas del discurso generado por los estudiantes para el profesor al resolver problemas de geometría de probar, y el razonamiento configural. Se analiza las respuestas de 20

estudiantes a cuatro problemas de probar para determinar cómo identificaban y relacionaban propiedades geométricas para deducir nuevos hechos y propiedades de las figuras.

### D. Problema 1

En la figura que se muestra a continuación. Los puntos G y B dividen el segmento MR en tres partes congruentes, y los puntos G y P también dividen el segmento AC en tres partes congruentes. AG y BG son congruentes. Demuestre que los ángulos de vértices R y C son congruentes. (Describe detalladamente su razonamiento).

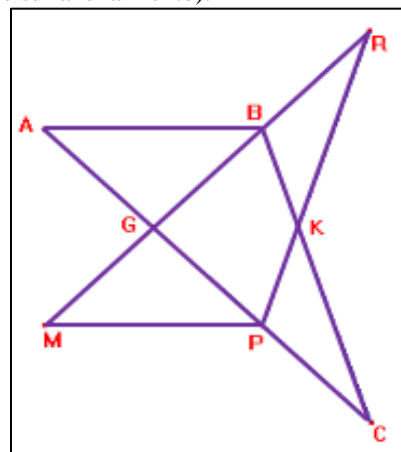


Fig. 1 Esquema del problema 1.

Este problema tiene una configuración inicial y demanda una prueba. Es posible identificar varias maneras de resolverlo, no obstante, en todas ellas se requiere realizar asociaciones entre la configuración inicial y afirmaciones matemáticas que relacionen congruencia de segmentos, de ángulos y de triángulos. La configuración inicial cumple un papel descriptivo, ya que ayuda a contextualizar el enunciado y un papel heurístico para la determinación de una subconfiguración relevante.

### E. Problema 2

En el cuadrado ABCD, los puntos E, F, K y L verifican que EK es perpendicular a LF. Demuestre que EK y LF son congruentes.

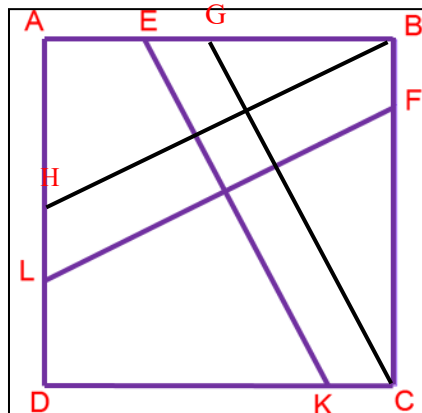


Fig. 2 Esquema del problema 2.

**Digital Object Identifier:** (to be inserted by LACCEI).  
**ISSN, ISBN:** (to be inserted by LACCEI).

En este problema se adjunta una configuración inicial y demanda una prueba. El procedimiento requiere una aprehensión operativa de cambio figural, para visualizar la subconfiguración relevante que da la idea de solución del problema.

El papel de la configuración inicial es descriptivo, ya que ayuda a contextualizar el enunciado. El papel heurístico lo cumple la configuración después de realizar la aprehensión operativa de cambio figural asociada al Teorema de Pitágoras, lo que es una dificultad inicial y de no superarla, el estudiante no podrá resolver el problema. En este problema la configuración inicial puede dificultar la identificación de las configuraciones relevantes.

**F. Problema 3**

En la siguiente figura se verifica que los ángulos LKQ, LQK y LQM son congruentes entre sí. También se sabe que el ángulo KLN es congruente con el MLN. Demuestre que los segmentos QM y KN son congruentes.

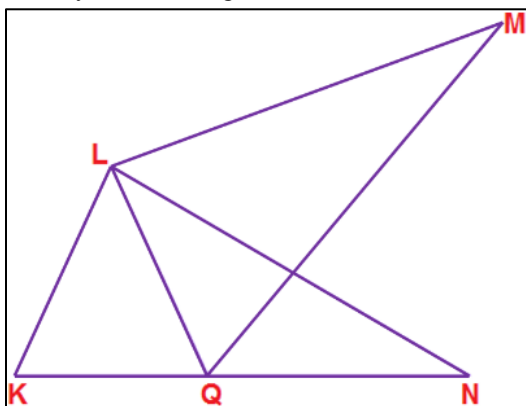


Fig. 3 Esquema del problema 3.

Este es un problema que presenta una configuración inicial, que durante su resolución cumple un papel descriptivo (permite contextualizar el problema) y un papel heurístico pues las subconfiguraciones relevantes (los triángulos  $\Delta KLN$  y  $\Delta QLM$ ) se solapan, siendo una dificultad para su identificación. Por otro lado, estas subconfiguraciones son complementarias (con su unión forman toda la configuración inicial). La verificación de las hipótesis necesarias para aplicar el criterio de congruencia de triángulos A.L.A. se apoya en la identificación de los dos triángulos.

**G. Problema 4**

Dos círculos son tangentes interiores como se muestra en la figura 4. Calcula los radios de ambos círculos.

Este es un problema de calcular, cuenta con una configuración inicial y para su resolución requiere identificar una sub configuración relevante, es decir realizar una aprehensión operativa de cambio figural y asociar a ésta afirmaciones matemáticas (aprehensión discursiva). Para generar el discurso que resuelva el problema se requiere de la coordinación de aprehensiones operativas y discursivas, a través de varias identificaciones.

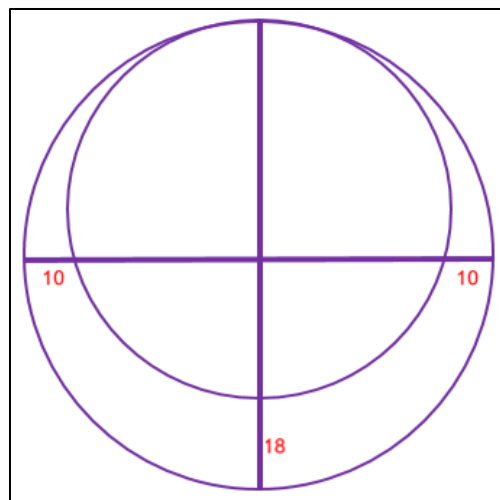


Fig. 4 Esquema del problema 4.

El problema 4 tiene más de una manera de resolución, presentamos una de ellas. (Figura 3. 6). La configuración que se obtiene al construir el radio interior cumple el papel heurístico que produce la idea que resolverá el problema. Las sub configuraciones presentes ( $\odot (A, r)$  y  $\odot (O, R)$ ), juntas establecen que los círculos son tangentes internamente. Para la determinación de los radios se debe descomponer la figura en círculos y aplicar el teorema de Pitágoras junto con suma de segmentos. Al contar con datos numéricos y dado que se solicita la medida de los radios de los dos círculos, se movilizan los registros algebraico y geométrico.

**H. Resultados y Discusiones**

Los resultados resultan del análisis del discurso desarrollado por el estudiante. Las acciones mentales realizadas se materializan en marcas hechas sobre la figura, en evidencia de las aprehensiones operativas y discursivas ejecutadas. El lenguaje, que usa el individuo, le permite registrar los resultados que va obteniendo, es decir, el lenguaje natural o simbólico usado cumple una función sinóptica, y se presenta de forma acumulativa. Se puede observar, como evidencia de lo dicho, que hay estudiantes que escriben alguna información y la borran cuando inician la presentación del discurso.

En otras palabras, los estudiantes que proceden de esta manera realizan una actividad en el plano mental, usan la configuración de manera heurística y el lenguaje de manera sinóptica. Se evidencia que son capaces de seleccionar de toda la información, organizada en la etapa anterior, aquella que es imprescindible para solucionar el problema, para lo que descubren las relaciones explícitas o implícitas entre la información proporcionada en el problema y la que disponían y han incorporado en la estructura cognitiva desarrollada en la etapa anterior. Seguidamente, seleccionan las formas de combinar estos resultados, para lo cual ejecutan aprehensiones operativas de cambio figural o de reconfiguración, en coordinación con aprehensiones discursivas. Las evidencias que se presentan en el plano concreto son las marcas sobre la configuración y una presentación de estos resultados en un lenguaje, que puede ser casi de significación propia.

La solución al problema 3 por parte del estudiante designado 04, (Figura 5) es un ejemplo de la vía uno para realizar el planteamiento del problema. Ya que se puede constatar que el estudiante usa la configuración de forma heurística y el lenguaje de manera sinóptica. Se evidencia una actividad en el plano mental, a partir de operar sobre la configuración, es decir, del plano concreto. Selecciona la información que le es imprescindible para resolver el problema. Lo que se evidencia cuando escribe  $\Delta LKN \cong \Delta LMQ$  (A.L.A) y como indicación de lo que persigue, registra “( $\beta$ =ángulo incógnito entre los dos triángulos, tanto para el  $\Delta LKN$   $\Delta LMQ$  el valor de  $\beta$  son iguales)”. Esto es una evidencia de que ha descubierto las relaciones adecuadas y las ha incorporado a su estructura cognitiva. A partir de aquí combina los resultados que ha “visualizado” y realiza actividades cognitivas, para continuar en el proceso.

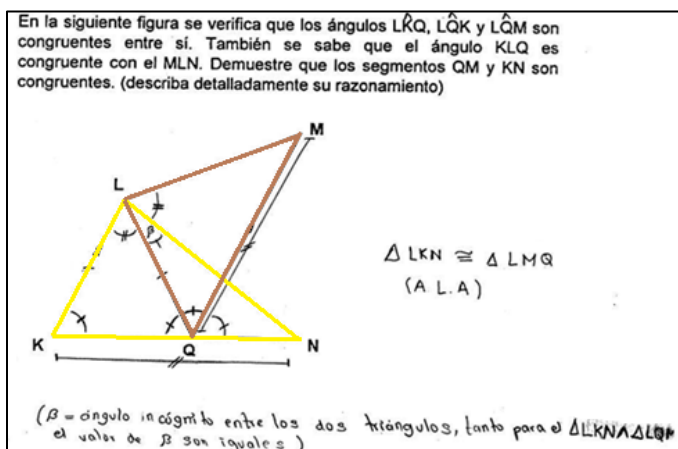


Figura 5. La vía uno para realizar el planteamiento del problema en la solución al problema 3 por el estudiante 04.

Como ejemplo de la vía dos para el planteamiento del problema presentamos la solución al problema 1 por parte del estudiante 20 (Figura 6). Se evidencia que el estudiante usa la configuración de forma sinóptica y el lenguaje de forma heurística. Se puede constatar que el estudiante no discrimina la información, sino que registra toda la información que obtiene del enunciado del problema. Además, se evidencia que sobre la configuración realiza todas las marcas que interpreta del enunciado. El estudiante acepta, durante la entrevista, que registra todo en el discurso. Así mismo, es importante anotar que el estudiante identifica el paso del plano concreto al mental, cuando dice: “Primero creo yo que para que sea más sencillo la resolución, hay que razonarlo un momento en la cabeza, y tratar de ver el camino adecuado, y si uno ve que ahí va a obtener la respuesta empieza a probar, a desarrollar, una especie de camino para llegar a él, sí no es el correcto, se pueden analizar más datos que nos dan, o incluso en el mismo gráfico, no solamente con las palabras que nos dieron el principio del enunciado, entonces se analiza deductivamente, no lo sé”. El discurso es expandido por sustitución.

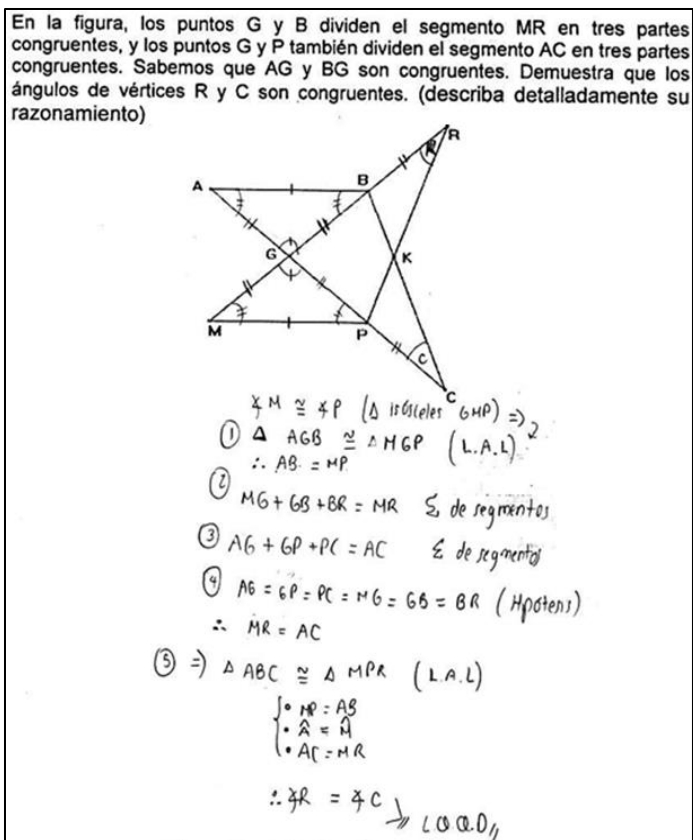


Figura 6. Ejemplo de la vía dos para el planteamiento del problema presentamos la solución al problema 1 por la estudiante 20.

La vía tres para el planteamiento del problema se ejemplificará mediante la solución al problema 4 (Figura 7) por la estudiante 9. En esta solución la estudiante asocia la resolución con un ejercicio que conocía con anterioridad. Lo que se constata cuando en la entrevista afirma:

“I: Tú viste este ejercicio y ¿por qué comenzaste a resolverlo así?”

E: Porque tenía que relacionar de algún modo los radios. Algo me decía que debía relacionar los radios y además en prepolitécnico siempre nos dijeron que debemos encontrar triángulo que unifique para encontrar dos ecuaciones”

La selección de la información que incluye en sus estructuras mentales está condicionada por la búsqueda de “un ángulo rectángulo”, lo que condiciona su accionar.

De lo expuesto se presenta la Tabla I donde se presenta los diferentes problemas con cada vía de solución elegida por cada estudiante que participó en la investigación.

En el problema uno se tiene que 13 soluciones presentan la vía de solución uno, es decir, usan la configuración de forma heurística y el lenguaje de manera sinóptica con facilidad; esto se debe a las características del problema 1 que es un problema con una configuración inicial clara y visible, por lo que demanda demostraciones simples. Dos estudiantes usan la configuración de forma sinóptica y el lenguaje de forma heurística para la resolución del problema 1 y uno por la vía tres.



Dos círculos son tangentes interiores como se muestra en la figura. Calcula los radios de ambos círculos. (describe detalladamente su razonamiento)

$$\textcircled{1} 2r + 18 = 2R$$

$$r + 9 = R$$

$$\textcircled{2} x^2 + 9^2 = r^2$$

$$\textcircled{3} x + 10 = R$$

$$x = R - 10$$

$$\textcircled{4} \text{ en } \textcircled{2} \text{ } x \text{ en } x$$

$$\textcircled{4} (R - 10)^2 + 81 = r^2$$

$$\textcircled{1} \text{ en } \textcircled{4} \text{ } R \text{ en } R$$

$$(r + 9 - 10)^2 + 81 = r^2$$

$$(r - 1)^2 + 81 = r^2$$

$$\cancel{r^2} - 2r + 1 + 81 = \cancel{r^2}$$

$$82 = 2r$$

$$r = 41$$

$$R = 50$$

Figura 7. Ejemplo de la vía tres para el planteamiento del problema presentamos la solución al problema 4 por la estudiante 09.

ninguna solución por la vía dos. Algo parecido pasa en el problema cuatro, debido a la complejidad del problema en sí.

#### IV. CONCLUSIONES

La manera de resolución de problemas constituye la parte fundamental de la Matemática, los ejercicios rutinarios, mecánicos no permiten fortalecer los procesos cognitivos que permitan la visualización de las maneras adecuadas de resolución de problemas.

Las taxonomías que existen en la resolución de problemas, sus características, etapas de resolución, las estrategias en la enseñanza son fundamentales en la resolución de ejercicios de geometría de manera que puedan crear enunciados que impliquen un esfuerzo cognitivo al resolverlos.

Cuando el estudiante conoce previamente el ejercicio las vías de solución son la uno o la dos, sin embargo, como el estudiante desconoce o no puede visualizar a primera vista una forma, trata de asociar con problemas conocidos, así no puedan llegar a una solución adecuada.

La forma de resolver ejercicios permite al estudiante desarrollar el pensamiento y el lenguaje algebraico de una manera correcta.

TABLA I

PROBLEMAS CON VÍA DE SOLUCIÓN ELEGIDA POR CADA ESTUDIANTE

Vías de solución	P1	P2	P3	P4	TOTAL
Vía uno	E02, E04, E05, E06, E07, E08, E09, E11, E12, E13, E14, E16, E18 (13/20)	E03, E13, E17, E19 (4/20)	E03, E12, E14, E17 (4/19)	E02, E14 (1/17)	22
Vía dos	E03, E20 (2/20)	E02, E05, E07 (3/20)	(0/19)	E08 (1/17)	6
Vía tres	E19 (1/20)	E04, E06, E09, E14, E15, E16, E18, E20 (8/20)	E2, E04, E05, E06, E07, E08, E09, E12, E13, E14, E15, E16, E18, E20 (14/20)	E01, E04, E05, E06, E07, E09, E13, E16, E17, E18, E19 (11/17)	34
Total	16	15	18	13	62

#### REFERENCIAS

- [1] L. S. Vygotsky, Historia de las funciones psíquicas superiores. En Obras Escogidas, Madrid: Visor., 1995.
- [2] Leontiev, Activity, consciousness and personality, NJ: Prentice-Hall, 1978.
- [3] R. Duval, «Registros de Representación Semiótica y Funcionamiento Cognitivo del Pensamiento,» *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, vol. 5, pp. 37-65, 1993.
- [4] R. Duval, *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages*, Suisse: Peter Lang, 1995.
- [5] R. Duval, «Geometry from a cognitive point of view,» de *Perspective on the Teaching of the Geometry for the 21st Century*, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 1998, pp. 37-51.
- [6] R. Duval, «Representation, vision and visualisation: cognitive functions in mathematical,» de *Proceedings of the 21st Annual Meeting North American*, Columbus, ERIC/CSMEE Publications-The Ohio State University, 1999, pp. 3-26.
- [7] R. Duval, «Produire et lire des textes de démonstration,» de *Écriture et compréhension: pourquoi faire écrire des textes de démonstration par les élèves?*, Paris, Ellipses., 2001.
- [8] R. Duval, *Semiosis y Pensamiento Humano*, Colombia: Grupo de Educación Matemática, Universidad del Valle, 2004.
- [9] R. Duval, «Un análisis cognitivo de problemas de comprensión en el aprendizaje de las matemáticas,» de *Comprensión y aprendizaje en matemáticas: perspectivas semióticas seleccionadas Énfasis*, Bogotá, Colombia, Universidad Distrital Francisco José de Caldas., 2016, pp. 61-94.
- [10] G. y. Q. H. Torregrosa, «Coordinación de procesos cognitivos en geometría,» *Revista*, vol. 10, n° 2, pp. 275-300, 2007.
- [11] G. Q. H. y. P. M. Torregrosa, «Razonamiento configural como coordinación de procesos,» *Enseñanza de las Ciencias*, vol. 28, n° 3, pp. 327-340, 2010.

- [12] J. & T.-G. G. Martínez, «Razonamiento configural y procedimientos de verificación en contexto geométrico.» *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa.*, vol. 16, pp. 339-368, 2013.
- [13] V. V. & Z. V. P. Davydov, «A construição de Vigotsky para o.» de H. Daniels, *Vygotsky em Foco: Pressuposto e*, São Paulo, Papirus, 2003, p. 296).
- [14] C. G. I. M. E. M. T. M. M. O. J. y. o. Coll, *Psicologia do Ensino*, Porto Alegre: Artmed, 1997.
- [15] P. Galperín, *Teoría de la formación por etapas de las acciones mentales*, Moscú, Rusia: Editorial MGY , 1995.
- [16] N. Talízina, «Conferencias sobre “Los Fundamentos de la Enseñanza en la Educación,» Universidad de la Habana. , 1984.
- [17] R. & S. L. A. Duval, *Comprensión y aprendizaje en matemáticas: perspectivas semióticas seleccionadas*, Bogotá: Universidad Distrital Francisco Jose De Caldas., 2016.
- [18] A. Botero, «Neuroeducación ante los retos de la educación para el desarrollo humano.» vol. 1, 2014.
- [19] R. Duval, «A cognitive Analysis of Problems of comprehension in a Learning,» de *Learning of Mathematics Educacional Studies in Mathematics*, Springer, 2006, pp. 103-131.
- [20] M. G. Kantowski, «Mathematics Educations Research Implications for the 80's. Problem,» vol. 4, pp. 111-126, 1981.
- [21] R. Guibourg, *Lógica, proposición y norma*, Buenos Aires: Astrea , 2008.
- [22] G. Torregrosa, «Coordinación de procesos cognitivos en geometría.» *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, vol. 10, nº 2, pp. 275-300, 2007.
- [23] S. L. y. G. T. F. Clemente, «Visualization and Configural Reasoning,» vol. 31, nº 51, pp. 497 - 516., 2017.
- [24] A. Mesquita, «On conceptual obstacles linked with external representation in geometry,» *Mathematical Behavior*, vol. 17, nº 2, pp. 183-195, 1998.
- [25] F. C. y. S. Linares, «Formas del discurso y razonamiento configural de estudiantes para maestros en la resolución de problemas de geometría,» , vol. 33, nº 1, pp.,» *Enseñanza de las Ciencias*, vol. 3333, nº 1, pp. 9-27, 2015.