

# Covariational Reasoning in engineering students of the National University of Moquegua

Alejandro Manuel Ecos Espino, Dr<sup>1</sup>, Nilton César León Calvo, Ms<sup>1</sup>, Zoraida Rocío Manrique Chávez, Dr<sup>2</sup>, Joffré Huamán Núñez, Dr<sup>3</sup>, Braulio Barzola Moscoso, Dr<sup>3</sup>, Alejandro Rumaja Alvitez, Ms<sup>4</sup>, Oscar Manuel García Cajo, Lic<sup>5</sup>

<sup>1</sup>Universidad Nacional de Moquegua, Perú, alejandroecos2013@hotmail.com, niltoncesarleon@gmail.com

<sup>2</sup>Universidad Nacional Intercultural de la Amazonía, Perú, zoramanrique@hotmail.com

<sup>3</sup>Universidad Nacional Micaela Bastidas de Apurímac, Perú, joffrehn@hotmail.com, bbarzola72@hotmail.com

<sup>4</sup>Universidad Nacional José María Arguedas, Perú, arumaja300@hotmail.com

<sup>5</sup>Universidad Nacional de Huancavelica, Perú, oscar.garcia@unh.edu.pe

*Abstract— The analysis of the variational behavior of the variables that are part of a function is an important aspect in the construction of mathematical models that describe phenomena of reality, a skill that is fundamental in the training of future engineers. This article presents the results of a study whose objective was to describe and analyze the levels of covariational reasoning presented by engineering students within the theoretical framework proposed by Carlson and Larsen (2003). For this purpose, a questionnaire was designed with problem situations that inquired about the identification of intervals of variability, growth, decrease, stability, as well as the description and analysis of the behavior of the variables that make up a function, represented in different registers. The assessment of the forms of reasoning was carried out quantitatively and qualitatively, with an exploratory and descriptive perspective, with 38 students participating in the environmental engineering degree at the National University of Moquegua. The results indicate that the covariational reasoning shown by a large part of the students is concentrated within level I and II, showing that, although they coordinate the direction of the changes between the variables, they do not discriminate the quantity, as well as the behavior of the reason that occurs between these changes.*

**Keywords:** *Mental actions, Level of reasoning, Variation, Change*

Digital Object Identifier (DOI):  
<http://dx.doi.org/10.18687/LACCEI2020.1.1.406>  
ISBN: 978-958-52071-4-1 ISSN: 2414-6390

# Razonamiento Covariacional en estudiantes de ingeniería de la Universidad Nacional de Moquegua

Alejandro Manuel Ecos Espino, Dr<sup>1</sup>, Nilton César León Calvo, Ms<sup>1</sup>, Zoraida Rocío Manrique Chávez, Dr<sup>2</sup>, Joffré Huamán Núñez, Dr<sup>3</sup>, Braulio Barzola Moscoso, Dr<sup>3</sup>, Alejandro Rumaja Alvitez, Ms<sup>4</sup>, Oscar Manuel García Cajo, Lic<sup>5</sup>

<sup>1</sup>Universidad Nacional de Moquegua, Perú, alejandroecos2013@hotmail.com, niltoncesarleon@gmail.com

<sup>2</sup>Universidad Nacional Intercultural de la Amazonía, Perú, zoramanrique@hotmail.com

<sup>3</sup>Universidad Nacional Micaela Bastidas de Apurímac, Perú, joffrehn@hotmail.com, bbarzola72@hotmail.com

<sup>4</sup>Universidad Nacional José María Arguedas, Perú, arumaja300@hotmail.com

<sup>5</sup>Universidad Nacional de Huancavelica, Perú, oscar.garcia@unh.edu.pe

*Resumen– El análisis del comportamiento variacional de las variables que forman parte de una función constituye un aspecto importante en la construcción de modelos matemáticos que describen fenómenos de la realidad, habilidad que resulta fundamental en la formación de los futuros ingenieros. Este artículo presenta los resultados de un estudio cuyo objetivo fue describir y analizar los niveles de razonamiento covariacional que presentan estudiantes de ingeniería dentro del marco teórico propuesto por Carlson y Larsen (2003). Para tal propósito se diseñó un cuestionario con situaciones problemáticas que indagaban sobre identificación de intervalos de variabilidad, crecimiento, decrecimiento, estabilidad, así como la descripción y análisis del comportamiento de las variables que componen una función, representada en diferentes registros. La valoración de las formas de razonamiento se realizó de manera cuantitativa y cualitativa, con una óptica exploratoria y descriptiva, participando 38 estudiantes de la carrera de ingeniería ambiental de la Universidad Nacional de Moquegua. Los resultados indican que el razonamiento covariacional que muestran gran parte de los estudiantes se concentran dentro del nivel I y II, poniendo en evidencia que, si bien coordinan la dirección de los cambios entre las variables, no llegan a discriminar la cantidad, así como el comportamiento de la razón que se produce entre dichos cambios.*

*Palabras Claves- Acciones mentales, niveles de razonamiento, variación, cambio.*

## I. INTRODUCCIÓN

Dentro del marco de las carreras de ingeniería, ya sea a nivel epistemológico así como de formación profesional, el papel que cumple la matemática es imprescindible. Identificar la relación que existe entre los conceptos de ingeniería con los matemáticos es de vital importancia dentro del proceso de enseñanza y debe permitir al estudiante de ingeniería, el desarrollo de habilidades y estrategias para comprender los fenómenos que se presentan a su alrededor. El manejo de conceptos matemáticos en un proyecto de ingeniería obliga a aceptar que dichos proyectos han sido planeados teniendo en cuenta el pensamiento matemático [1]. El enfoque de dicho pensamiento tiende al análisis de las relaciones entre las

variables de un fenómeno o procesos a través de los vínculos establecidos entre los conceptos matemáticos y su caracterización por medio de conceptos [2]. Según lo anterior, la matemática permitirá el acceso a otros conocimientos, permitiendo la generación de habilidades que el futuro ingeniero necesita para desenvolverse satisfactoriamente, por lo cual, los modelos matemáticos que permiten el enlace entre la teoría matemática y el mundo cotidiano constituyen una opción didáctica importante en la formación de los ingenieros [3]. En este sentido, resulta importante la modelación de relaciones funcionales para la interpretación de modelos de eventos dinámicos y para la comprensión de los conceptos principales del cálculo [4].

Sin embargo, en el ambiente universitario, el aprendizaje de la matemática en las carreras de ingeniería constituye un problema evidente que se refleja a través del número creciente de estudiantes que reprobaban las asignaturas de esta área del conocimiento, así como en la escasa interpretación que asignan a los diferentes conceptos matemáticos que se abordan a nivel superior. Todo ello, se afianza en muchos casos por la preferencia de los docentes hacia la enseñanza tradicional, así como a la forma pasiva en que los estudiantes enfrentan su aprendizaje de tipo matemático [5]. Muchas investigaciones han constatado que la enseñanza tradicional ha sido poco efectiva, centrando su actuar a la comprensión de algoritmos de resolución mecánica de ciertos ejercicios tipo, generando dificultades en la comprensión adecuada de conceptos y métodos de pensamiento que son el centro de la matemática [6]. Se puede lograr que los estudiantes calculen límites, derivadas o integrales sin que sean capaces de asignar un sentido más amplio a las nociones involucradas en su comprensión [7].

Los estudiantes prefieren actuar de manera mecánica, restringiendo su trabajo a la aplicación de fórmulas conocidas para encontrar resultados inmediatos y al manejo algorítmico de las variables que forman parte de un modelo matemático, sin cuestionar como es el tipo de dependencia que entre ellas

Digital Object Identifier (DOI):

<http://dx.doi.org/10.18687/LACCEI2020.1.1.406>

ISBN: 978-958-52071-4-1 ISSN: 2414-6390

existe y sin analizar realmente el comportamiento de esas variables [5]. Los estudiantes ingresan a la universidad con una comprensión deficiente sobre las funciones e incluso estudiantes académicamente talentosos, tienen dificultades para modelar relaciones funcionales de situaciones que involucran la razón de cambio cuando varía continuamente en una relación dependiente con otra variable [4]. Las dificultades de los estudiantes que se presentan en cursos de cálculo devienen de su poca familiarización con la construcción de modelos, sus propósitos, convenciones, representaciones y sus significados en términos de las situaciones que representan y el tipo de problema que se quiere resolver [8].

En este marco, las dificultades que presentan los estudiantes para relacionar conceptos que se caracterizan por su dinámica con sus representaciones gráficas y su movimiento, pueden ser analizadas a través de la variación [9].

Investigaciones realizadas los últimos años en educación matemática, subrayan lo importante que constituye identificar el dinamismo de ciertos conceptos matemáticos y el estudio de procesos de variación [10]; de manera particular se llama la atención sobre el valor de la percepción, la identificación y caracterización de la variación en diferentes contextos para el desarrollo del pensamiento matemático [11].

El presente estudio tuvo como objetivo describir y analizar el nivel de razonamiento covariacional en estudiantes de ingeniería cuando tienen que analizar situaciones problemáticas sobre comportamiento variacional de funciones, considerando que representa un elemento importante en la comprensión del cambio de fenómenos de la vida real y su entendimiento es eje indispensable en la formación matemática de estudiantes universitarios.

Para este propósito, la descripción y análisis del razonamiento covariacional de los estudiantes se efectuó dentro del marco teórico donde se define al razonamiento covariacional como las actividades cognitivas implicadas en la coordinación de dos cantidades que varían mientras se atiende a la forma en que cada una de ellas cambia con respecto a la otra [4]. En tal sentido, la descripción y análisis del razonamiento covariacional de los estudiantes, exige la evaluación de 5 acciones mentales (Tabla 1), las cuales están relacionadas con 5 niveles de razonamiento.

TABLA 1  
ACCIONES MENTALES PARA LA COVARIACIÓN

Acción mental	Descripción de la acción mental
AM1	Coordinación del valor de una variable con los cambios en la otra

AM2	Coordinación de la dirección del cambio de una variable con los cambios en la otra variable.
AM3	Coordinación de la cantidad de cambio de una variable con los cambios de la otra
AM4	Coordinación de la razón de cambio promedio de la función con los incrementos uniformes del cambio en la variable de entrada.
AM5	Coordinación de la razón de cambio instantánea de la función, con los cambios continuos en la variable independiente para todo el dominio de la función.

Fuente: Carlson et al (2003)

Según este marco teórico, la AM1 constituye el inicio de las habilidades de razonamiento covariacional. El estudiante tiene que ser capaz de coordinar los cambios de una variable con respecto de otra, a través de un proceso que inicia con la identificación de las diferentes magnitudes involucradas en el fenómeno: constantes, parámetros y variables; continúa con la identificación de los tipos básicos de variación que presentan las magnitudes variables detectadas, para culminar la acción con la coordinación de las formas de relacionarse dichas magnitudes en una relación de dependencia.

El avance que se da en la acción mental AM2, es el hecho de que, además de identificar los cambios en las variables, también se coordina el sentido en el que se da este cambio; es decir, se identificará que al cambiar una de las variables la otra presenta una disminución o aumento. Aquí es donde se requiere describir el fenómeno como un conjunto sucesivo de estados, que están marcados o definidos por los valores numéricos que poseen las magnitudes variables en cada uno de ellos. Para dar sentido y dirección a los cambios de las magnitudes variables durante el transcurso del fenómeno, se comparan dos de sus diferentes estados, llamándolos estado inicial y estado final. Con lo anterior podemos decir que para evidenciar AM2, exigiremos la identificación del comportamiento variacional general que está presentando el fenómeno: crecimiento, decrecimiento.

La acción mental AM3 se enfoca en la cuantificación del cambio, de tal manera que se lleva a cabo la coordinación de la cantidad de cambio en la variable independiente, con la cantidad de cambio de la variable dependiente.

En la acción mental AM4, se presenta de una forma clara la coordinación entre los cambios uniformes de la variable independiente con los cambios de la variable dependiente, hablando claramente de la existencia de la razón de cambio promedio para cada intervalo considerado.

La acción mental AM5 es alcanzado cuando se logra pasar de la coordinación de la razón de cambio promedio a la razón de cambio instantánea para el continuo de instantes del fenómeno observado.

Las acciones mentales propuestas en este marco teórico permiten la clasificación de los estudiantes en niveles de razonamiento covariacional (Tabla 2) los cuales se sustentan en la expresión de determinadas acciones mentales.

TABLA 2  
NIVELES DE RAZONAMIENTO COVARIACIONAL

Niveles	Característica
<b>Nivel 1 (N1)</b> Coordinación	En el nivel de coordinación, las imágenes de covariación pueden sustentar a la acción mental de coordinar el cambio de una variable con cambios en la otra variable (AM1)
<b>Nivel 2 (N2)</b> Dirección	En el nivel de dirección, las imágenes de la covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la dirección del cambio de una de las variables con cambios en la otra. Las acciones mentales identificadas como AM1 y AM2 son sustentadas por imágenes de N2.
<b>Nivel 3 (N3)</b> Coordinación cuantitativa	En el nivel de la coordinación cuantitativa, las imágenes de la covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la cantidad de cambio en una variable con cambios en la otra. Las acciones mentales identificadas como AM1, AM2 y AM3 son sustentadas por las imágenes N3
<b>Nivel 4 (N4)</b> Razón promedio	En el nivel de la razón promedio, las imágenes de covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la razón de cambio promedio de una función con cambios uniformes en los valores de entrada de la variable. La razón de cambio promedio se puede descomponer para coordinar la cantidad de cambio de la variable resultante con los cambios en la variable de entrada. Las acciones mentales identificadas como AM1 hasta AM4 son sustentadas por imágenes N4
<b>Nivel 5 (N5)</b> Razón de cambio instantánea	En el nivel de la razón instantánea, las imágenes de covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la razón de cambio instantánea de una función con cambios continuos en la variable entrada. Este nivel incluye una consciencia de que la razón de cambio instantánea resulta de refinamientos más y más pequeños en la razón de cambio promedio. También incluye la consciencia de que el punto de inflexión es aquel en el que la razón de cambio pasa de ser creciente a decreciente, o al contrario. Las acciones mentales identificadas como AM1 a AM5 son sustentadas por las imágenes de N5

Fuente: Carlson et al (2003)

Estos niveles son progresivos y atienden el carácter dinámico de las acciones mentales, queriendo decir con esto que mientras más alto es el nivel, se espera que el tipo de razonamiento covariacional que se logra vaya siendo más preciso y refinado, resultado de la evolución del razonamiento en el nivel anterior. Lo anterior implica lo que sin duda es una característica en la que ponen especial énfasis los autores: cada nivel de razonamiento sustenta la actividad mental con la que está relacionado directamente, pero a su vez tiene que sustentar todas las actividades mentales que preceden a ella. Se dice que un individuo ha alcanzado un determinado nivel de razonamiento covariacional si sustenta las acciones mentales asociadas con ese nivel y con los niveles precedentes.

## II. METODOLOGÍA

El enfoque de investigación utilizado en este estudio es cuantitativo cualitativo, dentro de un marco descriptivo y explicativo en relación a los niveles de razonamiento variacional y las dificultades que presentan los estudiantes ante situaciones problemáticas diseñadas en torno al cambio y variación de las variables que forman parte de una función.

### *Fase 1. Determinación de muestra*

La población estuvo conformada por estudiantes de la carrera de ingeniería ambiental de la Universidad Nacional de Moquegua en Perú. Se trabajó con una muestra no probabilística de tipo intencional conformada por 38 estudiantes (61% varones y 39% mujeres) distribuidos de la siguiente manera: 20 (65% varones y 35% mujeres) del curso de Matemática Básica y 18 (56% varones y 44% mujeres) del curso de Cálculo I. Dichos estudiantes tenían edades que oscilaban entre 16 y 19 años.

### *Fase 2. Diseño y descripción de instrumento de investigación*

Se diseñó y validó un cuestionario compuesto de 5 situaciones problemáticas construidas en diferentes registros de representación de las funciones: gráfico, tabular, verbal. Las preguntas que componían dichas situaciones giraban en torno a la identificación de intervalos de variabilidad, crecimiento, decrecimiento, estabilidad, así como la descripción y análisis del comportamiento de las variables que componen una función.

La primera situación problemática se diseñó dentro del registro gráfico y mostraba el comportamiento de la velocidad de cierto móvil. Se formularon 8 cuestiones que exigían del estudiante el análisis gráfico dentro del marco de la variación y el cambio y acciones características a los niveles I, II y III de razonamiento. La descripción de estas interrogantes así como las acciones esperadas por los estudiantes se muestran a continuación:

TABLA 3  
ACCIONES MENTALES REQUERIDAS EN LA SITUACIÓN 1

Ítem	Descripción	Acción
<b>A</b>	El estudiante debe identificar las variables involucradas en la gráfica	AM1
<b>B</b>	A través del análisis gráfico, el estudiante debe identificar los intervalos de tiempo donde la velocidad está creciendo	AM2
<b>C</b>	A través del análisis gráfico, el estudiante debe identificar los intervalos de tiempo donde la velocidad está decreciendo	AM2
<b>D</b>	A través del análisis gráfico, el estudiante debe identificar los intervalos de tiempo donde la velocidad es estable	AM2

<b>E</b>	A través del análisis gráfico, el estudiante debe identificar los intervalos de tiempo donde la velocidad aumenta más	AM3
<b>F</b>	A través del análisis gráfico, el estudiante debe identificar los intervalos de tiempo donde la velocidad disminuye menos	AM3
<b>G</b>	A través del análisis gráfico, el estudiante debe identificar los intervalos de tiempo donde la velocidad aumenta más rápido	AM3
<b>H</b>	A través del análisis gráfico, el estudiante debe identificar los intervalos de tiempo donde la velocidad disminuye más lento	AM3

Fuente: Elaboración Propia

La segunda situación problemática también se diseñó dentro del registro gráfico, y demandaba del estudiante la coordinación entre este registro y el registro verbal. En esta actividad se mostraba la gráfica del ritmo que siguieron 4 personas en un determinado tramo de una carrera, así como la descripción verbal del comportamiento observado por las 4 personas. El desarrollo de esta actividad exigía la puesta en marcha de la acción mental AM3.

La tercera situación se presentó en el registro gráfico y describía el comportamiento del costo de llamadas en relación a la duración y la distancia con la que se efectuó la llamada que exigían del estudiante acciones características del nivel I y II de razonamiento. Aquí se plantearon aquí 5 interrogantes cuya descripción y acciones esperadas por los estudiantes se muestra a continuación:

TABLA 4  
ACCIONES MENTALES REQUERIDAS EN LA SITUACIÓN 3

Ítem	Descripción	Acción
<b>A</b>	El estudiante debe identificar las variables involucradas en la gráfica	AM1
<b>B</b>	El estudiante debe marcar dentro de la gráfica la ubicación del costo de determinada llamada en comparación a la llamada efectuada por otra persona	AM2
<b>C</b>	El estudiante debe analizar los datos de la gráfica e identificar cuál de las personas llamó de mayor distancia	AM2
<b>D</b>	El estudiante debe analizar los datos de la gráfica e identificar cuál de las personas llamó de menor distancia	AM2
<b>E</b>	El estudiante debe analizar los datos de la gráfica e identificar cuál de las personas llamaron a una misma distancia y duración	AM2

Fuente: Elaboración Propia

La cuarta situación se presentó en el registro gráfico y giraba en torno a los ingresos obtenidos según las toneladas de agregados de construcción vendidas. El análisis gráfico variacional exigía al estudiante acciones propias de los niveles I, II, III y IV de razonamiento. En esta actividad se formularon 6 interrogantes cuyas descripciones y acciones mentales esperadas por los estudiantes se muestran a continuación:

TABLA 5  
ACCIONES MENTALES REQUERIDAS EN LA SITUACIÓN 4

Ítem	Descripción	Acción
<b>A</b>	El estudiante debe identificar las variables involucradas en la gráfica	AM1
<b>B</b>	El estudiante debe identificar la dependencia entre las variables mostradas	AM1
<b>C</b>	El estudiante debe identificar el ritmo de variación del ingreso en intervalos iguales de toneladas vendidas	AM4
<b>D</b>	El estudiante debe determinar el ingreso obtenido para una cantidad de toneladas que no se muestra en la gráfica	AM4
<b>E</b>	El estudiante debe determinar el ingreso obtenido para una cantidad de toneladas que no se muestra en la gráfica	AM4
<b>F</b>	El estudiante debe determinar la fórmula matemática para el ingreso obtenido según la cantidad de toneladas vendidas	AM4

Fuente: Elaboración Propia

La última situación problemática, se presentó en el registro tabular y mostraba las distancias recorridas por dos móviles cerca del tiempo 3 segundos. La naturaleza de la actividad y de las 2 interrogantes propuestas exige que el estudiante active las acciones mentales propias del nivel V de razonamiento.

### Fase 3. Evaluación de resultados obtenidos

Luego de aplicar el cuestionario a los estudiantes, se efectuaron análisis descriptivos porcentuales del número de estudiantes según nivel de razonamiento covariacional así como de la cantidad de respuestas correctas según los ítems considerados en cada situación problemática. Además, se efectuaron análisis de varianza de un factor para identificar diferencias entre las medias obtenidas por los estudiantes, a nivel de asignaturas como a nivel de género. Por otro lado, el análisis de las respuestas de los estudiantes a cada una de las situaciones propuestas se efectuó desde una óptica cualitativa, en su forma exploratoria y descriptiva [12].

Los ítems considerados para la evaluación del nivel de razonamiento covariacional de los estudiantes se muestran en la siguiente tabla:

TABLA 6  
ÍTEMES RELACIONADOS A LOS NIVELES DE RAZONAMIENTO

Nivel	Ítems
I	1a, 3a, 4a, 4b
II	1b, 1c, 1d, 3b, 3c, 3d, 3e
III	1e, 1f, 1g, 1h, 2
IV	4c, 4d, 4e, 4f
V	5a,5b

Fuente: Elaboración Propia

Para que un estudiante sea considerado dentro de un nivel de razonamiento, se manejó el criterio que debe contestar adecuadamente, por lo menos la mitad de ítems de cada nivel y todos los ítems de los niveles anteriores.

### III. RESULTADOS

A continuación se presentan los resultados encontrados luego de la aplicación del instrumento de investigación:

#### A. Nivel de Razonamiento Covariacional

Se encontró que el 45% de los estudiantes se encuentran en el nivel I de razonamiento covariacional, de los cuales el 76% de ellos respondieron menos de la mitad de los ítems correspondientes al nivel II. Además, el 32% de los estudiantes se encuentran en el nivel II de los cuales el 75% de ellos respondieron algunos ítems del nivel III. Por otro lado, sólo el 11% de los estudiantes se encuentran en el nivel III de los cuales el 75% de ellos respondieron algunos ítems del nivel IV. El 5% de los estudiantes se encuentran en el nivel IV y solo el 8% se encuentra en el nivel V.

TABLA 7  
NIVELES DE RAZONAMIENTO EN ESTUDIANTES

Nivel	fi	fi%
I	17	45
II	12	32
III	4	11
IV	2	5
V	3	8

Fuente: Cuestionario aplicado a estudiantes

Dado el carácter recursivo de los niveles, podemos afirmar que el 100% de los estudiantes pueden identificar y coordinar cambios entre las variables presentes en las situaciones que se presentaron en el cuestionario. El 32% de ellos logran incluso coordinar la dirección de estos cambios y 11% de ellos consiguen cuantificar los cambios en las variables. Las cuestiones relacionadas a la evaluación de razones de cambio tanto promedio como instantáneas sólo han sido abordadas por el 5% y 8% del total de estudiantes.

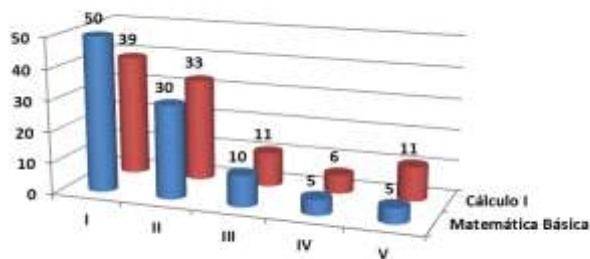


Fig. 1 Porcentaje de estudiantes según nivel y asignatura

En cuanto al nivel de razonamiento covariacional de los estudiantes por asignatura, se verifica que, tanto en estudiantes de Matemática Básica como en Cálculo I, el mayor porcentaje se encuentran en el nivel I (50% en Matemática Básica y 39% de Cálculo I) lo cual indica que la mayor parte de estudiantes sólo identifica las variables y coordina sus cambios. Si bien los demás estudiantes reflejan que han superado este nivel en ambas asignaturas, sólo un porcentaje reducido de estudiantes (5% en Matemática Básica y 6% en Cálculo I) logran evaluar la razón de cambio promedio que los ubica en el nivel IV; mientras que sólo el 5% en Matemática Básica y el 11% en Cálculo I logra evaluar la razón de cambio instantánea ubicándose en el Nivel V.

En función a lo anterior, se plantearon las siguientes hipótesis, en cuanto a las medias obtenidas por los estudiantes de ambas asignaturas cuando resolvieron el cuestionario:

**H<sub>0</sub>**: No existen diferencias significativas entre las medias obtenidas de los estudiantes de las asignaturas de Matemática Básica y Cálculo I

**H<sub>1</sub>**: Existen diferencias significativas entre las medias obtenidas de los estudiantes de las asignaturas de Matemática Básica y Cálculo I

TABLA 8  
PRUEBA DE DIFERENCIA DE MEDIAS POR ASIGNATURAS

Asignatura	M	DS	F	p
Matemática Básica	7.55	3.53	19.4	0.121
Cálculo I	8.48	4.15		

Fuente: Cuestionario aplicado a estudiantes

En la tabla 8, se tiene que el valor “p” es de 0.121 el cual es mayor al nivel de significancia 0.05. Por lo tanto, se rechaza la hipótesis alternativa **H<sub>1</sub>**, afirmando que no existen diferencias entre las medias obtenidas en la resolución del cuestionario por los estudiantes, tanto de Matemática Básica como de Cálculo I. Además, las medias obtenidas nos muestran que en ambos grupos de análisis, el desarrollando no es el adecuado

Este resultado pone de manifiesto que, si bien los estudiantes en ambos grupos han desarrollado temas relacionados al manejo de las funciones, no han desarrollado en el desarrollo de sus clases actividades dirigidas al análisis de la variación y el cambio de las variables, lo cual no les ha permitido desarrollar una noción básica de la razón de cambio, ya sea promedio como instantánea.

Lo anterior evidencia la forma tradicional de enseñanza a la cual los estudiantes han sido expuestos, donde se ha

privilegiado el manejo de algoritmos de cálculo y no la comprensión de los conceptos matemáticos.

TABLA 9  
NIVELES DE RAZONAMIENTO SEGÚN GÉNERO

Nivel	Varones		Mujeres	
	fi	fi%	fi	fi%
I	12	52	5	33
II	7	31	5	33
III	1	4	3	20
IV	1	4	1	7
V	2	9	1	7

Fuente: Cuestionario aplicado a estudiantes

A nivel de género, la Tabla 9 muestra que en general sólo el 17% de los varones supera el nivel II de razonamiento covariacional, mientras que en el caso de las mujeres el 34% supera este nivel. Se puede observar que hay más mujeres que varones tanto en el nivel I como en el nivel III, lo cual indica que más mujeres no logran superar la etapa de identificación y coordinación de los cambios de las variables, así como también hay más mujeres que logran identificar la dirección en la cual estos cambios se producen.

Lo anterior nos permitió el planteamiento de las siguientes hipótesis, en relación a las medias obtenidas por los estudiantes a nivel de género cuando resolvieron el cuestionario:

**Ho:** No existen diferencias significativas entre las medias obtenidas de los estudiantes según su género

**H1:** Existen diferencias significativas entre las medias obtenidas de los estudiantes según su género

TABLA 10  
PRUEBA DE DIFERENCIA DE MEDIAS SEGÚN GÉNERO

Género	M	DS	F	p
Varones	7.27	3.98	23.4	0.0256*
Mujeres	9.09	3.37		

Fuente: Cuestionario aplicado a estudiantes

En la tabla 9, se tiene que el valor “p” es de 0.0256 el cual es menor al nivel de significancia 0.05. Por lo tanto, la hipótesis nula Ho se rechaza y afirmamos que las mujeres mostraron un mejor desempeño y presentan un mejor nivel de razonamiento covariacional que los varones. En general, las mujeres manejan mejor el análisis de la variación y el cambio de las variables dentro de situaciones problemáticas diseñadas en torno a las funciones reales de variable real. Sin embargo, a pesar de esta diferencia, los valores de las medias

encontradas reflejan que en ambos grupos de análisis, el desempeño no es adecuado.

### B. Descripción de las respuestas a las situaciones problemáticas

El análisis de los resultados obtenidos en cada una de las situaciones problemáticas propuestas a los estudiantes nos señala lo siguiente:

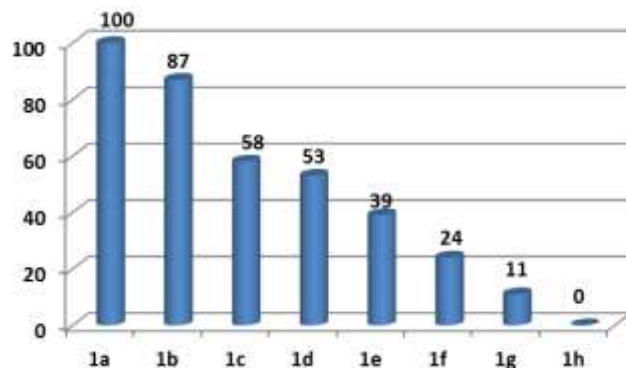


Fig. 2 Porcentaje de respuestas correctas en situación problemática 1

En relación a la primera situación, los ítems que menores porcentajes de respuestas correctas obtuvieron fueron los relacionados con el nivel III (1e, 1f, 1g, 1h). Todos los estudiantes lograron identificar las variables dentro de la situación presentada (1a), mientras que más del 50% de ellos (1b, 1c, 1d) lograron avanzar y efectuar un adecuado análisis gráfico y evaluar el crecimiento, decrecimiento y estabilidad de la velocidad en la situación presentada. Sin embargo, cuando la actividad sugirió la evaluación de la cantidad y forma como se produce el cambio de velocidad, los estudiantes mostraron mayores problemas. Estas dificultades en el análisis gráfico por parte de los estudiantes podrían deberse a las carencias que mostraron para poner en correspondencia términos como: “aumenta más rápido” o “disminuye menos”; con lo que la gráfica muestra.

En relación a la segunda situación problemática, ésta demandaba del estudiante poner en correspondencia el registro gráfico con el verbal. Los enunciados propuestos exigían de los estudiantes realizar acciones no sólo para interpretar e identificar la dirección de los cambios de las trayectorias de las 4 personas mencionadas, sino además deberían haber cuantificado esos cambios. Los resultados obtenidos muestran que sólo el 45% de los estudiantes lograron dar respuesta adecuada a esta actividad, lo que refleja que este tipo de acciones no son familiares en los estudiantes, lo cual no les permite a la mayoría de ellos ubicarse dentro del nivel III de razonamiento covariacional.



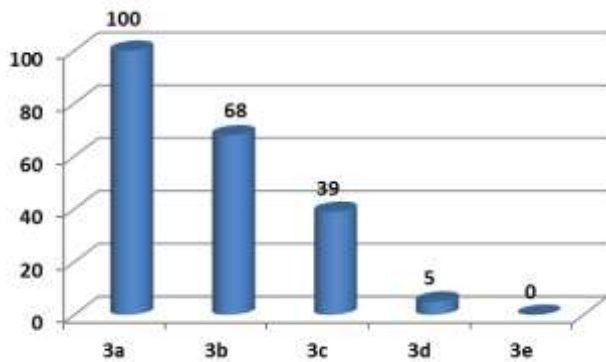


Fig. 3 Porcentaje de respuestas correctas en situación problémica 3

En esta actividad, el 100% logró identificar las variables dentro de la situación problémica. Sin embargo, los ítems que exigían cuantificar el costo de las llamadas según la distancia y el tiempo, fueron los menos respondidos (3c, 3d y 3e). El ítem 3b que exigía la determinación del costo de la llamada de una persona en comparación a otra que se muestra de la gráfica obtuvo un porcentaje aceptable de respuestas correctas. Consideramos que las dificultades de los estudiantes para afrontar esta actividad que exigía en esencia acciones del nivel II, se han generado por el sistema de representación elegido para presentar esta actividad, a la cual no han estado habituados.

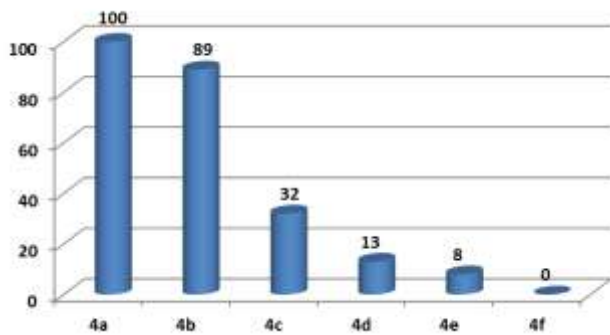


Fig. 4 Porcentaje de respuestas correctas en situación problémica 4

En la situación 4, todos los estudiantes lograron la identificación de las variables (4a) mientras que la mayoría de ellos identificaron además el tipo de relación entre dichas variable (4b). El desarrollo de los demás ítems generó mayores dificultades en los estudiantes, reflejando los obstáculos que encuentran cuando deben coordinar la razón de cambio de las variables propuestas en intervalos iguales (4c). Esto incluso no les permite hacer uso de esta información para predecir otros resultados, generando porcentajes bajos de respuestas correctas (4d, 4e, 4f). Las dificultades encontradas en esta actividad podrían deberse a

una limitada comprensión de lo que es una “razón” y el tipo de información que ella proporciona.

En relación a la situación 5, sólo el 8% de los estudiantes respondió correctamente el ítem 5a y nadie el 5b. Estos resultados reflejan las dificultades de los estudiantes para el análisis del comportamiento de las razones de cambio y determinar la concentración de las mismas, Esta situación tampoco fue prevista por los estudiantes de Calculo I, los cuales ya realizaban el tema límite de una función.

#### IV. DISCUSIÓN

El presente estudio tuvo como objetivo analizar y determinar los niveles de razonamiento covariacional de estudiantes de ingeniería, dentro del marco teórico propuesto en [4]. Los estudiantes que formaron parte de este estudio, abordaron el tema funciones, no solo en su etapa escolar, sino también en el desarrollo de su primer semestre de estudios. Incluso, los que cursaron Cálculo I, han trabajado herramientas más elaboradas como el límite de una función. A pesar, de estas características en los estudiantes, los resultados obtenidos en el estudio reflejan que gran parte de ellos, dentro de un contexto gráfico, pueden coordinar y evaluar la dirección del cambio de las variables que forman parte de una relación funcional. Sin embargo, cuando las actividades exigen el manejo de acciones mentales para coordinar la cantidad de cambio que se produce en las variables, y sobre todo, la razón de estos cambios, ya sea en intervalos iguales como en instantes determinados, las dificultades que encuentran los estudiantes son mayores

Gran parte de esto se debe a la forma como se aborda el concepto de función dentro de las aulas de clase. En muchos casos, se trabaja de manera puntual, como una herramienta para calcular valores de la función para determinados valores de su variable independiente, obviando sus múltiples representaciones y su importancia para generar modelos matemáticos que expliquen los fenómenos de la realidad en base al análisis de la variación y el cambio. Esto permite que se afiance en las aulas, el método de enseñanza basado en la algoritmización de métodos analíticos [13], generando en los estudiantes dificultades para entender adecuadamente los conceptos y métodos de pensamiento dentro de la matemática [6].

El manejo de los recursos gráficos y algebraicos que involucren al concepto de función, representan indicadores importantes para evaluar su variación y el comportamiento de esta variación. Los resultados muestran que los estudiantes no han sido expuestos a actividades que prioricen el análisis del comportamiento variacional de las funciones. También refleja



que la noción de “razón” no está muy afianzada en los estudiantes, aun si se encuentran cursando cursos de Cálculo.

Esto trae consigo la necesidad de hacer un cambio en la forma como se aborda este concepto a nivel escolar y en el primer ciclo de estudios universitario en carreras de ingeniería, centrando la atención en actividades que desarrollen el análisis de la variación y la comprensión de los objetos matemáticos como herramientas para cuantificar, describir pronosticar la rapidez de variación de los fenómenos de la naturaleza [14].

## V. CONCLUSIONES

El nivel de razonamiento covariacional de los estudiantes de ingeniería, según el marco teórico propuesto por Carlson et al (2003) se encuentra concentrado en gran medida en los niveles I y II, con lo cual los estudiantes logran identificar y coordinar el cambio entre las variables de una función; y en algunos casos logran determinar la dirección con la cual estos cambios se producen. Sin embargo, enfrentar situaciones donde deben cuantificar los cambios producidos les genera muchas dificultades, encontrando mayores problemas cuando deben identificar el comportamiento de la razón de cambio, ya sea a nivel de intervalos o en instantes determinados.

## RECOMENDACIONES

La comprensión de los objetos matemáticos a nivel universitario en estudiantes de ingeniería debe estar orientada al manejo de los mismos como herramientas imprescindibles para determinar, explicar y predecir el comportamiento variacional de una función que determina un modelo de explicación de determinado fenómeno de la realidad. En este sentido, es recomendable un giro en la forma como este objeto matemático es tratado dentro del aula, centrando su enseñanza dentro de un contexto de la variación y el cambio.

## REFERENCIAS

- [1] Sierpinski, Nnadozie y Oktaç. A study of relationship between theoretical thinking and high achievement in linear algebra. (Reporte de investigación, Universidad de Concordia, Canadá). Recuperado de <http://alcor.concordia.ca/sierp/downloadpapers.html>.
- [2] L. Plaza. “Modelación matemática en Ingeniería”. *IE Revista de Investigación Educativa de la REDIECH*, vol 7, no 13, pp. 47-57, Marzo 2017.
- [3] R, Vásquez, A. Romo, A. y M. Trigueros, M. “Un contexto de modelación para la enseñanza de la matemática en las ingenierías”. Ponencia presentada en la XIV CIAEM Conferencia Interamericana de Educación Matemática en Tuxtla Gutiérrez, Chiapas, México, 2015.
- [4] M. Carlson, S. Jacobs, E. Coe, S. Larsen, S. y E. Hsu, “Razonamiento covariacional aplicado a la modelación de eventos dinámicos: Un marco conceptual y un estudio”. *Revista EMA*, vol. 8, no 2, pp. 121-156, 2003.
- [5] A. Ecos. A., J. Huamán, Z. Manrique. “Didactic Sequence for the development of variational thinking of university engineering students”.

- Ponencia presentada en CISETC 2019 International Congress on Educational and Technology in Sciences, Arequipa, Perú.
- [6] M. Artigue, *La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos*. Ingeniería didáctica en educación matemática. Grupo Editorial Iberoamérica, México DF, México, 1999.
  - [7] R. Cantoral, *Desarrollo del Pensamiento y Lenguaje Variacional*. Progreso S. A., México DF, México, 2013.
  - [8] L. Doorman y K. Gravemeijer. “Emergent modeling: discrete graphs to support the understanding of change and velocity”. *ZDM Mathematics Education*, vol. 41, no 1-2, pp. 199-211, 2012.
  - [9] J. Vila-Ochoa. “Razonamiento covariacional en el estudio de funciones cuadráticas”. *Tecne, Episteme y Didaxis*, vol 31, no 1, pp 9-25. 2012.
  - [10] D. Tall. “Dynamic mathematics and the blending of knowledge structures in the calculus”. *ZDM. Mathematics Education*, vol. 41, no 4, pp. 481-492. 1999.
  - [11] R. Cantoral y R. Farfán. Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Epsilon*, vol 42, pp. 353-369. 1998.
  - [12] S. Hernández. *Metodología de la Investigación*. Mc Graw-Hill, México DF, México, 1997
  - [13] R. Farfán, R. “¿Matemática Educativa en el nivel superior? Seis años de investigación en la Reunión Centroamericana y del Caribe”. *Publicaciones Centroamericanas*, vol. 6, no. 2, pp. 236-253, 1992.
  - [14] C. Dolores. *La derivada y el Cálculo. Una mirada sobre su enseñanza por medio de los textos y programas*. Ediciones Díaz de Santos, México DF, México, 2007.