

# Optimización del Ruteo de Vehículos en una Cadena de Suministros Con Programación Matemática En Una Base Diaria

Optimization of Vehicle Routing in a Supply Chain with Mathematical Programming  
On a Daily Basis

Marcos Moya Navarro, PhD

Universidad Latina de Costa Rica, Costa Rica, marcos.moya@ulatina.cr

*Resumen– El ruteo de vehículos es clave en la configuración de una cadena de suministros, especialmente para la distribución de los productos que se fabrican y/o se almacenan en los centros de distribución de las empresas.*

*El modelado mediante programación matemática entera mixta se considera dentro del grupo de los métodos exactos y contribuye significativamente a la solución óptima del problema. Sin embargo, cuando las empresas tienen que distribuir sus productos a una cantidad significativa de clientes en una base diaria, los modelos de programación matemática se vuelven imprácticos debido a la gran cantidad de parámetros de entrada que deben incluirse y a la gran cantidad de variables de salida que se generan en el modelo.*

*El objetivo de este trabajo es mostrar una metodología prototipo de generación de modelos desarrollada para obtener una solución óptima del enrutamiento del vehículo siguiendo un procedimiento de tres pasos: Agrupamiento, Ruteo y Particionamiento. Para la optimización, se utilizó una modelización matemática de dos fases, resuelta mediante programación matemática entera mixta, como variante del método de solución del problema VRP y MDVRP. Se consideró una empresa que tiene que entregar una cantidad específica de mercancías diariamente a 40 clientes. Estos clientes deben estar agrupados en cuatro ubicaciones. Cada grupo, a su vez, debe ser visitado por una flota de vehículos en una secuencia que produzca el menor costo posible. Los datos de la base de datos de distribución, así como el sistema de información geográfica (SIG), se utilizaron para generar los modelos.*

*Palabras Clave– Cadena de Suministros, Logística, Optimización, Programación Matemática.*

*Abstract– The vehicle routing is a key factor in the configuration of a supply chain network, especially for the distribution of products that are manufactured and / or stored in the distribution centers of companies.*

*Modeling using mixed integer mathematical programming is considered within the group of the exact methods and contributes significantly to the optimal solution of the problem. However, when firms must distribute their products to a significant number of customers daily, mathematical programming models become impractical because of the large number of input parameters that*

*must be included and the large number of output variables that are generated in the model.*

*The objective of this work is to show a prototype methodology of model generation developed to obtain an optimal solution of the vehicle routing following a three steps procedure: Clustering, Routing, and Partitioning. For optimization, a two-phase mathematical modeling, solved by means of mixed integer mathematical programming, was used, as a variant of the solution method of the VRP and MDVRP problem. A company that must deliver a specified quantity of goods daily to 40 clients was considered. These clients must be grouped around four locations. Each group in turn must be visited by a fleet of vehicles in a sequence that produces the lowest possible cost. Data from the distribution database, as well as the geographic information system (GIS), were used to generate the models.*

*Keywords– Industry, Supply Chain, Logistics, Optimization, Mathematical Programming*

## I. INTRODUCCIÓN

El problema de ruteo de vehículos (VRP por sus siglas en inglés) es uno de los problemas de optimización combinatoria más difíciles de resolver.” Laporte, G. 1991 (1992) lo describe como el problema de diseñar un conjunto de rutas desde uno o varios centros de distribución hacia un grupo de clientes o ciudades geográficamente dispersos, sujeto a un conjunto de restricciones”. Las rutas deben ser de costo mínimo y los vehículos deberán comenzar y terminar las rutas en los centros de distribución. La solución a este problema, indica el sitio web <http://neo.lcc.uma.es/vrp/>, “...está motivado por su relevancia práctica, así como por su considerable dificultad”.

El ruteo de vehículos con modelado matemático sobre una base diaria, es un problema difícil de implementar en las empresas debido a la gran cantidad de variables y restricciones que se generan en la solución del problema, razón por la cual, desde un punto de vista práctico, una importante cantidad de las empresas no lo utilizan. Adicionalmente, una revisión de literatura exhaustiva muestra que hay relativamente poca literatura que propone como implementar el modelado matemático en las empresas para su uso en una base diaria.

Digital Object Identifier (DOI): <http://dx.doi.org/10.18687/LACCEI2017.1.1.169>  
ISBN: 978-0-9993443-0-9  
ISSN: 2414-6390

15<sup>th</sup> LACCEI International Multi-Conference for Engineering, Education, and Technology: “Global Partnerships for Development and Engineering Education”, 19-21 July 2017, Boca Raton FL, United States.

Dantzig, Fulkerson y Johnson (1954) propusieron un modelo de variables binarias para la solución del problema del agente viajero (TSP). Las variables binarias  $X_{ij}$  indican si el arco  $(i, j)$  es utilizado en la solución. La función objetivo en el modelo propuesto establece que el costo total de la solución es la suma de los costos de los arcos utilizados. Dos grupos de restricciones indican que la ruta debe llegar y abandonar cada nodo exactamente una vez. Finalmente, el último grupo de restricciones son las llamadas restricciones de eliminación de sub-tours e indican que todo subconjunto de nodos  $S$  debe ser abandonado al menos una vez.

Miller, Tucker y Zemlin (1960) propusieron el Problema de los  $m$  Agentes Viajeros o  $m$ -TSP como una generalización del TSP en la cual se tiene un depósito y  $m$  vehículos. El objetivo es construir exactamente  $m$  rutas, una para cada vehículo, de modo que cada cliente sea visitado una vez por uno de los vehículos. Cada ruta debe comenzar y finalizar en el depósito y puede contener a lo sumo  $p$  clientes.

Fisher y Jaikumar (1981) propusieron una Heurística de Asignación Generalizada para generar clústeres de clientes agrupados alrededor de una ubicación semilla. Los autores proponen generar los clústeres resolviendo un Problema de Asignación Generalizada (GAP) sobre los clientes. Primero se fijan  $K$  clientes semilla sobre la base de los cuales se construirán los clústeres. En una segunda fase, se decide que clientes asignar a cada uno de los clústeres de modo de no violar la capacidad del vehículo. El objetivo es minimizar el costo total de la asignación.

Thangiah, S.R; Salhi, S (2001) proponen un método de agrupamiento generalizado basado en un algoritmo genético. El método de agrupación genético (GenClust) se utiliza para resolver el problema de ruteo de vehículos con múltiples centros de distribución o depósitos. La solución obtenida por el método de agrupamiento genético se mejora utilizando un eficiente pos optimizador. Los autores indican que se usaron un conjunto de problemas obtenidos a partir de la literatura para comparar la eficiencia de los métodos de agrupación genéticos para resolver el problema de ruteo de vehículos con múltiples centros de distribución o depósitos.

Daza, J.M; Montoya, J.R.; Narducci, J.R. (2009) establecen que las técnicas heurísticas para el VRP, en general, pueden ser clasificadas dentro de cuatro categorías (Gaskell, 1967), así: 1) constructivas, como el método de los ahorros de Clarke y Wright, 2) con base en el ahorro generado por insertar nuevos clientes en cada vehículo hasta completar una solución final, 3) métodos de agrupar primero, luego enrutar, agrupan los clientes en varios subconjuntos, asignan cada subconjunto a un vehículo y luego resuelven cada TSP correspondiente (por ejemplo, el método de Fisher y Jaikumar, basado en el problema de asignación generalizado y 4) el algoritmo de barrido de Gillet y Miller.

Larsen, J (2010) indica que el problema de ruteo de vehículos es un problema central en la administración de la distribución. En el centro de distribución o depósito se tienen un conjunto de  $m$  vehículos idénticos. Cada vehículo tiene una capacidad de  $Q$ . Asociado a cada

uno de los clientes (nodo  $i$ ) está la demanda  $q_i$  y el tiempo de servicio  $S_i$ .

Strašek, R y otros (2010) indican que uno de los problemas más interesantes en las redes de transporte es el problema de enrutamiento del vehículo (VRP). Dado un conjunto de bienes, una red de transporte con localizaciones de entrega y una flota de vehículos de transporte el objetivo es realizar las entregas desde el centro de almacenamiento a todos los clientes incurriendo en costos mínimos y sujeto a ciertas restricciones adicionales. Los autores indican que computacionalmente se sabe que el problema de ruteo es un problema duro.

Rocha, L.; González, C. y Orjuela, J. (2011) establecen, en una revisión del estado del arte del problema de ruteo de vehículos, que a la fecha se ha realizado una considerable cantidad de investigación sobre el modelado de este tipo de problemas, los cuales se han agrupado en métodos exactos, métodos aproximados (heurísticos), métodos constructivos, método de dos fases, y algoritmos meta heurísticos.

Aguado, A; Jiménez de Vega, J (2012) indican que los métodos de agrupamiento o Clustering constituyen un tipo de aprendizaje por descubrimiento muy similar a la inducción. En el aprendizaje inductivo, un programa aprende a clasificar objetos basándose en etiquetados proporcionados por un aprendizaje supervisado. En los métodos de agrupamiento no se suministran los datos etiquetados: el programa debe descubrir por sí mismo las clases naturales existentes.

#### A. *El Problema de Ruteo Sobre Una Base Diaria*

El presente trabajo está orientado a la presentación de una metodología que permita utilizar un modelado matemático para el ruteo de vehículos sobre una base diaria. El tipo de empresas a las que van dirigido este modelado son aquellas que tienen segmentados los clientes alrededor de los centros de distribución, si es que se tienen múltiples centros, o bien aquellas empresas que tienen un solo centro de distribución, pero tienen segmentados los clientes por rutas de distribución, alrededor de una ubicación o cliente semilla.

Dada la naturaleza del tipo de empresa seleccionada, el modelado matemático utilizado en este trabajo está basado en los algoritmos de dos fases. Rocha, L.; González, C. y Orjuela, J. (2011) indican que dentro de los métodos de dos fases se encuentran los algoritmos de asignación elemental, el algoritmo de ramificación y acotamiento truncados, el algoritmo de los pétalos, el método de rutear primero y asignar después y los procedimientos de búsqueda local.

En consecuencia, la metodología de solución al problema se hará mediante el algoritmo del tipo “Primero Agrupe y Después Asigne o Enrute”. Este tipo de problema se descompone en sus dos componentes naturales: (1) agrupamiento de vértices (clientes) en rutas factibles (Clustering), y 2) enrutamiento del vehículo en cada grupo o clúster (routing).

En este trabajo se considera además el particionado de los grupos o clústeres en sub-grupos o sub-clústeres, si ocurre que el número de vértices o clientes asignados al grupo sea un número grande que implique que el grupo sea conveniente dividirlo en sub-grupos, en virtud de la imposibilidad de un solo camión para visitar todos los vértices (clientes). El particionado de los grupos o clústeres debe cumplir con la definición de una partición.

El objetivo general es proponer una metodología para asignar, mediante modelado con programación matemática, un conjunto de clientes a ubicaciones semilla (Clústeres) mediante la generación de sub-grupos más pequeños, realizando un ruteo de vehículos sobre cada sub-grupo generado, en una base diaria. El modelo matemático fue construido a partir de un prototipo generador de modelos tanto para la fase #1 como para la fase #2 de la metodología de solución del problema, explicada más adelante.

### B. Solución del Problema de Ruteo Sobre Una Base Diaria

La solución del problema en una base diaria consiste de dos fases. En la fase #1: "Primero Agrupe" la asignación óptima de los Clústeres o grupos de clientes de la cadena de suministros se realizará mediante el uso de un algoritmo de clustering, utilizando el algoritmo del vecino más cercano (K-Nearest Neighbours (KNN)) combinado con un modelado de programación matemática entera mixta, como una variante del método de solución del VRP Y MDVRP, sobre una base diaria.

En la fase #2: "Después Enrute" se determinará para cada clúster el ruteo óptimo del (los) vehículo(s) utilizando el algoritmo de múltiples agentes viajeros (MTSP) sobre cada uno de los subgrupos (clústeres) generados sobre una base diaria. Consecuentemente, el problema de ruteo se resolverá en tres vías: 1. Agrupamiento (Clustering), 2. Ruteo (Routing) y 3. Particionamiento (Partitioning).

El agrupamiento (Clustering) consiste en realizar la asignación de ubicaciones de entrega (clientes) alrededor de ubicaciones semilla (Centros de Distribución o Ubicaciones de Entrega) formando grupos más pequeños (clústeres) y para cada uno de ellos generar un ruteo, como se indica en la figura #1.

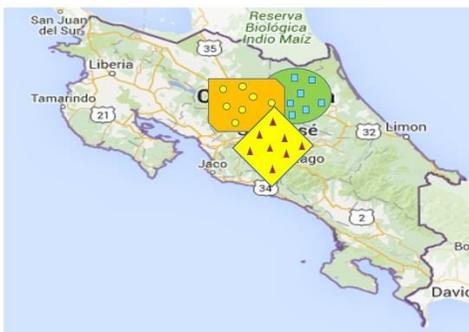


Figura #1. Agrupamiento de ubicaciones de entrega

El algoritmo del vecino más cercano (KNN) establece que cada clúster debe contener un único centro de distribución o bien una única

semilla, y que la capacidad de los camiones debe ser superior a las demandas de los clientes.

El modelo matemático propuesto por Fisher y Jaikumar en 1981, mostrado en la figura #2 se utilizó como base para la formación de los clústeres. En este modelo matemático la variable de decisión  $X_{ik}$  toma el valor de 1 si el cliente  $i$  se asigna al clúster  $k$ , el parámetro  $a_{ik}$  representa el costo de asignar el cliente  $i$  al clúster  $k$ ,  $d_i$  representa la demanda del cliente  $i$  y  $C$  representa la capacidad de los camiones o bien de los centros de distribución.

El modelo matemático de la figura #2 requiere de una semilla por cada ruta que se desee asignar, si se dispone de un único centro de distribución, o bien tantas semillas como centros de distribución se tengan. El coeficiente de costo  $a_{ik}$  representa el costo de asignar el cliente  $i$  al clúster  $k$ . La variable binaria  $X_{ik}$  indica si el cliente  $i$  es asignado al clúster  $k$ . El coeficiente tecnológico  $d_i$  representa la demanda de producto del cliente  $i$  y  $C$  indica la capacidad del camión asignado al clúster  $k$ .

$$\text{Min } \sum_i \sum_k a_{ik} X_{ik}$$

Sujeto a:

$$\sum_k X_{ik} = 1 \quad ; \quad i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (1)$$

$$\sum_i d_i X_{ik} = C \quad ; \quad \forall k \quad (2)$$

$$X_{ik} \in (0, 1) \quad \forall i, \forall k \quad (3)$$

Figura #2. Heurística de Asignación Generalizada  
Propuesta por Fisher y Jaikumar en 1981  
Para la Formación de Clústeres

El ruteo (Routing) establece que dado un conjunto de localizaciones donde se ubican los clientes, un centro de distribución con "m" vendedores (o "m" centros de distribución), y una métrica de costos, el objetivo del plan estratégico de la cadena de suministros es determinar un recorrido por cada vendedor (centro de distribución) de tal manera que el costo total del viaje se reduzca al mínimo.

El problema VRP establece que "m" vehículos inicialmente ubicados en un depósito entregarán cantidades discretas de bienes a "n" clientes. El problema de rutear el vehículo desde el centro de distribución a cada uno de los clientes y regresando al centro de distribución es conocido como el problema del agente viajero (TSP por sus siglas en inglés). El problema del agente viajero (TSP) se puede resolver mediante el modelo matemático de programación lineal entera binaria mostrado en la figura #3.

## II. DEFINICION DE LA CADENA DE SUMINISTROS A ESTUDIAR

La empresa seleccionada como caso de estudio dispone de un centro de distribución desde donde debe enviar los pedidos de productos a 40 clientes. Los clientes deben agruparse alrededor de cuatro localidades donde están situados los clientes semilla 3,15,24 y 32. Cuenta con una flota de cuatro camiones con capacidades de 4500, 3500, 4000 y 4500 kilogramos, cada de los cuales debe atender, respectivamente, un clúster.

La tabla #1 muestra un segmento de los 40 clientes a los que debe entregarse sus pedidos en este día. Se incluyen las coordenadas geográficas que muestran la ubicación de los clientes, así como las demandas requeridas en kilogramos de producto. Los cuarenta clientes deben distribuirse en cuatro grupos o clústeres, cada uno de los cuales debe ser visitado por un camión que parte del centro de distribución, visita todos los clientes una única vez y luego regresa al centro de distribución.

Los modelos de programación matemática son intensivos en variables. En este caso de estudio desarrollado con 40 clientes y únicamente cuatro camiones de distribución, se generan un total de 160 variables de decisión legítimas, ( $i \cdot k$  variables de decisión en forma general) para el modelo de determinación de los clústeres. Es común encontrar empresas que hacen 100 o más entregas diarias con alrededor de 20 o más camiones, lo que implicaría un modelado de al menos 2000 variables de decisión. Sin embargo, la configuración de los costos en la función objetivo del modelo, utilizando el algoritmo del vecino más cercano, requiere el cálculo de 1681 distancias, calculadas a partir de sus coordenadas geográficas, para el caso de 40 clientes y 4 camiones.

Esto hace que el modelado matemático se vuelva impráctico en la construcción del modelo para uso diario.

Ubicaciones	Latitud	Longitud	Demanda
CD	9.9998355	-84.1871209	
CLIENTE 1	9.8953950	-83.6810928	467
CLIENTE 2	10.0247980	-83.2246900	354
CLIENTE 3	9.9023143	-83.9548390	634
...	...	...	
CLIENTE 37	9.9211910	-84.0359587	117
CLIENTE 38	9.9217283	-84.0346497	668
CLIENTE 39	10.0740432	-84.3134214	442
CLIENTE 40	9.9696259	-84.2268255	146

Tabla #1. Segmento de Clientes Para Entrega

$$\text{Min } \sum_i \sum_j C_{ij} X_{ij}$$

Sujeto a:

$$\sum_i X_{0j} = 1 \quad (1)$$

$$\sum_j X_{j0} = 1 \quad (2)$$

$$\sum_i X_{ij} = 1 \quad ; \quad j = 1, 2, 3, \dots, N \quad (3)$$

$$\sum_j X_{ij} = 1 \quad ; \quad i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (4)$$

$$U_i - V_j + N X_{ij} \leq (N - 1) \quad ; \quad i \neq j \quad (5)$$

$$i = 1, 2, \dots, N \quad ; \quad j = 1, 2, \dots, N$$

$$X_{ij} \in (0, 1) \quad \forall i, \forall j$$

$$U_j \text{ Entera } \forall j$$

Figura #3. Generalización del Modelo TSP Propuesto Por Miller, Tucker y Zemlinen en 1960

El particionamiento (Partitioning) se presenta cuando es conveniente visitar a los clientes de un clúster con más de un camión, por lo que debe particionarse el clúster en tantos sub-clústeres como camiones se requieran enviar. El modelo matemático debe de garantizar que se cumplen los requisitos del particionado en cuanto a que los subclústeres sean disjuntos.

El modelo matemático para el particionamiento propuesto por Miller, Tucker y Zemlinen es una modificación del modelo presentado en la figura #3, en donde los coeficientes del lado derecho de las ecuaciones (1) y (2) se reemplazan por el número “m” de camiones que se desea enviar.

$$\sum_i X_{0j} = m \quad (1)$$

$$\sum_j X_{j0} = m \quad (2)$$

Las ecuaciones (1) y (2) indican que desde el centro de distribución parten “m” camiones y regresan “m” camiones.

### III. METODOLOGIA PARA LA GENERACIÓN DE MODELOS CON BASE DIARIA

#### A. Fase #1: Determinación de clústeres (Agrupamiento)

La figura #4 resume la metodología propuesta para la generación del modelo matemático para el agrupamiento de los clientes en clústeres, fase #1.

El código prototipo generador de modelos GenRestClust se encarga de generar la base de datos del modelo de programación matemática para la configuración de los clústeres. Este código requiere leer un archivo que contenga los parámetros de entrada del modelo mostrados en la figura #2. El archivo leído contiene el código de identificación de los clientes, la ubicación en coordenadas geográficas de latitud y longitud de los clientes y del (los) centro(s) de distribución, la demanda de producto requerida por cada cliente, expresada en peso real en kilogramos, o bien en peso volumétrico para carga por volumen, también en kilogramos, las capacidades disponibles de los camiones en peso y/o volumen, y las ubicaciones semilla de los clientes alrededor de los cuales se formaran los clústeres.

La optimización se pudo llevar a cabo debido a las capacidades del software de optimización OR Brainware Decision Tools®, tanto en su módulo de “Modelado Avanzado Con Programación Lineal”, como en su módulo de Optimización de la Cadena de Suministros.



El sub-módulo de “Ruteo de Vehículos” lee el archivo con los parámetros de entrada, y calcula la matriz de distancias a partir de las coordenadas geográficas de los clientes.

El código generador de modelos GenRestClust lee las distancias expresadas en kilómetros, calcula la matriz de costos de la función objetivo del modelo utilizando el algoritmo del vecino más cercano (KNN), y conforma la base de datos que generará el modelo matemático respectivo para la determinación de los clústeres.

La figura #5 muestra un extracto de la base de datos construida por el generador de modelos, el cual produce un modelo de 160 variables de decisión legítimas y 44 restricciones funcionales.

El modulo avanzado de programación lineal del programa OR Brainware Decision Tools lee la base de datos de la figura #5 y configura el modelo matemático. Las variables de decisión son todas variables binarias 0-1. Luego el modulo avanzado de programación lineal resuelve el problema utilizando el sub-módulo de programación entera mixta y produce la solución óptima mostrada en la tabla #2.

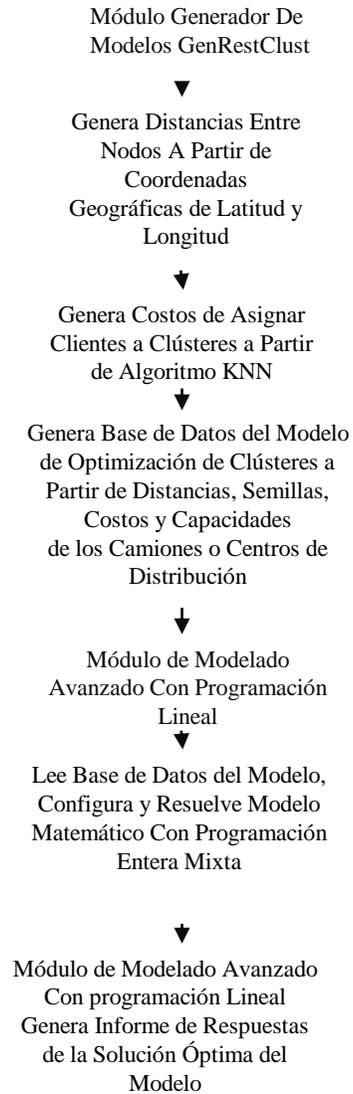


Figura #4. Metodología Para la Determinación de Clústeres Fase #1

X11	X12	...	X402	X403	X404		
1	1	...	0	0	0	=	1
0	0	...	0	0	0	=	1
...	...	...	...	...	...	...	...
0	0	...	1	1	1	=	
467	0	...	0	0	0	≤	4500
0	467	...	146	0	0	≤	3500
0	0	...	0	146	0	≤	4000
0	0	...	0	0	146	≤	4500
171.48	41.99	156.73	13.59	14.35	6.98		

Figura #5. Extracto de la Base de Datos Generadora del Modelo Matemático Para la determinación de los Clústeres

Clústeres Obtenidos			
CLUSTER 1	CLUSTER 2	CLUSTER 3	CLUSTER 4
CLIENTE 4	CLIENTE 1	CLIENTE 3	CLIENTE 11
CLIENTE 6	CLIENTE 2	CLIENTE 9	CLIENTE 12
CLIENTE 7	CLIENTE 5	CLIENTE 14	CLIENTE 21
CLIENTE 19	CLIENTE 8	CLIENTE 15	CLIENTE 29
CLIENTE 26	CLIENTE 10	CLIENTE 17	CLIENTE 33
CLIENTE 30	CLIENTE 13	CLIENTE 20	CLIENTE 34
CLIENTE 39	CLIENTE 16	CLIENTE 25	CLIENTE 38
CLIENTE 40	CLIENTE 18	CLIENTE 27	
	CLIENTE 22	CLIENTE 28	
	CLIENTE 23	CLIENTE 32	
	CLIENTE 24	CLIENTE 35	
	CLIENTE 31		
	CLIENTE 36		
	CLIENTE 37		

Tabla #2. Clústeres Obtenidos por el Modelo Matemático

La ventaja de los clústeres obtenidos por el modelo matemático, radica en que la suma de las demandas de cada uno de los clientes en el clúster no supera la capacidad del camión que va a visitar a esos clientes. Con este resultado se concluye la fase de formación de los clústeres.

### B. Fase #2: Determinación de Rutas (Enrutamiento)

La fase #2, etapa de ruteo, consiste en la determinación del orden en que el camión debe de visitar a los clientes en cada uno de los clústeres. Se requiere un modelo matemático de ruteo por cada uno de los clústeres conformados. Por ejemplo, para el clúster #2, el modulo generador de modelos GenRestRut procedió a generar la base de datos mostrada en la figura #6.

La base de datos contiene 155 variables de decisión legítimas y 145 restricciones funcionales. La metodología utilizada para la determinación del orden de visita de los clientes en cada uno de los clústeres se muestra en la figura #7.

Al igual que en la fase #1, la metodología de la figura #7 indica que el modulo avanzado de programación lineal del programa OR Brainware Decision Tools lee la base de datos, y configura y resuelve el modelo matemático.

Las variables de decisión  $X_{ij}$  son todas variables binarias 0-1, y las variables  $U_j$  son todas variables enteras.

X11	X12	U9	U10	U11	U12	U13	U14		
1	1	0	...	0	0	0	0	=	1
0	0	0	...	0	0	0	0	=	2
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
0	0	0	...	-1	0	0	1	≤	13
0	0	0	...	0	-1	0	1	≤	13
0	0	0	...	0	0	-1	1	≤	13
0	0	0	...	0	0	0	0	≤	13

Figura #6. Extracto de la Base de Datos Generadora del Modelo Matemático Para la Determinación del Orden de Visita de los Clientes del Clúster #2

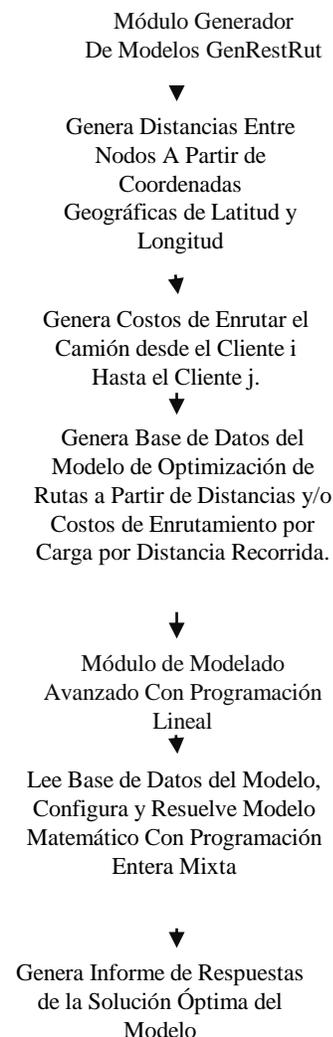


Figura #7. Metodología Para la Determinación del Orden de Visita de los Clientes en cada Clúster

La tabla #3 resume la solución óptima que indica el orden en que se debe visitar a los clientes en cada uno de los cuatro clústeres. En este caso de estudio, los clientes se agruparon en torno a los camiones. Sin embargo, los clientes también pueden agruparse en torno a semillas que representan centros de distribución. La constante C del grupo de restricciones (2) del modelo matemático mostrado en la figura #2 representaría la capacidad de surtido de los centros de distribución.

CLUSTER 1	CLUSTER 2	CLUSTER 3	CLUSTER 4
CD	CD	CD	CD
CLIENTE 30	CLIENTE 37	CLIENTE 20	CLIENTE 34
CLIENTE 19	CLIENTE 22	CLIENTE 15	CLIENTE 29
CLIENTE 39	CLIENTE 10	CLIENTE 25	CLIENTE 38
CLIENTE 6	CLIENTE 31	CLIENTE 9	CLIENTE 12
CLIENTE 40	CLIENTE 24	CLIENTE 27	CLIENTE 11
CLIENTE 4	CLIENTE 36	CLIENTE 3	CLIENTE 21
CLIENTE 7	CLIENTE 5	CLIENTE 32	CLIENTE 33
CLIENTE 26	CLIENTE 23	CLIENTE 14	CD
CD	CLIENTE 1	CLIENTE 35	
	CLIENTE 18	CLIENTE 17	
	CLIENTE 2	CLIENTE 28	
	CLIENTE 16	CD	
	CLIENTE 8		
	CLIENTE 13		
	CD		

Tabla #3. Orden de Visita de los Clientes

La figura #8 muestra la solución óptima del orden en que el camión debe visitar a los clientes del clúster #1 para minimizar los costos totales de transportación en ese clúster.

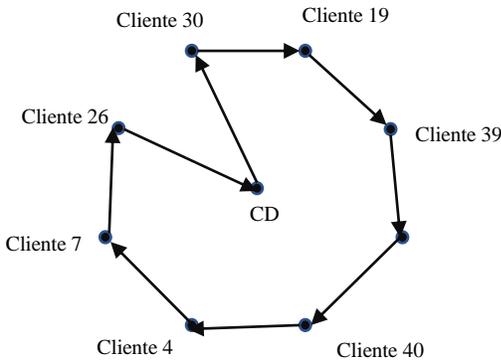


Figura #8. Orden de Visita de los Clientes en Clúster #1

La figura #9 resume el orden de visita de los clientes en cada uno de los cuatro clústeres. Los números representan el número de cliente a visitar. Aquí se concluye la fase de ruteo.

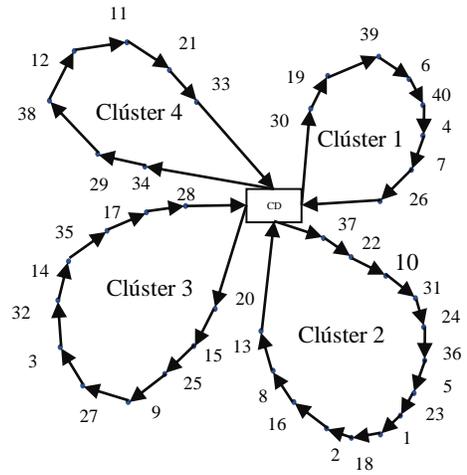


Figura #9. Orden de Visita de los Clientes en Todos los Clústeres

La figura #10 muestra las ubicaciones de los clientes, en el mapa de Costa Rica, agrupados en el clúster #1.



Figura #10. Ubicaciones de los Clientes Clúster #1

### C. Fase #2: Particionado de los Clústeres

Algunas veces puede ocurrir que la visita por un solo camión a los clientes asignados al clúster, no es conveniente por restricciones de horario de recepción de mercancías por parte de los clientes u alguna otra razón, aun cuando las demandas acumuladas de esos clientes cumplen con la capacidad de ese camión asignado.

Cuando esto ocurre, entonces es conveniente particionar el clúster en tantos subgrupos como sea conveniente, limitado únicamente por el número de camiones disponibles para el envío a ese clúster. La

única modificación necesaria al modelo matemático presentado en la figura #3 corresponde a los grupos de restricciones (1) y (2) como se indicó anteriormente.

Por ejemplo, si la empresa requiere particionar el clúster #2 en tres subgrupos, esto es, se va a enviar un camión a cada uno de los tres subgrupos o bien el mismo camión en horarios diferentes si fuera posible, las restricciones a modificar en el modelo matemático de ruteo del clúster #2 son las que corresponden al nodo fuente (Centro de Distribución). Estas restricciones quedarían como sigue:

$$X_{01} + X_{02} + X_{05} + 0X_{08} + X_{010} + X_{013} + X_{016} + X_{018} + X_{022} + X_{023} + X_{024} + 0X_{031} + X_{036} + X_{037} = 3 \quad (1)$$

$$X_{10} + X_{20} + X_{50} + X_{80} + X_{100} + X_{130} + X_{160} + X_{180} + X_{220} + X_{230} + X_{240} + X_{310} + X_{360} + X_{370} = 3 \quad (2)$$

La restricción (1) indica que del centro de distribución parten tres camiones, y la restricción (2) establece que al centro de distribución llegan tres camiones.

La tabla #4 muestra los resultados del particionado óptimo del clúster #2 en tres subgrupos.

SUBCLUSTER 1	SUBCLUSTER 2	SUBCLUSTER 3
CD	CD	CD
CLIENTE 31	CLIENTE 5	CLIENTE 13
CLIENTE 36	CLIENTE 22	CD
CD	CLIENTE 23	
	CLIENTE 37	
	CLIENTE 18	
	CLIENTE 10	
	CLIENTE 8	
	CLIENTE 16	
	CLIENTE 2	
	CLIENTE 24	
	CLIENTE 1	
	CD	

Tabla #4. Orden de Visita de los Clientes en el Clúster #2

Para el caso de los sub-clústeres mostrados en la tabla #4, se tendría que construir el modelo matemático que mostraría la secuencia de visita de los clientes.

Es importante destacar que el generador de modelos GenRestRut también generó la base de datos del particionado del clúster #2, siguiendo la metodología presentada en la figura #7. Aquí concluye la etapa de particionamiento.

## IV. CONCLUSIONES

1. Los modelos matemáticos propuestos para el ruteo de vehículos son herramientas poderosas para la optimización de las rutas de los vehículos, pero cuando los tamaños de los modelos se vuelven grandes, se tienen dificultades para operarlos en una base diaria.
2. Los modelos de programación matemática son intensivos en variables debido a que es común encontrar empresas pequeñas y medianas que hacen decenas de entregas diarias con un número importante de camiones en la flota lo que hace impráctico la construcción del modelo para uso diario.
3. Los generadores de modelos GenRestClust y GenRestRut son herramientas prototipo poderosas que le facilitan a las empresas optimizar la formación de clústeres de clientes y el ruteo de los vehículos en una base diaria.

## REFERENCIAS

- [1] Aguado, A; Jiménez de Vega, J. Dirigido por: José Jaime Ruz Ortiz. Optimización de rutas de transporte. Universidad Complutense de Madrid. 2012-2013. [http://eprints.ucm.es/23027/1/Memoria\\_OptimizacionRutasTransporte.pdf](http://eprints.ucm.es/23027/1/Memoria_OptimizacionRutasTransporte.pdf)
- [2] C. Miller, A. Tucker, R. Zemlin: Integer programming formulation of traveling salesman problems. Journal of the ACM 7 (1960) 326–329 <http://dl.acm.org/citation.cfm?id=321046>
- [3] Dantzig, G., Fulkerson, D., Johnson, S.: Solution of a large-scale traveling salesman problem. Operations Research 2 (1954) 393–410 <http://www.rand.org/content/dam/rand/pubs/papers/2014/P510.pdf><http://www.rand.org/content/dam/rand/pubs/papers/2014/P510.pdf>
- [4] Daza, Julio; Montoya, Jairo; Narducci, Francesco. Resolución del problema de enrutamiento de vehículos con limitaciones de capacidad utilizando un procedimiento meta heurístico de dos fases. Revista EIA, ISSN 1794-1237 Número 12, p. 23-38. diciembre 2009. <http://www.scielo.org.co/pdf/eia/n12/n12a03.pdf>
- [5] Fisher, M., & Jaikumar, R. (1981). A generalized assignment heuristic for the vehicle routing problem. Networks 11, 109–124 <http://www.dtic.mil/dtic/tr/fulltext/u2/a100992.pdf>
- [6] Laporte, G. (2001). The Vehicle Routing Problem: An overview of exact and approximate algorithms. European Journal of Operational Research 59 (1992) 345-358 345 North-Holland <https://pdfs.semanticscholar.org/bd68/0d5708297eb76513611919c1145694db77e4.pdf>
- [7] Jesper Larsen. The Set Partitioning Problem – using the structure. Informatics and Mathematical Modelling. Technical University of Denmark <http://www2.imm.dtu.dk/courses/02735/sp2.pdf>
- [8] Rocha, L.; González, C. y Orjuela, J. (2011). Una revisión al estado del arte del problema de ruteo de vehículos: Evolución histórica y métodos de solución en ingeniería, Vol. 16, No. 2, pág. 35 - 55. <http://revistas.udistrital.edu.co/ojs/index.php/reving/article/download/3832/5398>.
- [9] Thangiah, S.R. Genetic Clustering: An Adaptive Heuristic for the Multidepot Vehicle Routing Problem. Applied Artificial Intelligence, 15:361 - 383, 2001 Copyright © 2001 Taylor & Francis <http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/08839510151087293>
- [10] Strašek, R; Orbanić, A; Kavkler, I. Practical Implementation of an Extended VRP Model. Proceeding of the International Multi-Conference of Engineers and Computer Scientists 2010 Vol III, IMECS 2010, March 17-19, 2010, Hong Kong [http://www.iaeng.org/publication/IMECS2010/IMECS2010\\_pp2076-2079.pdf](http://www.iaeng.org/publication/IMECS2010/IMECS2010_pp2076-2079.pdf)