

Simulación y análisis estadístico de una señal electroencefalográfica (EEG).

Ruben Darío Angel Correa

Universidad de los Llanos, Bogotá, D. C. , Colombia, rangelcorrea@gmail.com

ABSTRACT

This paper has two parts. In the first part are related the aspects about the simulation of an eeg signal doing use of the Independent Components Model (ICA), across Fourier Discret Transformer (FDT). The second part talks about statistical treatment of the data generated in the first part and its comparison with the data from a real eeg signal. This comparison is made with the T- student estimator as a tool of inference. The idea with this comparison is that researcher can do an appreciation about what kind of signal is a patient generating in some instant. If this is possible, then we could do a prediction about any another signal as for example an epilepsy or any brainness disease and, off course, a monitoring in real time of eeg signals.

Keywords: electroencefalografía, simulación, T-student, monitoreo, estadística.

1. INTRODUCCION

Cuado se trata de hacer un estudio sobre las diferentes causas de una actividad cerebral anómala, el primer paso procedimental a tener en cuenta es el trazado de la actividad eléctrica del cerebro del individuo, lo que comúnmente es conocido como registro electroencefalográfico o EEG. Con este procedimiento lo que se hace es realizar un trazado en función del tiempo de los potenciales eléctricos (v) recolectados en la corteza cerebral por medio de electrodos, es decir, un trazado de v vs t . En condiciones normales, este trazado se realiza por medio de un polígrafo sobre una superficie de papel y en términos más modernos, sobre un monitor de computador a través de un software de registro como el EEG-Lab. El estudio del registro se reduce a la capacidad y experiencia del especialista en la interpretación de las señales obtenidas sin darle un papel protagónico al medio por el cual dicho registro ha sido adquirido.

Dado el caso en el cual se pueda tener acceso a toda la colección de datos de dicho registro, se podría pensar en la posibilidad de realizar un estudio estadístico de esta información ya sea en forma aislada o en tiempo real durante el proceso de adquisicion de los datos. Pudiéndose contar con la colección de datos, el siguiente paso sería la implementación de una técnica que permita realizar una predicción de qué tipo de registro y en su defecto que tipo de anomalía podría estar padeciendo un paciente en determinado momento. Haciéndose esto, sería entonces posible ahorrarse horas de registro en papel u horas de observación constante, llegándose al caso de un monitoreo permanente y en forma desasistida.

2. ANTECEDENTES. Cuando se empieza a hablar de la clasificación de señales EEG, pueden ser muchas las técnicas por las que se podría optar. Se podría por ejemplo pensar en técnicas de clasificación basadas en redes neuronales artificiales (RNA), técnicas de separación basadas en el análisis Bayesiano, técnicas basadas en reconocimiento de patrones, técnicas basadas en el análisis de componentes independientes (ICA), técnicas basadas en lógica difusa, como para mencionar algunas, es decir, el universo de posibilidades es bastante grande y por éste mismo motivo es difícil decidir cuál ha de ser el camino más viable. Por ejemplo, Flexer y Bauer en su artículo “Monitoring Human Information Processing via intelligent data análisis of EEG recording” expresan: “El análisis de potenciales evocados cognitivo es ampliamente un problema sin resolver en investigación psicofisiológica. Se han diseñado métodos clásicos para series de tiempo univaluadas o solamente simples potenciales evocados motores o sensitivos y pueden por lo tanto no dar con la esencia del problema en lo que al análisis de potenciales evocados se refiere. Sin embargo este es el estado del arte.” A pesar de lo poco documentada, y por lo mismo innovativa, en este trabajo se ha optado por abordar una técnica basada en la probabilidad y sus resultados se dejan a consideración para futuras discusiones.

3. SIMULACIÓN. El análisis de Fourier es una herramienta matemática que permite hacer un estudio en el dominio de la frecuencia de una señal cualquiera $f(t)$ disponible en el dominio del tiempo. Por medio de una de sus técnicas, la *Transformada de Fourier (TF)*, se hace una representación de $f(t)$ en el dominio de la frecuencia $f(\omega)$. La expresión matemática de dicha *TF* es la indicada en la ecuación (3.1):

$$\mathfrak{F} [f(t)] = f(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j2\pi ft} dt \quad (3.1)$$

Si la señal $f(t)$ está compuesta de un número n de frecuencias diferentes, su transformada de Fourier se expresa entonces como se indica en la ecuación (3.2).

$$f(\omega) = A_1 \pi \delta(\omega - \omega_1) + A_2 \pi \delta(\omega - \omega_2) + A_3 \pi \delta(\omega - \omega_3) + \dots + A_n \pi \delta(\omega - \omega_n) \quad (3.2)$$

En esta ecuación los coeficientes A_i representan la amplitud de la i -ésima componente de frecuencia. Cuando la señal de la que se dispone es del tipo discreta, se habla entonces de la *Transformada Discreta de Fourier (TDF)* cuya expresión matemática se indica en la ecuación (3.3).

$$f(u) = (1/N) \sum_{k=0}^{N-1} f(k) e^{-j(2\pi/N)ku} \quad u = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (3.3)$$

Para la obtención de la señal discreta se supone que se ha aplicado el criterio de Nyquist, el cual establece una frecuencia de muestreo mayor o igual al doble de la máxima frecuencia de interés. De igual modo, teniendo en cuenta que el espectro se limita a los valores finitos de $f(u)$ en puntos equiespaciados una distancia Δu , conocida como resolución espectral o frecuencia espectral, entonces la ecuación (3.3) se reescribe como la ecuación (3.4).

$$F(u) \equiv \{f(k\Delta u)\}_{0 \leq k \leq N-1} \quad (3.4)$$

En términos de sus componentes, la ecuación (3.4) puede ser reescrita como se indica en la ecuación (3.5).

$$F(u) = f\{0\Delta u, f(\Delta u), f(2\Delta u), \dots, f(k\Delta u), \dots, f(N-1)\Delta u\} \quad (3.5)$$

En el caso en el cual lo que se desea es recuperar la señal original a partir de su *TF* o de su *TDF* se requerirá entonces del uso de la *transformada inversa de Fourier (TFI)*, la cual se define según la expresión (3.6) para el caso análogo, o como la expresión (3.7) para el caso discreto.

$$f(\omega) \xrightarrow{\mathfrak{F}^{-1}} f(t); \dots f(t) = \mathfrak{F}^{-1}[f(\omega)] = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (3.6)$$

$$f(u) \xrightarrow{\mathfrak{F}^{-1}} f(K); \dots f(K) = \sum_{u=0}^{N-1} f(u) e^{j(2\pi/N)ku} \dots k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (3.7)$$

Para el caso de señales continuas y periódicas, la ecuación (3.6) puede ser escrita como la ecuación (3.8).

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \quad (3.8)$$

siendo

$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} f(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad (3.9)$$

Considérese por ejemplo una señal periódica $f(t)$, con frecuencia fundamental 2π , expresada en la forma de la ecuación (3.8) como:

$$f(t) = \sum_{k=-3}^{+3} a_k e^{jk2\pi t} \quad (3.10)$$

A partir de esta señal y usando la relación de *Euler* se puede obtener la señal indicada en la ecuación (3.11).

$$f(t) = 1 + \frac{1}{2} \cos 2\pi t + \cos 4\pi t + \frac{2}{3} \cos 6\pi t \quad (3.11)$$

Ahora, basándose en el modelo de componentes independientes ICA, y empleando la perspectiva mostrada a partir de una descomposición de *Fourier*, un diagrama en bloques propuesto para realizar la simulación del ritmo alfa sería el indicado en la figura (3.1).

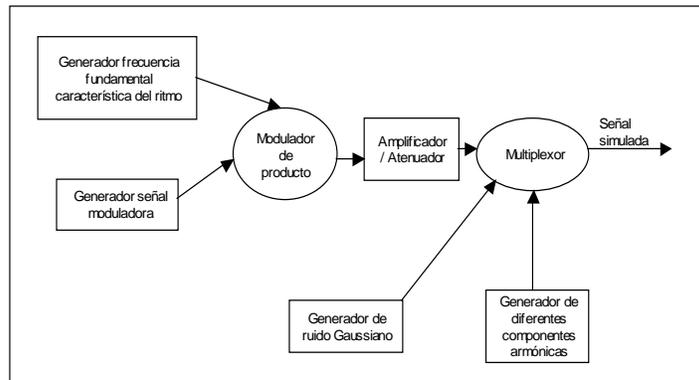


Figura 3.1: Componentes del sistema utilizado para la simulación de un ritmo EEG.

Este modelo se centra únicamente en generar una señal cuya forma y frecuencia sea parecida a un ritmo específico EEG. Similar al modelo ICA, en este caso el modulador de producto sería obtenido en la misma corteza cerebral, mientras que el multiplexor sería implementado con el sensor impuesto en el cuero cabelludo. El objetivo del paso amplificador / atenuador es dar una mayor o menor ganancia a la señal representando al comportamiento del

electrolito utilizado en la colocación de los electrodos, el cual interviene ostensiblemente en la magnitud de la señal obtenida.

A partir de las características propias de una señal EEG correspondientes a un ritmo alfa, una representación real de esta señal es la indicada en la figura (3.2), la cual se corresponde con un registro real tomado en un paciente.



Figura 3.2: Registro EEG correspondiente a un ritmo alfa.

Eligiendo valores adecuados para las constantes en la ecuación (3.11) y además agregando una componente de ruido gaussiano, se tendrá una representación para el ritmo alfa como la indicada en la figura (3.3).

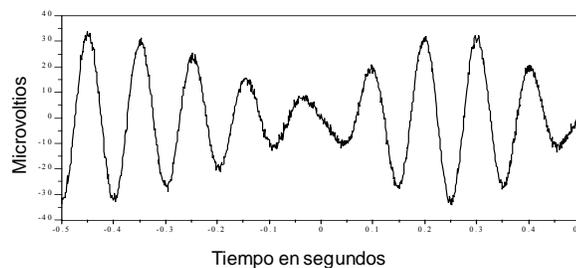


Figura 3.3: Ritmo alfa simulado.

Como es natural, la gran ventaja de tener esta representación es la de poder generar la cantidad de datos que se necesiten con fines de realizar un estudio comparativo con el comportamiento estadístico de una señal real.

4. ANÁLISIS ESTADÍSTICO. El objetivo de realizar un análisis estadístico de la señal EEG es el de poder implementar una herramienta que nos permita inferir en cualquier momento que tipo de señal se está presentando en un paciente en un momento dado. Como herramienta estadística se utilizará el estimador t-student. Esta distribución se expresa en forma de campana simétrica, pero más achatada y con más área en los extremos, es decir, las áreas que corresponden a las regiones críticas o de rechazo. Puede considerarse que no hay una distribución t sino más bien una familia de distribuciones t , dado que las desviaciones estándar se modifican a medida que aumenta el tamaño de la muestra acercándose a la normal. La expresión para la distribución t es

$Y = C \left(1 + \frac{t^2}{\nu} \right)^{-\frac{\nu+1}{2}}$, siendo C una constante que depende del número de datos N , tal que el área total bajo la

curva es 1, y donde la constante $\nu = (N - 1)$ corresponde al número de grados de libertad. Para grandes valores de ν o N (ciertamente $N \geq 30$), las curvas de la distribución se ajustan mucho a la ecuación (4.1):

$$Y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} \tag{4.1}$$

Siendo t la variable aleatoria indicada en la ecuación (4.2):

$$t = \frac{\sqrt{N}(\bar{X} - \mu)}{S} \quad (4.2)$$

Con μ la media poblacional, \bar{X} media muestral y S desviación muestral. La ecuación (4.2) será entonces la utilizada para el caso de inferencia estadística respecto de la media poblacional, el cual es el caso a tratar en este trabajo. De esta ecuación puede despejarse μ como:

$$\mu = \bar{X} \pm t_{(n-1; 1-\alpha/2)} \frac{S}{\sqrt{n}} \quad (4.3)$$

Donde $t_{(n-1; 1-\alpha/2)}$ es el valor de la variable con distribución t con $(n-1)$ grados de libertad que deja una cola superior de media $\alpha/2$. En general, el nivel de confianza se expresa en la forma $100(1 - \alpha)\%$. Si se estima una media con un nivel de confianza del 95%, se tendrá que $(1 - \alpha) = 0.95$ y $100(1 - \alpha)\% = 95\%$. El valor α representa la probabilidad de que el parámetro quede por fuera del intervalo, en este caso $\alpha = 0.05$.

Por lo tanto, si se toman muestras de un tamaño constante como 40 por ejemplo, con un nivel de confianza del 95%, se tiene un parámetro $t = 1.68$, el cual se obtiene de la tabla de la distribución t - student con $(n-1) = 39$ grados de libertad y con un nivel de significación para prueba de dos colas del 0.05. De este modo, para la aplicación de la ecuación (4.3) debe dividirse en primer lugar la población en intervalos de tamaño 40 datos y luego se le calcula a cada uno su media muestral \bar{X} y su desviación muestral S . De este modo se tendrá que:

$$\mu = \bar{X} \pm 1.68 \frac{S}{\sqrt{40}} \quad (4.4)$$

Dado que cada grupo de datos arroja un rango de valores de μ para cada intervalo, estos valores sirven para determinar el rango de variación de dicha media, lo cual es lo que se está buscando. Teniendo en cuenta la expresión (4.4), se procederá a hacer una apreciación de la media poblacional para una señal simulada del ritmo alfa.

Muestra	Media muestral	Desviación muestral	Media poblacional μ		Estimador t student
			Limite inferior	Lim superior	
1	- 8.9342332	19.268849	-14,05264306	-3,815823338	- 5.2033614
2	21.088764	12.214635	17,84417434	24,33335366	9.0708689
3	- 24.243349	7.0885349	-26,12628591	-22,36041209	- 12.481977
4	16.617606	13.402097	13,05758924	20,17762276	6.9450872
5	-3.0869069	17.454079	-7,723257005	1,549443205	- 2.4232898
6	-10.233409	14.349754	-14,04515315	-6,421664854	- 5.8210458
7	16.79339	7.1199388	14,90211123	18,68466877	7.0286625
8	-14.755454	5.0219471	-16,08944045	-13,42146755	- 7.9710214
9	6.2365197	8.4899981	3,981310268	8,491729132	2.0094701
10	2.7208199	7.9854333	0,599638684	4,842001116	.3379545
11	-7.6320036	3.7713198	-8,63378427	-6,63022293	- 4.5842252
12	6.0139884	2.1871819	5,433004377	6,594972423	1.9036691
13	.3100910	3.5070759	-0,621498212	1,241680213	- .8082102
14	-8.6373598	1.5889678	-9,05943942	-8,21528018	- 5.062215
15	9.6857343	8.4899289	7,43054325	11,94092535	3.6493758
16	.0040101	13.879837	-3,682909372	3,690929572	- .9537343
17	-14.778689	12.730148	-18,16021506	-11,39716294	-7.9820683
18	23.875654	6.2496755	22,21554443	25,53576357	10.395877
19	-20.927381	12.605993	-24,2759276	-17,5788344	- 10.905422
20	7.2765525	19.164888	2,185757936	12,36734706	2.5039467
21	8.8093377	17.381246	4,192334321	13,42634108	3.232699
22	-17.712025	9.464185	-20,22600899	-15,19804101	- 9.376703
23	14.810121	4.7111347	13,55869605	16,06154595	6.0857307
24	-4.1550891	6.9553338	-6,002643622	-2,307534578	- 2.9311498
25	-5.4365175	3.5469968	-6,378710954	-4,494324046	- 3.5403962

Figura 3.4: Parámetros estadísticos para el ritmo alfa simulado.

Analizando las medias muestrales, la media poblacional sugiere un valor de 2.01, dato que se obtiene como el promedio de las medias muestrales. En esta tabla, cada intervalo de la media poblacional está calculado con un nivel de significación del 95%. Luego, aplicando al grupo de datos de las medias muestrales un procedimiento similar al utilizado para obtener estos intervalos con un nivel de significación del 95%, se obtiene un intervalo para la media poblacional: $\bar{X} = 2.01$ $S=13.30$ $v = 24$ (v es el número de grados de libertad, en este caso $25 - 1 = 24$) $t_{(24;0.975)} = 2.064$. Al reemplazar en la ecuación (4.4) se tiene:

$$\mu = 2.01 \pm 2.064 \frac{13.3}{\sqrt{25}}$$

es decir $[-3.48 \leq \mu \leq 7.5]$, lo cual significa que se tiene una certeza del 95% de que el valor de la media poblacional se encuentre dentro de este intervalo.

5. INFERENCIA RESPECTO A LA MEDIA Y LA DESVIACIÓN ESTÁNDAR EN SEÑALES EEG REALES.

Para la evaluación de los métodos de inferencia desarrollados con señales EEG reales se emplearon algunas señales disponibles en la web en forma de código ASCII. Para el tratamiento de estas señales se hizo necesaria la implementación de un programa en lenguaje C de tal modo que se lograra acceder a la totalidad de los datos. Además se realiza un filtrado pasa bajos por medio de la técnica binomial de tercer orden, con el fin de eliminar el ruido de alta frecuencia presente en la señal. La tabla 5.1 presenta los resultados obtenidos al aplicar el mismo procedimiento utilizado para analizar el ritmo alfa simulado sobre una de las señales.

Estos datos sólo corresponden a una porción del registro EEG y la porción elegida es aquella que guarda mayor similitud con la de un ritmo EEG alfa. El histograma correspondiente a la distribución de las medias muestrales se ilustra en la figura 4.1. Puede verse la tendencia de los datos a la media antes determinada (149.8). Como se mencionó antes, *la distribución de todas las medias muestrales está definida como la distribución t-student*.

La tabla 4.3 indica la distribución de probabilidades correspondiente al histograma representado en la figura 4.2. Esta tabla se emplea para ubicar una media muestra cualquiera en alguno de los intervalos determinando la probabilidad de que la señal analizada corresponda a un ritmo alfa. En la figura 4.3. se ilustra la curva de distribución de probabilidades correspondiente a la tabla 4.3.

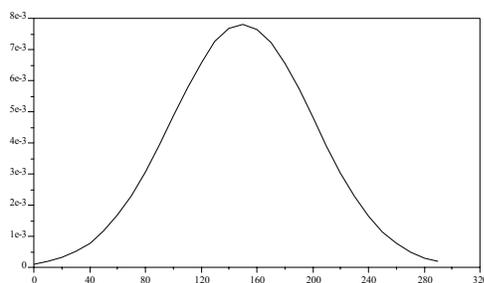


Figura 4.3: Curva de distribución de probabilidades

5. VALIDACIÓN DE RESULTADOS. Con el objetivo de comprobar la validez del método implementado, se tomaron diferentes muestras del mismo archivo utilizado en la tabla 4.1. Los valores para las medias obtenidas fueron de 265.87, 173.87 y 68.63. Con estos valores de las medias, las probabilidades de pertenecer a un ritmo alfa fueron del 16%, 20% y 16% respectivamente.

TABLA 4.1: Resultados experimentales del análisis de una señal EEG real

Muestra	Media	d-stand	L-inf	L-sup	Muestra	Media	d-stand	L-inf	L-sup
1	49,22	90,85	25,09	73,36	14	186,20	182,83	137,63	234,77
2	72,25	78,13	51,50	93,00	15	192,25	194,90	140,48	244,02
3	72,90	108,12	44,18	101,62	16	203,85	216,94	146,22	261,48
4	110,28	122,17	77,82	142,73	17	243,00	225,57	183,08	302,92
5	139,05	139,47	102,00	176,10	18	211,10	253,84	143,67	278,53
6	126,93	153,79	86,07	167,78	19	218,20	223,15	158,92	277,48
7	154,73	140,59	117,38	192,07	20	207,20	224,52	147,56	266,84
8	152,95	175,00	106,47	199,43	21	176,62	225,90	116,62	236,63
9	154,43	163,75	110,93	197,72	22	147,15	208,06	91,88	202,42
10	148,27	167,98	103,65	192,90	23	109,43	165,64	65,43	153,42
11	161,75	166,80	117,44	206,06	24	93,68	128,75	59,48	127,87
12	158,25	176,55	111,35	205,15	25	76,68	124,11	43,71	109,64
13	178,60	162,85	135,34	221,86					

Media Poblacional 149.8 d_estándar 51.1 L- inferior 128.71 L- superior 170.89

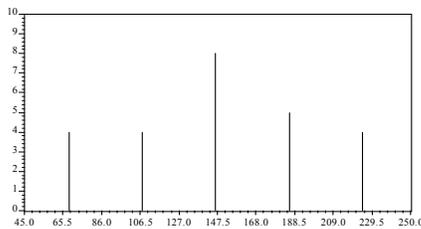


Figura 4.2: Histograma correspondiente a los datos de la tabla 4.1

Intervalo	# Muestras	Media	Probabilidad
49 - 88	4	68,5	0,16
88 - 127	4	107,5	0,16
127 - 166	8	146,5	0,32
166 - 205	5	185,5	0,2
205 - 244	4	224,5	0,16

Tabla 4.3: Distribución de probabilidades

De acuerdo con los resultados, se tiene que empleando un intervalo de confianza del 95% con una media de 149.8, se tiene una probabilidad de 0.32 de que la señal corresponda a un ritmo alfa. La figura 4.3 ilustra las curvas de distribución de probabilidad para las otras muestras tomadas. En esta figura se observa una mayor tendencia de los datos hacia el valor de la media obtenido inicialmente. Realmente, la muestra que mejor representaría un valor para la media, sería aquella que dentro del mismo intervalo de confianza tuviera una probabilidad mayor. Este dato es de gran importancia así como la técnica utilizada para su inferencia, ya que en términos reales puede ser utilizado para el monitoreo permanente de las señales EEG.

De acuerdo a lo anteriormente expuesto, así como se obtuvieron los parámetros estadísticos para el ritmo alfa, se puede proceder también con los demás ritmos EEG o con señales clasificadas como anormales. Siguiendo este procedimiento se puede entonces construir una tabla con parámetros estadísticos para cada tipo de ritmo EEG. Esta tabla servirá como un medio de consulta para determinar a que grupo o subgrupo puede pertenecer una determinada muestra bajo estudio. Dicho en otra forma, se pueden construir poblaciones mediante la comparación entre curvas EEG de pacientes con una enfermedad o deficiencia cerebral. Para saber si las curvas pertenecen realmente a una población determinada, se hace el estudio de probabilidad entre las curvas mediante la prueba t-student. Si la probabilidad es alta, puede decirse que las señales pertenecen a una misma población.

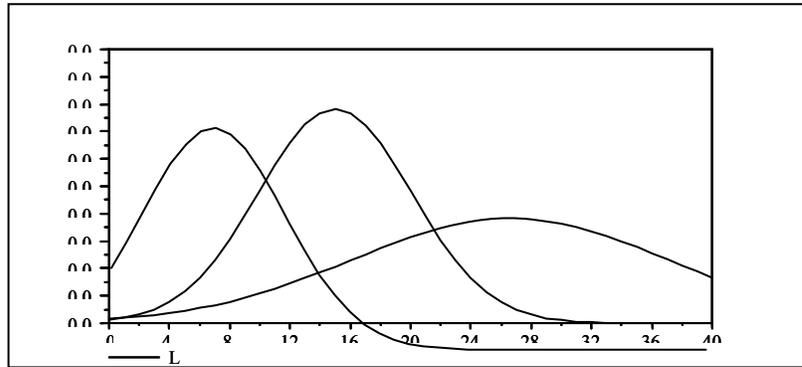


Fig. 4.3: Comparación de las curvas de distribución para los diferentes datos.

La construcción de cada población asociada a una enfermedad o síndrome debe hacerse con al menos veinte pacientes. Igualmente debe establecerse una población asociada a sujetos sanos. Una vez establecidas las poblaciones, se podrán hacer comparaciones entre las señales EEG de un sujeto cualquiera y las curvas promedio de las poblaciones para establecer si el individuo está sano o padece alguna enfermedad con una alta probabilidad. Este debe ser el paso siguiente al desarrollo de este trabajo.

6. CONCLUSIONES.

6.1. En el análisis de los diferentes ritmos electroencefalográficos se pudo establecer que el cerebro no permanece constantemente en cada uno de ellos, sino que por el contrario su actividad está continuamente cambiando de acuerdo a los diferentes estímulos que los órganos de los sentidos están experimentando. Estos estímulos pueden ser auditivos, ópticos, etc. y presentados en diferentes estados de conciencia ya sean normales o inducidos por medio de barbitúricos. Algunos ritmos tales como el alfa pueden ser característicos de ciertos estados cerebrales tales como periodos de concentración, mientras que otros pueden presentarse solamente en estados patológicos como la epilepsia. El interés de este trabajo fue la caracterización de estos estados mediante el análisis de las señales EEG para el establecimiento de poblaciones.

6.2. En este trabajo se encontró que la técnica de comparación de datos basada en la distribución t – Student, permite obtener de una manera aproximada los parámetros estadísticos de una señal EEG correspondiente a una población determinada. Esta población puede corresponder a personas sanas o con algún síndrome o disfunción cerebral. Aplicando esta técnica a una población aún mayor, es posible obtener resultados aún más confiables y de este modo aumentar su confiabilidad. Para ello debe cuidarse que los datos que se tomen pertenezcan al tipo de señal que se está analizando. Como es natural esta técnica podrá entonces ser aplicada a los diferentes tipos de señales EEG y con ella construir una *Base de conocimiento de parámetros estadísticos de señales EEG*. En lo que respecta a este trabajo, sólo se hicieron las pruebas con el ritmo alfa puesto que el proceso con las demás señales es idéntico. Por su sencillez, la técnica de inferencia basada en la distribución t – Student puede ser fácilmente implementada en comparación con otras técnicas como las basadas en el reconocimiento de patrones, redes neuronales o lógica difusa entre otras. Por consiguiente, esta técnica permite darnos una probabilidad de que una determinada señal pertenezca o no a una población EEG previamente establecida, permitiendo determinar si un sujeto es sano o padece algún tipo de enfermedad.

6.3. De las diferentes técnicas que se pudieron analizar para la simulación de una señal EEG, se pudo establecer que el algoritmo ICA es de gran utilidad en este aspecto. El considerar que un registro EEG está compuesto de señales independientes, hace posible su utilización de forma tal que la recomposición de todas sus componentes permita obtener nuevamente la señal original. Desde otro punto de vista, el algoritmo ICA es análogo a la transformada inversa de Fourier, el cual es el enfoque que se usó en este trabajo para obtener el registro electroencefalográfico simulado a partir de sus componentes.

REFERENCES

- Dara Ghahremani, Scott Makeig, Tzyy-Ping Jung, Anthony J. Bell, Terrence J. Sejnowski, (May 1996) Technical Report INC-9601, Institute for Neural Computation, University of California, San Diego., Ping Jung, Colin Humpries. “Removing Electroencephalographic Artifacts: Comparison Between ICA and PCA”.
- Computational Neurobiology. Lab. The Salk Institute, San Diego, CA.
- Bernard Harris, Isak Gath, (September 1994). “On Time Delay Estimation of Epileptic EEG”.
- IEEE Transaction on Biomedical Engineering. Vol 41, N° 9. Pág. 820.
- Openheim Alan. (1983) “Señales y Sistemas”. Ed Prentice Hall.. Pag 339 – 342.
- Andersen, P. y Andersson, S. A.(1968). “Physiological Basis of the Alpha Rhythm”.
- Appleton – Century – Crofts. New York. Pags 110 – 128.
- Chao, Lincoln(1996). “Estadística para las ciencias administrativas”. Pag. 118 – 126.
- Forero, Manuel G.(2002). “Introducción al procesamiento digital de imágenes”. Pág 98. La silueta ediciones Ltda. Bogotá Colombia.
- Scilab. Institute Nacional de la Recherche en Informatique e Automatique.
- http://www.rocq.inria.fr/scilab/doc/demos_html/node180.html

Authorization and Disclaimer

Author authorize LACCEI to publish the paper in the conference proceedings. Neither LACCEI nor the editors are responsible either for the content or for the implications of what is expressed in the paper.