

# UN ENFOQUE CONCEPTUAL DE LA HETEROGENEIDAD EN ESTRUCTURAS Y PROCESOS FÍSICOS EN UN ACUÍFERO RECARGADO DESDE UN HUMEDAL

*Abstract—In the face of growing population, the need to explore and take advantage of water supply sources, alternating with traditional surface water sources, is taken for granted. In Colombia, the exploitation of groundwater began several years ago and both regional autonomous corporations and some private groups have been responsible for regulating this resource. A certain type of aquifer, are recharged from wetlands, reaching the water to this, even cleaner for human supply.*

*However, it has been demonstrated in professional practice that the techniques used for the exploration, analysis and modeling of the water resource that underlies underground sources are not adjusted in accordance with the complexities that arise from the understanding of the physical processes that participate in the dynamics of groundwater flow.*

*The phenomena associated with the flow and transport of solutes from a wetland to aquifers are influenced by a large number of factors, among which the heterogeneity of the porous medium and the complexities of the interactions between surface water flows and underground*

*As a result of the intrinsic structure that forms the flow and transport of groundwater, very complex spatial patterns emerge that cannot be clearly discerned and make it difficult to make decisions about how to use the resource and its preservation.*

**Key words:** groundwater, wetland, environmental modeling

## I. INTRODUCTION.

Ante un crecimiento poblacional en progreso, está por sentado la necesidad de explorar y aprovechar fuentes de abastecimiento de agua, alternas a las tradicionales fuentes de agua superficial. En Colombia, la explotación del agua subterránea inicio hace varios años atrás y tanto las corporaciones autónomas regionales como también algunos grupos privados se han encargado de la regulación de este recurso. Un cierto tipo de acuíferos, son recargados desde humedales, llegando el agua a este, inclusive más limpia para el abastecimiento humano [1].

No obstante, se ha evidenciado en la práctica profesional que las técnicas empleadas para la exploración, el análisis y la

modelación del recurso hídrico que subyace en fuentes subterráneas no se efectúa de forma ajustada conforme a las complejidades que proceden del entendimiento de los procesos físicos que participan en la dinámica del flujo de agua subterránea.

Los fenómenos asociados al flujo y el transporte de solutos desde un humedal a los acuíferos se ven influenciados por un gran número de factores, entre los cuales se destaca, la heterogeneidad del medio poroso y las complejidades de las interacciones entre los flujos de agua superficial y subterránea [2].

Como resultado de la intrínseca estructura que conforma el flujo y transporte de agua subterránea, emergen patrones espaciales muy complejos que no pueden ser divisados con claridad y dificultan la toma de decisiones en torno al modo de aprovechamiento del recurso y su preservación

## II. ANTECEDENTES.

Frente a la dificultad por entender mejor las propiedades físicas de sistemas complejos como son las fuentes de agua subterránea, han resultado nuevas técnicas y avances en la inspección de patrones geofísicos asociados. Entre los resultados más interesantes que vale la pena resaltar, son las relaciones entre las escalas espaciales y temporales del medio que transporta el agua subterránea. Estas propiedades de escalamiento representan el grado de dependencia de las propiedades físicas o mecánicas del sistema de estudio sobre un amplio rango de escalas en las cuales interaccionan. A partir de los primeros estudios de las propiedades de escalamiento, han resultado importantes constantes adimensionales que relacionan las fuerzas que actúan sobre un fluido (e.g. el número de Reynolds que relaciona las fuerzas viscosas y las fuerzas inerciales, el número de Capilaridad que relaciona las fuerzas viscosas y las de tensión superficial en un medio poroso, el número de Bond que relaciona las fuerzas de boyancia (o flotabilidad) y capilaridad, etc.). Otra perspectiva de las propiedades de escalamiento puede ser visto a través del

estudio de las propiedades geométricas del patrón geofísico. En este caso, el interés estaría en comprender como cambian un objeto desde diferentes escalas de observación. Si las propiedades de este objeto de estudio no presentan cambios en la escala, quizás se esté tratando con un objeto fractal.

Los objetos fractales son definidos como simetrías en evolución, considerando que ellos son auto-semejantes, o bien, invariantes en las escalas en que son observados. La naturaleza física de estos objetos fractales y como se constituyen en los procesos geofísicos (y específicamente en el flujo y transporte de agua subterránea) es hoy por hoy un tema de basta investigación; sin embargo, algunos estudios determinan que puede existir un mecanismo semejante al observado en el estudio de las transiciones de fase para explicar las propiedades de escalamiento de estos patrones geofísicos [3][4].

La aplicación de las transiciones de fase dentro de este contexto ofrece un grupo de herramientas innovadoras que ayudan a: (i) explicar cómo se establece el flujo preferencial sobre un medio poroso, ii) entender como resultan algunas de las interacciones entre las escalas del proceso físico observado, y iii) ofrecer información sobre la organización espacio — temporal de estructuras fractales encontradas en la teoría general del flujo de agua subterránea.

Es importante destacar que ante un limitado conocimiento de las propiedades del medio de flujo de agua subterránea y sus interacciones, el desarrollo y la aplicación de modelos con resultados de buena precisión, es una tarea muy difícil.

### III. MARCO TEORICO.

#### A. Aproximación Fractal — Multifractal

Los conceptos de fractales y multifractales fueron introducidos formalmente por Mandelbrot [5] [6] para explicar el comportamiento de formas geométricas complejas. Los fractales son definidos como patrones geométricos que se repiten a sí mismos sobre un amplio rango de escalas (auto-semejanza) y sus propiedades de escalamiento normalmente son representadas a través de leyes de potencias. Por otra parte, los multifractales son también objetos geométricos que estadísticamente presentan propiedades de auto-semejanza, pero sus propiedades sólo pueden ser descritas a través de un conjunto de leyes de potencias [7].

Los fractales y multifractales, ambos son empleados para la descripción de la heterogeneidad de sistemas físicos y han resultado ser muy útiles en múltiples aplicaciones relacionadas con el estudio de medios porosos [8] [9] [7] [10] [11].

Entre los modelos existentes que emplean conceptos de la teoría fractal y multifractal, se destaca aquí la aproximación Fractal — Multifractal (FM). Este modelo fue introducido por Puente [9] para el estudio y descripción determinística de campos de precipitación, pero su aplicación se ha extendido al análisis de transporte de solutos en medios porosos [12]. En la aproximación FM, los observables son construidos a través de proyecciones de una medida multifractal, la cual reside en el espacio geométrico de una función de interpolación fractal (FIF). Las funciones de interpolación fueron unas de las innovaciones de la teoría fractal presentadas por Barnsley [13] como un ejemplo de aplicación de los sistemas iterados de funciones (SIF). Sin embargo, Puente [9] desarrolló la idea de Barnsley, explorando el comportamiento de la distribución estadística de los puntos que construyen la FIF para obtener una aplicación de esta función en el campo de la geofísica.

Durante el proceso de construcción de las FIF en el plano  $\mathbb{R}^2$ , se generan dos medidas estadísticas que resultan del conteo de las frecuencias relativas de las coordenadas  $x$  e  $y$ , correspondientes a los puntos por donde pasa la función de interpolación fractal. Dada la continuidad de la FIF, la medida encontrada en el eje  $y$  puede interpretarse como una proyección de la medida generada en el eje  $x$  mediante la FIF:  $f_x(x) = y$ . Esta interpretación es semejante al concepto de distribuciones derivadas de probabilidad que se emplea en ingeniería para el análisis de las transformaciones algebraicas que operan en la distribución de datos aleatorios. Es importante tener en cuenta que dependiendo de cómo estén localizados los puntos de la FIF en el plano  $\mathbb{R}^2$  y sean definidos los parámetros del modelo, las medidas derivadas tendrán propiedades multifractales y podrían ser denominadas como tal.

Para una representación unidimensional de medidas derivadas con el modelo FM, se requiere que las FIF estén definidas para un conjunto de  $N + 1$  puntos en el plano  $\mathbb{R}^2$  e igualmente para un conjunto de  $N$  mapas afines contráctiles de la forma:

$$W_n \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & 0 \\ c_n & d_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_n \\ f_n \end{pmatrix} = A \cdot x + t \quad n = 1 \dots N \quad (1)$$

Las cuales están sujetas a las siguientes restricciones:

$$W_n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}, \quad W_n \begin{pmatrix} x_N \\ y_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \quad 0 \leq d_n \leq 1 \quad (2)$$

En este modelo  $\{a_n, c_n, d_n, e_n, f_n\}$  son los parámetros de la aproximación FM que pueden derivarse teniendo en cuenta las restricciones. Sin embargo, el parámetro  $d_n$  es un parámetro que está delimitado en el rango  $[0,1]$  y debe ser definido por el usuario del modelo. Cuando se satisfacen estas condiciones, existe, un único “punto fijo”, es decir, la representación gráfica  $G$  de la función de interpolación  $f: x \rightarrow y$ , tal que  $G = \{(x, f(x)) | x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$ , la cual es obtenida mediante iteraciones que satisfacen [13].

$$G = \bigcup_{n=1}^N W_n(G) \quad (3)$$

Si a los puntos obtenidos de los mapas afines se le aplica una rotación  $\theta$ , se introduce un nuevo parámetro al modelo que logra aumentar el número de patrones y la complejidad de los mismos. La definición de proyección de medidas derivadas (multifractales) para diferentes valores del ángulo  $\theta$ , puede entenderse como una transformación afín en el plano Euclideo  $W: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Siendo  $W_n(x)$  la transformación de la FIF, entonces:

$$W_n(x) = A_n \cdot x + t_n \quad (4)$$

Donde,

$$A_n = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_n & 0 \\ c_n & d_n \end{pmatrix}^T \quad (5)$$

Es una matriz que deforma el espacio relativo a través de rotaciones y contracciones. De igual forma, la aproximación FM se puede extender a un espacio  $\mathbb{R}^3$ , de forma análoga al planteamiento matemático empleado para un espacio  $\mathbb{R}^2$ . Si se considera que las FIFs están definidas para un conjunto de  $N + 1$  puntos en  $\mathbb{R}^3$  y para un conjunto de  $N$  mapas afines contráctiles de la forma:

$$W_n \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & 0 & 0 \\ c_n & d_n & h_n \\ k_n & l_n & m_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_n \\ f_n \\ g_n \end{pmatrix} = A \cdot x + t \quad n = 1 \dots N \quad (6)$$

Con las restricciones:

$$W_n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \\ z_{n-1} \end{pmatrix}, \quad W_n \begin{pmatrix} x_N \\ y_N \\ z_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} \quad (7)$$

Donde,

$$\psi = \begin{pmatrix} d_n & h_n \\ l_n & m_n \end{pmatrix} \quad (8)$$

Debe satisfacer que su norma espectral sea menor que uno; es decir, la raíz cuadrada del máximo valor propio del producto de la matriz  $\psi$  y su transpuesta  $\psi^T$  debe ser menor que uno:

$$\|\psi\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(\psi\psi^T)} < 1 \quad (9)$$

Si se satisfacen las anteriores condiciones, resultará una única representación gráfica  $G$  de la función de interpolación, tal que  $G = \{(x, y, f_z(x, y)) | x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\}$ , la cual es obtenida mediante iteraciones que satisfacen:

$$G = \bigcup_{n=1}^N W_n(G) \quad (10)$$

La construcción de la FIF se hace a partir de 4 parámetros libres:  $\{d_n, h_n, l_n, m_n\}$  y  $N + 1$  puntos conforman la estructura general de la función de interpolación fractal. Las medidas derivadas pueden ser transformadas incluyendo el parámetro de rotación  $\theta$ , el cual permite hacer la siguiente transformación a los parámetros libres:

$$A_n = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_n & h_n \\ l_n & m_n \end{pmatrix}^T \quad (11)$$

En el campo de las aplicaciones de la aproximación FM en el campo de la hidrogeología, claramente éste puede empleado para la descripción de formas o procesos que sean heterogéneos e intermitentes. En la ilustración que se presenta en la Figura 1, se observa un campo generado de concentración de solutos el cual preserva la estructura típica observada en un medio poroso heterogéneo. Aun cuando es tema de investigación, identificar la conexión de los

parámetros del modelo con la estructura física del medio poroso, la sola producción de patrones complejos con la aproximación FM constituye una ventaja al modelador. El análisis de los parámetros del modelo y la caracterización de los mismos desde un punto de vista geométrico, permite acercarse más fácilmente al entendimiento de la dinámica no-lineal del proceso físico de estudio reduciendo el número de factores que intervienen en ella y el manejo de complejas ecuaciones diferenciales parciales no-lineales que gobiernan el sistema. Desde un punto de vista optimista, puede pensarse que bajo ciertas consideraciones particulares, se logró la predicción de futuros escenarios geofísicos cuando se correlacionan las características de los parámetros del modelo con el tiempo y se crea un mecanismo evolutivo de la aproximación FM. Para un mayor detalle de estas ideas y de sus aplicaciones se recomienda al lector revisar los trabajos efectuados por Puente [9] y Puente [12].

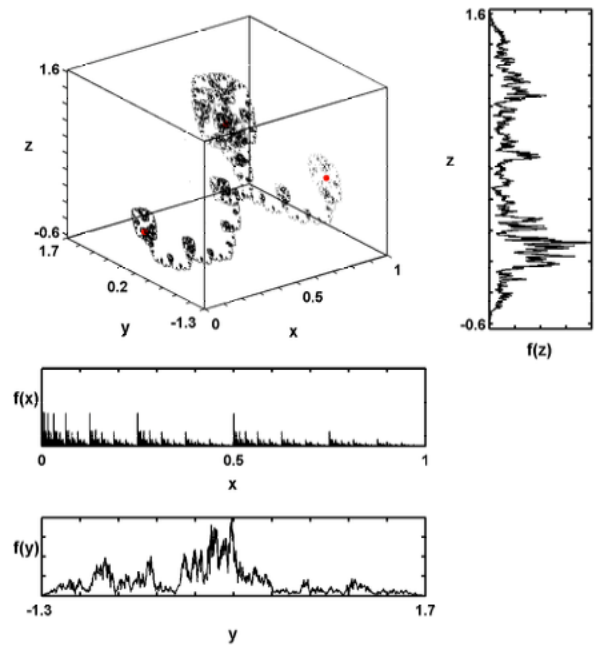
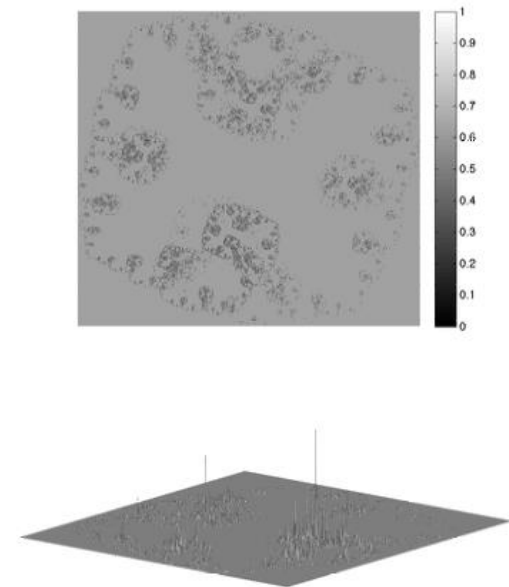


Fig. 1. Campo de concentración de solutos en un acuífero después de recarga desde un humedal

Figura 1. A la derecha de la figura se ilustra un campo de concentración de solutos en un acuífero (vista en planta y en perspectiva), generado con la aproximación FM con los parámetros:  $\theta = 90^\circ$ ,  $d_n = 0.5$ ,  $h_n = 0.0$ ,  $l_n = 0.0$ ,  $m_n = 0.5$  y los puntos que conforman la FIF:  $p_1 = \{0,0,0\}$ ,  $p_2 = \{0.5,0.2,1\}$ ,  $p_3 = \{1,0,0\}$ . A la izquierda de la figura en el recuadro que representa un espacio  $\mathbb{R}^3$  se observa la forma general de la FIF y a sus alrededores se muestran tres medidas multifractales  $f_z(x) = f(x)$ , y  $f_{x,y}(z) = f(z)$ , que resultan durante el proceso de construcción de la FIF y son proyecciones sobre los ejes principales del cuadrante geométrico en el que se suscribe la FIF.

### B. Cascadas Aleatorias Multiplicativas

Gran parte de los modelos multifractales son construcciones matemáticas que buscan capturar la intermitencia y el comportamiento irregular de observables naturales. Las primeras aplicaciones nacen en el estudio de la turbulencia [14] y de ella se desprenden las primeras ideas sobre la descripción de patrones basado en procesos multiplicativos. El concepto de procesos multiplicativos está basado en la idea de auto semejanza, i.e. cantidades físicas que se componen de sí mismas. En la construcción de cascadas



multiplicativas, las medidas (multifractales)  $M_n(x)$  tienen una densidad  $\rho_n(x)$  definida por:

$$\rho_n(x) = \prod_{k=1}^n W_{(j_1, \dots, j_k)} x \in \Delta_n(j_1, \dots, j_k) \quad (12)$$

Donde  $W_{(j_1, \dots, j_k)}$  son variables aleatorias positivas, independientes e idénticamente distribuidas. Al ser  $W_{(j_1, \dots, j_k)}$  una variable aleatoria el proceso multiplicativo adquiere ahora el nombre de cascada aleatoria multiplicativa.

Entre la variedad de modelos existentes de cascadas aleatorias multiplicativas se quiere resaltar aquí el trabajo desarrollado por Over y Gupta [15], el cual se considera tiene un amplio potencial para las aplicaciones en geofísica. En este modelo las cascadas aleatorias son construidas por la subdivisión de un cubo  $d$ -dimensional  $[0, L_0]^d$  en  $b$  sub-cubos. Para  $d < 1$ , se cumple que:

$$b = \prod_{i=1}^d b_i \quad (13)$$

Donde  $b_i$  representa el número de subdivisiones en cada paso de la  $i$ -ésima subdivisión de la cascada. El  $i$ -ésimo sub-cubo después de  $n$  subdivisiones se denota por  $\Delta_n^i$  y la longitud de uno de los lados del sub-cubo  $\Delta_n^i$  en el nivel  $n$  representa la escala espacial y es denotada por  $L_n$ . Inicialmente, al cubo  $d$ -dimensional  $[0, L_0]^d$  se le asigna una masa inicial  $M_0 L_0^d$ . A los sub-cubos de la primera subdivisión  $\Delta_1^i$  se le asigna la masa  $\mu_1(\Delta_1^i) = M_0 L_0^d W_1^i / b$  para  $i = \{1, 2, \dots, b\}$ . Aquí  $W_n^i$  es una variable aleatoria positiva e independiente y la distribución de probabilidad de  $W_n^i$  representa el generador de la cascada. Continuando con el proceso multiplicativo, para la subdivisión  $\Delta_n^i$  de la cascada, se le asocia una masa  $\mu_n(\Delta_n^i)$ , definida por el producto entre la masa inicial  $M_0 L_0^d$  y la productoria de todos los  $W_n^i$  que intervienen los sub-cubos de tamaño  $\Delta_n^i$ , dividido por el número de sub-cubos  $b^n$  en el nivel  $n$ :

$$\mu_n(\Delta_n^i) = \frac{M_0 L_0^d}{b^n} \prod_{j=1}^n W_j^i \quad (14)$$

La masa límite  $\mu_\infty(\Delta_n^i)$  se obtiene cuando  $n \rightarrow \infty$ , la cual satisface la ecuación recursiva:

$$\mu_\infty(\Delta_n^i) = \mu_n(\Delta_n^i) \frac{\mu_\infty([0, L_0]^d)}{R_0 L_0^d} = \mu_n(\Delta_n^i) Z_\infty(i) \quad i = \{1, 2, \dots, b^n\} \quad (15)$$

Donde  $Z_\infty(i)$  es estadísticamente independiente de  $\mu_n(\Delta_n^i)$  y representa en la estructura de la cascada aleatoria, un componente de alta frecuencia (i.e. elementos de pequeña escala). Por otro lado,  $\mu_n(\Delta_n^i)$  representa el componente de baja frecuencia (i.e. elementos de gran escala) en la estructura general de la cascada. En este modelo, se adopta que la masa sea conservada durante el proceso de construcción de la cascada (cascada canónica), por tanto, se espera que el valor medio del generador de la cascada sea igual a uno (i.e.  $E[W] = 1$ ), implicando también que  $E[Z_\infty] = 1$  [15].

La teoría de cascadas aleatorias puede ser empleada en el análisis del transporte de solutos en acuíferos, de igual manera como se ilustró para la aproximación FM. En este caso de aplicación, se adoptará los valores de  $d = 2$  y  $b = 4$ , para el desarrollo de simulaciones, tal y como se muestra en la Figura 2. A partir de los resultados de la simulación que se emplea como ilustración de estas ideas, es evidente que el modelo puede reproducir un alto grado de intermitencia espacial en las medidas de concentración de solutos, así mismo, la distribución de los solutos dentro de la región de análisis permite identificar un alta heterogeneidad del medio físico de estudio.

#### IV. METODOLOGÍA

En los modelos determinísticos convencionales se busca caracterizar las propiedades hidráulicas del medio poroso (e.g. conductividad, porosidad, contenido de agua, etc.) y son modeladas considerando que el medio poroso puede ser representado por un sistema homogéneo dentro de un determinado rango espacial. Los modelos estocásticos, por su parte, representan mejor la heterogeneidad del medio, sin embargo, se adoptan criterios estadísticos que simplifican la complejidad matemática del modelo pero que no necesariamente guardan relación directa con las propiedades físicas del medio (e.g. estacionariedad, ergodicidad, normalidad, etc). Otros modelos de naturaleza determinística o estocástica que se apoyan en la teoría fractal, son aproximaciones matemáticas más eficientes y eficaces para explicar la heterogeneidad intrínseca del medio poroso y cómo son las interacciones entre las propiedades del medio poroso y el flujo a través de él. A diferencia de otros modelos, éstos

tienen un menor número de parámetros involucrados en su estructura y preservan varias de las propiedades geométricas de los patrones observados [16] [17] [4] [12] [2] [18] [19] [20] entre otros. En esta investigación, se introducirá a los lectores en algunos de los modelos que hacen parte de la última categoría anteriormente indicada. El propósito es expandir el kit de herramientas de quienes enfrentan problemas de modelación y análisis en la ingeniería de aguas subterráneas.

## V. RESULTADOS.

Las aplicaciones del formalismo multifractal en el contexto de estudio de sistemas de acuíferos, ha tenido una amplia apertura científica para caracterizar datos experimentales, desarrollar modelaciones numéricas y generar nuevos procedimientos para el análisis de datos. A partir de los resultados de diversos estudios en esta materia de investigación, se puede evidenciar que se ha logrado avanzar en el entendimiento de procesos físicos no-lineales y en el análisis de sistemas que claramente se describen por una alta heterogeneidad en el medio poroso constituyente. No obstante, el marco de investigación está aún en construcción y es necesario adelantar investigaciones que permitan avanzar en bases conceptuales de tópicos como son: la fragmentación de suelos, la geometría del medio poroso, el flujo y transporte de solutos en medios porosos, el comportamiento del flujo en las diferentes escalas del medio poroso, entre otros temas más.

Algunas de las herramientas conceptuales que aquí se han introducido tienen por objeto generar inquietudes en los lectores y anticipar cuestionamientos sobre la utilidad de los mismos para enfrentar problemas en la ingeniería de aguas subterráneas. Sin embargo, es importante tener en consideración que la simplicidad de estos modelos y su conexión con las propiedades geométricas del sistema de estudio, resultan siendo atractivos e innovadores para explorar y estudiar. Quizás a través de un claro entendimiento de las propiedades geométricas del sistema y de las rupturas de simetría asociadas a ellas, se logre mejorar nuestros sistemas de alarma y predecir el comportamiento del sistema frente a nuevos escenarios climáticos y efectos antropogénicos.

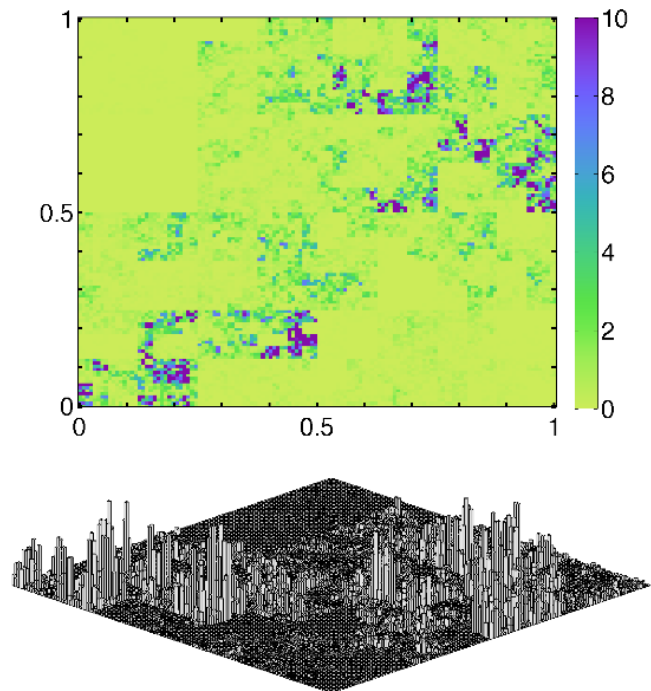


Fig 2. Campo de concentración de solutos

Figura 2. Ilustración de una realización de un campo de concentración de solutos re-escalado en el rango  $[0,10]$ , y simulado con los parámetros  $d = 2$ ,  $b = 4$ ,  $M_0 L_0^2 = 1$  y  $E[W] = 1$ . El recuadro superior muestra una vista bidimensional del campo y en ella se ilustra las regiones espaciales donde se concentra la mayor parte de los solutos, así mismo, el recuadro inferior permite identificar el alto grado de intermitencia que es generada por el modelo.

## REFERENCIAS.

- [1] Vargas, E. R. M., & Gonzalez, J. P. (2013). Modelo hidrogeológico conceptual y análisis de vulnerabilidad a la contaminación del acuífero de Duitama Boyacá-Colombia. In *Vestigium Ire*, 3(1).
- [2] Sivakumar, B., Harter, T. y Zhang, H. (2005). Solute transport in a heterogeneous aquifer: A search for nonlinear deterministic dynamics. *Nonlinear Processes in Geophysics*, 12, 211–218
- [3] Hunt, A. y Ewing, R. (2017). Scaling. En Cushman, J. y Tartakovsky, D. (Eds.). *The handbook of groundwater engineering* (3rd edition) (pp. 459–495). Boca Raton, Florida, USA: The Taylor & Francis Group.
- [4] Hunt, A G, 2001, Applications of percolation theory to porous media with distributed local conductances, *Advances in Water Resources*, 24(3,4): 279–307

- [5] Mandelbrot, B. (1982). *The fractal geometry of nature*. New York: W.H. Freeman
- [6] Mandelbrot, B. (1988). *Fractal and Multifractals: Noise, Turbulence and Galaxies*. New York: Springer.
- [7] Perfect, E., y Kay, B. (1995). Applications of fractals in soil and tillage research: a review. *Soil Tillage Research*, 36, 1–20.
- [8] Pachepsky, Y., Perfect, E. y Martín, M. (2006). Fractal geometry applied to soil and related hierarchical systems. *Geoderma*, 134, 237–239. [9] Puente, C. (1996). A new approach to hydrologic modeling: derived distributions revisited. *Journal of Hydrology*, 187 (1,2), 65–80.
- [9] Frisch, U. (1995). *Turbulence: The legacy of A. N. Kolmogorov*. Cambridge University Press.
- [10] Folorunso, O., Puente, C., Rolson, D. y Pinzon, J. (1994). Statistical and fractal evaluation of the spatial characteristics of soil surface strength. *Soil Science Society of America Journal*, 58, 284–294.
- [11] Pfeifer, P., Avnir, D., y Farin, D. (1983). Ideally irregular surfaces of dimension greater than two in theory and practice. *Surface Science*, 126, 569–572.
- [12] Puente, C., Robayo, O., Diaz, M. y Sivakumar, B. (2001). A fractal-multifractal approach to groundwater contamination. 1. modeling conservative tracers at the borden site. *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment*, 15(5), 357–371.
- [13] M. Barnsley, M. (1993). *Fractals Everywhere* (Segunda Ed.). Morgan Kaufmann Pub.
- [14] Frisch, U. y Parisi, G. (1985). On the singularity structure of fully developed turbulence.
- [15] Over, T. y Gupta, V. (1994). Statistical analysis of mesoscale rainfall: dependence of a random cascade generator on large-scale forcing. *Journal of Hydrology*, 33, 1526–1542.
- [16] Neuman, S. (1990). Universal scaling of hydraulic conductivities and dispersivities in geologic media, *Water Resources Research*, 26, 1749–1758.
- [17] Molz, F., Liu, H. y Szulga, J. (1997). Fractional Brownian motion and fractional Gaussian noise in subsurface hydrology: a review, presentation of fundamental properties, and extensions. *Water Resources Research*, 33(10), 2273–2286
- [18] Perfect, E., Pachepsky, Y y M. Martin. (2009). Fractal and multifractal models applied to porous media. *Vadose Zone Journal*, 8(1), 7:174–176.
- [19] Feder, J. (1988). *Fractals*. New York and London: Plenum Press.
- [20] Gupta, V. y Waymire, E. (1993) A statistical analysis of mesoscale rainfall as a random cascade. *Journal of American Meteorological Society*, 32, 251–267.