Mathematical model for the optimization of the dairy production master plan

Kleber F. Barcia, Ph.D.[1], Willie A. Córdova, Eng.[2], Víctor H. González, Ph.D.[1]
[1]Escuela Superior Politécnica del Litoral, ESPOL, Ecuador, kbarcia@espol.edu.ec, vgonzal@espol.edu.ec
[2]Escuela Superior Politécnica del Litoral, ESPOL, *Ecuador*, willie_cordova@hotmail.com

Abstract – The company under study is mainly dedicated to the manufacture of dairy products, both liquid and powder, in different functionalities or profiles: whole, skimmed and deslactosed. For production planning, the company has a traditional process, which projects a weekly production plan with the objective of satisfying the demand while looking to maintain an inventory and control production costs according to a pre-defined policy. The company has two major challenges: the first is to maintain a balance between the consumption of a regular volume of milk and the efficient use of surplus fat, while satisfying the demand. The second challenge is to ensure the correct use of factory assets by controlling the levels of stocks and production lots. The company currently does not have an adequate tool to fulfill these purposes. This study seeks to design a mathematical model that helps to develop a manufacturing master plan that allows to meet projected demand, keep inventory at the appropriate levels and comply with production considering capacity constraints.

Keywords - Algebraic modeling system, production master plan, MPS, RCCP

Digital Object Identifier (DOI):
http://dx.doi.org/10.18687/LACCEI2018.1.1.78
ISBN: 978-0-9993443-1-6
ISSN: 2414-6390

Modelo matemático para la optimización del plan maestro de producción para lácteos

Kleber F. Barcia, Ph.D.[1], Willie A. Córdova, Eng.[2], Víctor H. González, Ph.D.[1]
[1]Escuela Superior Politécnica del Litoral, ESPOL, Ecuador, kbarcia@espol.edu.ec, vgonzal@espol.edu.ec
[2]Escuela Superior Politécnica del Litoral, ESPOL, *Ecuador*, willie_cordova@hotmail.com

Abstract* – The company under study is mainly dedicated to the manufacture of dairy products, both liquid and powder, in different functionalities or profiles: whole, skimmed and deslactosed. For production planning, the company has a traditional process, which projects a weekly production plan with the objective of satisfying the demand while looking to maintain an inventory and control production costs according to a pre-defined policy. The company has two major challenges: the first is to maintain a balance between the consumption of a regular volume of milk and the efficient use of surplus fat, while satisfying the demand. The second challenge is to ensure the correct use of factory assets by controlling the levels of stocks and production lots. The company currently does not have an adequate tool to fulfill these purposes. This study seeks to design a mathematical model that helps to develop a manufacturing master plan that allows to meet projected demand, keep inventory at the appropriate levels and comply with production considering capacity constraints.

***Keywords* - Algebraic modeling system, production master plan, MPS, RCCP**

Resumen* – La empresa objeto de estudio está dedicada principalmente a la fabricación de productos lácteo, tanto líquidos como en polvo, en diferentes funcionalidades o perfiles: enteros, descremados y deslactosados. Para la planificación de la producción, la empresa cuenta con el proceso tradicional conocido como planificación de producción, el cual proyecta un plan semanal de producción con el objetivo de satisfacer la demanda al tiempo que se busca mantener un inventario y controlar los costos de producción según una política pre-definida. La empresa tiene dos grandes desafíos: el primero es mantener un balance entre el consumo de un volumen regular de leche y el uso eficiente de los excedentes de grasa, al mismo tiempo que satisface la demanda. El segundo desafío es asegurar el uso correcto de los activos de fábrica controlando los niveles de stocks y los lotes de producción. La empresa en la actualidad no posee una herramienta adecuada para dar cumplimiento a estos propósitos. Este estudio busca diseñar un modelo matemático que ayude a desarrollar un plan maestro de fabricación que permita cumplir con la demanda proyectada, mantener el inventario en los niveles adecuados y cumplir con la producción considerando las restricciones de capacidad.

***Palabras claves* – Sistema algebraico de modelación, plan maestro de producción, MPS, RCCP**

I. INTRODUCCIÓN

En ambientes productivos es bastante común encontrarse con la siguiente interrogante: ¿Cómo establecer un plan de producción que asegure una alta eficiencia de los recursos sin descuidar los niveles de inventario? El equipo de operaciones siempre deseará tener corridas de producción más largas para garantizar el mejor uso de sus activos y apalancar los costos fijos de la fábrica. Por otro lado, la contraparte comercial tendrá como objetivo principal aumentar la participación de mercado y el crecimiento del volumen, lo cual, traducido en planes tácticos, implica ampliar y renovar constantemente el portafolio de productos con el fin de complacer a un consumidor cada vez más exigente.

Los planificadores de producción se encuentran en medio de este dilema, pero parte de su trabajo es generar acuerdos y conciliar planes operativos para la línea de frente. Al hablar de acuerdos, en realidad se está hablando de estándares como: lotes mínimos, eficiencias esperadas, política de inventario (rango), fechas de plazo, frescura de producto, entre otros. Sin embargo, es común encontrarse con planes realizados de forma manual en hojas de cálculo con formulaciones bastante limitadas, o también existen los procesos enterprise resource planning (ERP) que buscan hacer el cálculo del reaprovisionamiento de inventario en función de datos de entrada ingresados y actualizados por los usuarios, pero que, a pesar de ser muy costosos en tiempo y dinero, normalmente no toman en cuenta todas las restricciones del negocio.

La tendencia del consumidor ha cambiado en los últimos 20 años, existe una amplia oferta de productos y servicios como resultado de la globalización, además algunos consumidores optan por personalizar el producto que compran. Las actividades de negocio entre los proveedores y clientes son diferente debido a las nuevas tecnologías [1]. Con respecto a los productos lácteos, 20 años atrás solo se podía encontrar leche entera en funda y de pocas marcas; ahora, la oferta es muy variada e implica leche entera, descremada, semidescremada, deslactosada, saborizada, en diferentes tipos de empaque, tamaños, formas y marcas.

El presente artículo presenta el desarrollo de un modelo matemático para encontrar un plan de producción óptimo que contemple las restricciones más usuales de un proceso productivo de productos lácteos.

A. *Objetivo General*

Desarrollar un modelo matemático ejecutable en un sistema de modelado algebraico general (GAMS) que sugiera un plan de fabricación por producto con un horizonte de 12 semanas, que asegure:

1) Cumplir con la demanda proyectada.

Digital Object Identifier (DOI): http://dx.doi.org/10.18687/LACCEI2018.1.1.78
ISBN: 978-0-9993443-1-6
ISSN: 2414-6390

2) Mantener el inventario dentro de bandas con respecto a un inventario operacional predefinido.
3) Cumplir con las restricciones de volumen de leche.
4) Balancear la generación de materia grasa.
5) Respetar la restricción de capacidad finita.

B. Descripción del Proceso Productivo

La leche cruda se define como un producto de la secreción mamaria normal de animales lecheros, para este estudio la leche cruda proviene de animales bovinos. Este producto debe reunir, entre otras, las siguientes condiciones: ser extraída de animales bovinos lecheros sanos; ser obtenida mediante uno o más ordeños diarios, higiénicos, completos e ininterrumpidos; y, no debe ser sometida a ningún tipo de adición, extracción o calentamiento [2]. Durante la lactancia, la leche se secreta en forma constante. Se acumula en los alvéolos y en los conductos, y el incremento en la presión interna disminuye el grado de secreción de leche. Por lo tanto, cuando el ordeño se realiza dos veces por día, a intervalos regulares, otorgan la mayor producción de leche con un mínimo de variación en el volumen.

La leche se recoge a través de camiones cisternas que siguen una ruta de haciendas hasta llenar su capacidad de almacenamiento. Los camiones cisterna comprenden un tanque o cisterna de acero inoxidable en forma cilíndrica u ovalada y está dividido en cámaras de diferentes tamaños dependiendo de su capacidad. La división en cámaras permite diferenciar la leche según la hacienda o centro de acopio.

La leche cruda empieza a arribar a la planta en horas de la tarde en los carros cisterna. Esta leche es enviada a tanques de entre 30 y 60 mil litros de capacidad a través de dos líneas de descarga (bombas) a una velocidad de 15 litros/hora por cada línea. A medida que los carros cisterna se van desocupando, se les realiza una limpieza ácida en caliente para asegurar su desinfección e inocuidad.

Dependiendo del programa de producción, la leche que reposa en los tanques de almacenamiento debe ser preparada y adecuada para que sus características fisicoquímicas se ajusten a la receta del producto final. A este proceso de preparación se lo conoce como estandarización. La estandarización de productos lácteos es el proceso por el cual la grasa y la leche se separan primero en una línea láctea, luego los dos elementos vuelven a mezclarse otra vez, sin embargo, no todo el contenido de grasa original vuelve a agregarse, solo el nivel exacto requerido para que la leche sea clasificada como descremada, semidescremada o entera.

La planta objeto de estudio tiene dentro de su portafolio dos tipos de productos lácteos: leche líquida y leche en polvo. Para la elaboración de la leche en polvo, además de la estandarización es necesario realizar los procesos de evaporación y pulverización.

La evaporación es la obtención de leche con una alta concentración de sólidos, obtenidos por evaporación de parte del agua contenida en la leche. La concentración de sólidos puede alcanzar valores con porcentajes que van del 24% al 36%. El sistema de evaporación consiste en un sistema donde la leche se calienta rápidamente de manera que el producto tampoco alcanza a caramelizarse.

La pulverización se realiza a través de una torre de secado (dryer), en donde la leche evaporada se seca a través de aspersores de aire caliente a 350°C y las partículas de polvo de leche caen en un cono para luego pasar a pequeños silos de almacenamiento de 1 Tn de capacidad, que serán los abastecedores para el proceso de llenado de este producto. A partir de aquí, la leche se encuentre lista para la siguiente etapa de llenado en su respectivo empaque primario y posterior embalaje en su empaque secundario.

La leche en polvo proveniente de los silos cae por gravedad dentro del empaque primario para formar cada unidad de mantenimiento de stock (SKU), para este proceso se cuenta con 3 máquinas de llenado.

Para productos de leche líquida se cuenta con 4 máquinas de llenado. La leche estandarizada líquida se transporta a través de tuberías hacia las 4 máquinas asépticas de llenado de envases de cartón.

Cada producto tiene un factor de materia grasa (FMG) expresado en kilogramos de grasa generada o consumida por una unidad (caja) de producto terminado, el cual sirve para calcular el excedente de materia grasa que resulte del plan de producción. Este cálculo se realiza mediante la suma producto entre las cantidades planificadas por periodo y su respectivo factor de materia grasa.

Los FMG positivos significan que dicho producto genera un excedente de grasa, y los FMG negativos significan que el producto consume grasa adicional para llegar a un porcentaje superior al de su composición fisicoquímica. Los productos con FMG cero corresponden a productos “no lácteos”, los cuales se incluyen en el modelo puesto que consumen capacidad de producción al compartir líneas con los productos lácteos.

Por la conformación el portafolio de productos, el sistema mantiene un excedente global de grasa lo cual es visto como un subproducto. El excedente puede ser muy variable semana a semana puesto que este valor no es otra cosa que un reflejo del mix de demanda. Sin embargo, en la práctica no se puede plantear un plan de producción con una estrategia de “perseguir” a la demanda. Operacionalmente, se debe encontrar un plan que suavice la generación de materia grasa de tal forma que la desviación no sea mayor a un 10%.

II. METODOLOGÍA

La metodología incluye la descripción del proceso de planificación basado en las capacidades, para posteriormente entrar a la etapa de levantamiento de la información, diseño y construcción del modelo matemático, ejecución de corridas y análisis, ver Fig. 1.

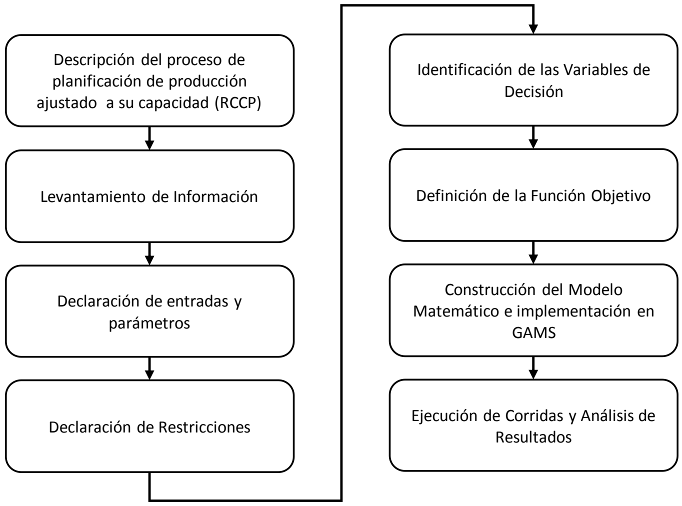

Fig. 1 Metodología del estudio

A. Descripción del proceso de planificación ajustada a la capacidad

La capacidad proyectada es la máxima producción teórica de un sistema en un periodo determinado, normalmente expresada como una relación [3]. Las expresiones matemáticas necesarias para precisar el cálculo de los diversos niveles de capacidad, son:

$$Horas\ Totales\ (HT) = \frac{Días}{Periodo} x \frac{Turnos}{Día} x \frac{Horas}{Turno} \qquad (1)$$

$$Horas\ Disponibles\ (HD) = HT - Paros\ Planeados^{*} \qquad (2)$$

$$Horas\ Requeridas\ (HR) = \frac{Plan\ de\ Producción\ (cajas)}{Velocidad\ (\frac{cajas}{hora})} \qquad (3)$$

$$\%\ Utilización\ = \frac{Horas\ Requeridas}{Horas\ Disponibles} x100 \qquad (4)$$

Donde HT es el tiempo total previsto en horas para un periodo, siendo la "semana" el periodo más común para este tipo de cálculos y equivale a 168 hr (7 dias x 3 turnos x 8 horas). HD equivale a HT menos la duración (en horas) de paros planeados tales como: cambios de formato, mantenimientos planificados, limpiezas, etc. HR es la cantidad de horas necesarias para cubrir el plan de producción. Siendo así, la producción esperada que se podría obtener en el lapso HD y HT se conoce como Capacidad Disponible y Capacidad Requerida, respectivamente. Finalmente, la utilización es el porcentaje de tiempo que un recurso utilizará para producción con respecto al tiempo disponible.

El concepto de planificación ajustada a la capacidad o rough cut capacity planning (RCCP), es el proceso de convertir la planificación maestra de producción (MPS) en requisitos para una lista de recursos clave, donde cada recurso clave se compara con su capacidad disponible [4]. Una lista de recursos es una lista de la capacidad requerida y de los recursos necesarios para la fabricación de una unidad de una referencia. La planificación de capacidad es la determinación de la capacidad requerida para producir un bien en el futuro. RCCP validará si el programa maestro de producción se puede lograr, los pasos son los siguientes [3]:

1) Definir el requerimiento de producción por semana y SKU (Plan de producción).
2) Definir y asignar los recursos disponibles por semana y SKU (Lista de máquinas y horas disponibles).
3) Convertir el plan de producción en términos de horas requeridas del recurso por semana.
4) Comparar y validar las horas requeridas versus las horas disponibles del recurso por semana.
5) Si el requerimiento de producción es realista, se ejecuta el plan, en caso contrario, no se debe ajustar.

Los pasos anteriores servirán como guía para el desarrollo del modelo matemático.

B. Levantamiento de Información y declaración de parámetros de entrada

Un modelo básico de planificación utiliza una serie de datos para cada SKU diferente que mantiene una demanda independiente. Estos datos son:

1) Tiempo de reaprovisionamiento (tiempo transcurrido desde que se lanza una orden de producción hasta que está concluida. Para efecto del presente estudio, el tiempo de reaprovisionamiento de todos los SKU´s es cero, puesto que ningún tiempo de reaprovisionamiento es mayor que el periodo de planificación).
2) Cantidad o lote mínimo de producción.
3) Inventario inicial.
4) Demanda independiente, para cada SKU individual.

En un modelo de planificación de producción el tiempo debe ser dividido en periodos, para este caso es semanas. *t* representa el número total de semanas para el modelo de planificación, y también se refiere al último periodo que se considera en el proceso de planificación, lo cual se denomina horizonte de planificación.

Todos los datos de entrada se resumen en la Tabla I. Un gran número denominado M, que es mayor que cualquier cantidad de producción posible, es necesario para obligar al modelo de optimización a cumplir con los tamaños de lotes mínimos. Esto se explicará en las siguientes secciones.

TABLA I
DATOS DE ENTRADA

i	Número de SKU´s
t	Número de períodos
$II_{(i,0)}$	Inventario inicial del SKU i
$D_{(i,t)}$	Demanda independiente del SKU i en el periodo t
$LS_{(i)}$	Tamaño del lote del SKU i
$M_{(i)}$	Número grande para cada SKU i

C. Restricciones, variables de decisión, función objetivo y construcción del modelo matemático

La construcción del modelo se basa en los conceptos de formulación y resolución de modelos de programación matemática [5], y se segmenta en tres partes con la siguiente secuencia lógica:

1) Modelo base de planificación de producción (PP): es importante mencionar que, como convención general los datos se escribirán con sus subíndices entre paréntesis, mientras que las variables no.

La variable de decisión denominada como $x_{i,t}$ representa la cantidad de producción necesaria del SKU i en el periodo t. Para hacer cumplir la regla de tamaño de lote es necesario una variable indicadora que confirme la producción de un SKU i en el periodo t, que tome el valor de 1 si hay producción y 0 en caso contrario. Además, debe existir una restricción en donde interactúe $M_{(i)}$, $x_{i,t}$ y una variable binaria $\delta_{i,t}$. A esto se lo conoce como condición Sí/Entonces, y la restricción en donde interactúan se la llama restricción de enlace:

$$\delta_{i,t} \geq \frac{x_{i,t}}{M_{(i)}} \tag{5}$$

No puede existir producción negativa, por tanto, la variable $x_{i,t}$ solo puede tomar valores iguales o mayores que cero. Si, $x_{i,t}$ es igual a cero el término $X_{i,t}/M_{(i)}$ será igual a cero; en cambio, si $x_{i,t}$ es mayor que cero el término $x_{i,t}/M_{(i)}$ tomará un valor mayor que cero pero menor a uno, porque $M_{(i)}$ es un número muy grande.

La tabla II resume la interacción entre la variable $x_{i,t}$ y la variable $\delta_{i,t}$:

Si $x_{i,t}$ = 0, $\delta_{i,t}$ puede tomar el valor de 0 o 1. Es decir, se permite la producción del SKU i en el periodo t, así no sea necesario.

Si $x_{i,t}$ > 0, $\delta_{i,t}$ necesariamente debe tomar el valor de 1, no puede ser igual a 0.

TABLA II
LÓGICA DE LA CONDICIÓN SI/ENTONCES $\delta_{i,t}$

SI	Entonces	
$\frac{x_{i,t}}{M_{(i)}}$	$\delta_{i,t} = 0$	$\delta_{i,t} = 1$
=0	SI	SI
>0	NO	SI

La condición Si/Entonces está forzando a que $\delta_{i,t}$ sea igual a 1 si existe un requerimiento de producción mayor a cero, de lo contrario viola la restricción. A continuación, se detalla la formulación para este primer modelo:

Restricción de demanda:

$$\sum_{t=1}^{T} x_{i,t} + II_{(i,0)} - \sum_{t=1}^{t} D_{(i,t)} \geq 0 \tag{6}$$

Restricción de tamaño de lote mínimo:

$$x_{i,t} \geq \delta_{i,t} * LS_{(i)} \tag{7}$$

Restricción de enlace:

$$\delta_{i,t} \geq \frac{x_{i,t}}{M_{(i)}} \tag{8}$$

Declaración de la variable binaria:

$$\delta_{i,t} \in \{1,0\} \tag{9}$$

Declaración de variable no negativa:

$$x_{i,t} \geq 0 \tag{10}$$

La restricción de demanda requiere que la suma de la producción y del inventario inicial de cada periodo tenga que ser al menos igual a la demanda independiente de cada SKU i [6]. La restricción de tamaño de lote especifica que, si hay una producción de un SKU durante un periodo, debe ser al menos igual al tamaño mínimo de lote. La restricción de enlace obliga a tomar un valor mayor que cero si hay producción para el SKU en el periodo. La restricción final obliga al modelo a seleccionar solo valores de producción positivos.

2) Modelo base de planificación de producción con limitación de capacidad (PPLC): para desarrollar limitaciones de capacidad, hay que incluir información de máxima producción por intervalo de tiempo.

La capacidad de un recurso se la puede medir en horas, toneladas, piezas, etc., pero puesto que se desea crear un modelo abstracto que sirva para varios ambientes de similar naturaleza, se va a designar la capacidad de cada recurso como la fracción de tiempo para producir 1 unidad de producción, es decir, se representará a la capacidad $U_{(i,k)}$ como la fracción de tiempo del recurso k para la producción de 1 unidad del SKU i. Los datos necesarios para este segundo modelo se presentan en la tabla III:

TABLA III
DATOS DE ENTRADA PARA EL MODELO PPLC

i	Número de SKU´s
t	Número de períodos
k	Número de recursos
$II_{(i,0)}$	Inventario inicial del SKU i
$D_{(i,t)}$	Demanda independiente del SKU i en el periodo t
$U_{(i,t)}$	Fracción de tiempo del recurso k necesario para producir 1 unidad del SKU i
$LS_{(i)}$	Tamaño del lote del SKU i
$M_{(i)}$	Número grande para cada SKU i

El principal cambio es obviamente la adición de una restricción de capacidad:

Restricción de demanda:

$$\sum_{t=1}^{T} x_{i,t} + II_{(i,0)} - \sum_{t=1}^{t} D_{(i,t)} \geq 0 \qquad (11)$$

Restricción de capacidad:

$$\sum_{i=1}^{i} U_{(i,k)} x_{i,t} \leq 1 \qquad (12)$$

Restricción de tamaño de lote mínimo:

$$x_{i,t} \geq \delta_{i,t} * LS_{(i)} \qquad (13)$$

Restricción de enlace:

$$\delta_{i,t} \geq \frac{x_{i,t}}{M_{(i)}} \qquad (14)$$

Declaración de la variable binaria:

$$\delta_{i,t} \in \{1,0\} \qquad (15)$$

Declaración de variable no negativa:

$$x_{i,t} \geq 0 \qquad (16)$$

Sin embargo, un modelado adecuado requiere la inclusión de los cambios de formato. La palabra cambio se refiere al esfuerzo requerido para cambiar un recurso de producción de un SKU a la producción de otro, lo cual, al ocupar un tiempo estándar afecta a la utilización de un respectivo recurso y por ende a la capacidad del mismo para generar producción. En un modelo simple de cambio de formato se necesita definir $S_{(i,k)}$ como la fracción del recurso k utilizado para el cambio para el SKU de i y modificar la ecuación (12):

$$\sum_{i=1}^{i} [U_{(i,k)} x_{i,t} + S_{(i,k)} \delta_{i,t})] \leq 1 \qquad (17)$$

Función objetivo basada en costos: un modelo de planificación busca producir lo más tarde, pero no tan tarde, para evitar la acumulación de inventarios y obviamente la escasez de producto [6]. Entonces, es lo que se busca es la minimización de los costos.

Cuando se construye la función objetivo, se hace uso de los costos marginales, es decir solo se toman en cuenta aquellos costos que se verán impactados como resultado de las decisiones bajo control. La tabla IV describe los costos necesarios para el desarrollo de la función objetivo:

TABLA IV
COSTOS DE INVENTARIO Y CAMBIO DE FORMATO

$H_{(i)}$	Costo semanal de mantener una unidad del SKU i en inventario
$C_{(i)}$	Costo total de cambio de formato al SKU i

El supuesto para esta función de costo es que el modelo decida cuanto producir de tal manera que balancee los costos de inventario versus los costos de realizar múltiples cambios de formatos. El costo para un cambio de formato es bastante sencillo de diferenciar, si una máquina debe gastar una cantidad de tiempo en la preparación para la producción de un SKU i, esto es el costo por cambio. Cuando se calcula $C_{(i)}$, normalmente se agregan los gastos de mano de obra utilizado en el recurso que se cambia para el SKU i, el costo de todo el material desperdiciado y la energía utilizada como resultado del cambio. Sin embargo, la forma en que cada empresa quiera calcular $C_{(i)}$ podría ser diferente, y dependerá de su estructura de costos y del impacto que se desea tenga este dato de entrada.

Antes de formular la función objetivo es importante introducir el concepto de macros. Una macro no es realmente una variable, sino son simples funciones de variables que se crean para facilitar la lectura de los modelos. La macro a utilizar denota el inventario del SKU i en el periodo t, llevará sus subíndices sin paréntesis y las variables de las cuales depende irán entre paréntesis [6].

Para la definición de macro se usa el símbolo ≡:

$$I_{i,t(x,\delta)} \equiv \sum_{t=1}^{T} x_{i,t} + II_{(i,0)} - \sum_{t=1}^{t} D_{(i,t)} \qquad (18)$$

Por tanto, la restricción de demanda quedaría:

$$I_{i,t(x,\delta)} \geq 0 \qquad (19)$$

Y la función objetivo de minimización de costos:

$$\sum_{t=1}^{t} \sum_{i=1}^{i} [H_{(i)} I_{i,t(x,\delta)} + C_{(i)} \delta_{i,t}] \qquad (20)$$

Sujeta a las restricciones definidas hasta el momento, pero se irán añadiendo más en tanto el modelo se vuelva complejo.

3) Modelo de planificación de producción ajustado a la capacidad (RCCP): un modelo integral de planificación de producción, toma en cuenta la inclusión de horas extras, la posibilidad de tener escasez de inventario que luego se recuperará, y el aseguramiento de una política de inventario como señal de robustez del proceso de planificación y de mejora en el nivel de servicio.

A menudo es demasiado simplista imponer una restricción de capacidad dura, puesto que no es fuera de lo común la posibilidad de poder añadir capacidad a un sistema a través del uso de horas o turnos extras. Inclusive, en algunos casos puede ser posible aportar recursos adicionales en un plazo relativamente corto. Los datos necesarios para expandir las restricciones al funcionamiento de las horas extras se presentan en la tabla V.

TABLA V

FRACCIÓN DE TIEMPO Y COSTO DE HORAS EXTRAS

$F_{(k,t)}$	Máxima fracción de tiempo del recurso *k* que puede ser añadido en el periodo *t*
$o_{(k,t)}$	Costo total de horas extras del recurso *k* en el período *t*

Se debe incluir una nueva variable $y_{(k,t)}$, para representar la fracción de tiempo extra para el recurso k en el periodo t. Esto permitirá añadir el siguiente término a la función objetivo para capturar el costo de las horas extras:

$$\sum_{k=1}^{k} O_{(k,t)} y_{k,t} \quad (21)$$

Además, se debe agregar las restricciones para establecer la fracción de tiempo extra para todos los recursos k y tiempos t, y luego limitar las horas extras y la capacidad:

$$\sum_{i=1}^{i} U_{(i,k)}\, x_{i,t} \leq 1 + y_{k,t} \quad (22)$$

$$y_{k,t} \geq 0 \quad (23)$$

$$y_{k,t} \leq F_{(k,t)} \quad (24)$$

Otra característica que agregar a este tercer modelo es la de permitirle el inventario negativo. Para SKUs con demanda independiente, los plazos son el modelo correcto para aquellos SKUs que tienen la máxima prioridad, pero para el resto se puede usar una función de penalización para modelar el hecho de que la tardanza no necesariamente es un problema.

Se debe introducir como dato $A_{(i)}$, que es el costo de penalización por escasez de producto para responder a la demanda del SKU i. Para hacer uso de este dato de penalización, es necesario hacer un cambio significativo en la restricción de demanda. Entonces, en lugar de la ecuación (19), se debe usar:

$$I_{i,t(x,\delta)} \geq -\sum_{t=1}^{t} D_{(i,t)} \quad (24)$$

Esta restricción permite una posición de inventario negativo no mayor a la demanda acumulada del SKU i en el periodo t. Los artículos con posiciones de inventario negativo a menudo se denominan backorders, o pedidos pendientes.

Para construir una función objetivo que tenga en cuenta las cantidades de pedidos pendientes, se debe distinguir entre posiciones de inventario negativas y positivas:

I^- será igual a $-I$, si la macro $I_{i,t(x,\delta)} < 0$, y cero si no.

I^+ será igual a *I*, si la macro $I_{i,t(x,\delta)} > 0$, y cero si no.

Se debe incluir las siguientes restricciones para todo i y t:

$$I_{i,t}^{+} - I_{i,t}^{-} = I_{i,t(x,\delta)} \quad (25)$$

$$I_{i,t}^{+} \geq 0 \quad (26)$$

$$I_{i,t}^{-} \geq 0 \quad (27)$$

Con esto es posible agregar términos como los siguientes a la función objetivo:

$$\sum_{t=1}^{t} \sum_{i=1}^{i} [A_{(i)} I_{i,t}^{-} + H_{(i)} I_{i,t}^{+}] \quad (28)$$

Entonces, la función objetivo-basada en costos quedaría de la siguiente forma:

$$\sum_{t=1}^{t} [\sum_{i=1}^{i} (A_{(i)} I_{i,t}^{-} + H_{(i)} I_{i,t}^{+}) + C_{(i)} \delta_{i,t}) + \sum_{k=1}^{k} O_{(k,t)} y_{k,t}\ ] \quad (29)$$

Cuando se permiten backorders dentro de un modelo, se debe tener cuidado de que se consideren los efectos de fin de horizonte, puesto que podría ser óptimo para la computadora no producir algunos productos y simplemente incurrir en los costos de backorders [6].

Otra dificultad relacionada es que la solución óptima es que seguramente tendrá inventarios muy bajos o nulos para algunos periodos. El modelo desarrollado no proporciona ninguna razón para mantener un nivel determinado de inventario con tal de cumplir por lo menos con la demanda. Las excepciones serían que quede inventario debido a que se produjo algún lote mínimo cuya cantidad sea mayor a la demanda de uno o varios periodos siguientes.

Como no es razonable producir planes que mantengan cero inventarios, entonces se debe pensar en alguna modificación para desautorizar al modelo. Una técnica consiste en añadir restricciones que imponen condiciones de rango de inventario en cada periodo. El inventario debe ser razonable en varios aspectos tales como: capacidad, requerimiento de materiales, frescura, etc., por lo que la gerencia debe proporcionar el nivel de inventario deseado a manera de política, comúnmente llamado inventario operacional $SS_{(i)}$, el cual será un dato de entrada para cada SKU i y que se usará para restringir un intervalo de tolerancia:

$$(1 - IT) * SS_{(i)} \leq I_{i,t(x,\delta)} \leq (1 + IT) * SS_{(i)} \quad (30)$$

Donde *IT* es una fracción que se proporciona como dato para definir el rango de inventario.

Es razonable poder permitir backorders y al mismo tiempo planear mantener un inventario operacional [6]. Sin embargo, cuando se tienen backorders la restricción antes dada no aplica, por tanto, debe ser anulada a través de una variable binaria que active y/o desactive esta condición, de tal forma que valga 1 si $I_{i,t(x,\delta)} \geq 0$ (I^+) y 0 si no (I^-).

Nuevamente debe existir una segunda restricción de enlace en donde interactúe $M_{(i)}$, $I_{i,t}^{-}$ y la nueva variable binaria $e_{i,t}$. La restricción sería la ecuación (31). La tabla VI resume la interacción entre estas variables.

$$I_{i,t}^{-} \leq \left[1 - e_{(i,t)}\right] * M_{(i)} \quad (31)$$

TABLA VI

LÓGICA DE LA CONDICIÓN SI/ ENTONCES PARA $e_{i,t}$

SI	Entonces	
$\frac{I_{i,t}^{-}}{M_{(i)}}$	$(1-e_{i,t})=0$	$(1-e_{i,t})=1$
=0	SI	SI
>0	NO	SI

Según la tabla VI se tiene:

Si $I_{i,t}^{-}=0$, $e_{i,t}$ podrá tomar el valor de 0 o 1.

Si $I_{i,t}^{-}>0$, $e_{i,t}$ solo podrá tomar el valor de 0 para que $(1-e_{i,t})$ sea igual a 1.

Entonces la ecuación (30) queda:

$$(1-IT)*SS_{(i)}*\ e_{i,t}\leq I_{i,t}^{+}\leq(1+IT)*SS_{(i)}*e_{i,t} \quad (32)$$

Esto significa que cuando existen backorders ($I_{i,t}^{-}>0$), $e_{i,t}=0$, y por tanto la restricción se desactiva quedando como única opción que $I_{i,t}^{+}$ esté entre cero y cero, es decir $I_{i,t}^{+}=0$.

Finalmente se incluyen las restricciones de leche y materia grasa que le dan al modelo un rango en el cual moverse para ajustar su plan de producción de tal forma que la leche y la materia grasa quede balanceada en su requerimiento y generación, respectivamente. Para esto, se necesita de dos datos de entrada adicionales, los cuales se describen en la tabla VII.

TABLA VII

FACTOR LÁCTEO Y DE SÓLIDOS GRASOS

FL_i	Factor lácteo del SKU *i*
FSG_i	Factor sólidos grasos del SKU *i*

Se declaran dos variables que capturen el cálculo del volumen de leche y de materia grasa relacionado al plan de producción de $x_{i,t}$. Estas serán las variables a balancear a través de la definición de un límite superior e inferior como atributo para cada variable.

l_t: miles de litro de leche consumida en el periodo t

sg_t: kilos de grasa generados o consumidos en el periodo t

Donde:

$$l_t=\sum_{i=1}^{i}x_{i,t}*FL_{(i)} \quad (33)$$

$$l_t\geq 0 \quad (34)$$

$$sg_t=\sum_{i=1}^{i}x_{i,t}*FSG_{(i)} \quad (35)$$

Los atributos para las variables l_t y sg_t son los siguientes:

$$lim.inf\leq l_t\leq lim.sup \quad (36)$$

$$lim.inf\leq sg_t\leq lim.sup \quad (37)$$

El modelo completo denominado RCCP se presenta en las tablas VIII, IX, X y XI. El RCCP es un modelo de optimización de costos para la planificación de la producción ajustado a la capacidad.

D. *Implementación del Modelo en GAMS*

El despliegue del modelo matemático en GAMS [7] se detalla en el Apéndice A.

III. RESULTADOS

La validez de los resultados está relacionada con:

1) Cumplimiento de la demanda.
2) Permanencia del inventario dentro de bandas.
3) Respeto de la restricción de capacidad finita.
4) Cumplimiento de las restricciones de volumen de leche.
5) Balanceo de la generación de materia grasa.

TABLA VIII

DATOS DEL MODELO RCCP

i	*Número de SKU´s*
t	*Número de periodos*
k	*Número de recursos*
$II_{(i,0)}$	*Inventario inicial del SKU i*
$LS_{(i)}$	*Tamaño de lote del SKU i*
$H_{(i)}$	*Costo semanal de mantener una unidad del SKU i en inventario*
$C_{(i)}$	*Costo total de cambio de formato al SKU i*
$A_{(i)}$	*Costo de penalización por escasez del SKU i*
$FL_{(i)}$	*Factor lácteo del SKU i*
$FSG_{(i)}$	*Factor sólidos grasos del SKU i*
$M_{(i)}$	*Número grande para cada SKU i*
$SS_{(i)}$	*Inventario operacional del SKU i*
$D_{(i,t)}$	*Demanda independiente del SKU i en el periodo t*
$U_{(i,k)}$	*Fracción de tiempo del recurso k necesario para producir 1 unidad del SKU i*
$F_{(k,t)}$	*Máxima fracción de tiempo del recurso k que puede ser añadido en el periodo t*
$S_{(i,k)}$	*Fracción del recurso k usado para el cambio para el SKU i*
$O_{(k,t)}$	*Costo total de horas extras del recurso k en el periodo t*

TABLA IX

VARIABLES DEL MODELO RCCP

$x_{i,t}$	*Cantidad de producción del SKU i a iniciar en el periodo t*
$y_{k,t}$	*Fracción de horas extras del recurso k en el periodo t*
$\delta_{i,t}$	*Variable binaria para la restricción de enlace*
$I_{i,t}^{+}$	*Inventario esperado del SKU i en el periodo t*
$e_{i,t}$	*Variable binaria para la restricción de enlace 2*
$I_{i,t}^{-}$	*Inventario pendiente del SKU i en el periodo t*
l_t	*Miles de litro de leche consumida en el periodo t*
sg_t	*Kilos de grasa generados o consumidos en el periodo t*

TABLA X
MODELO MATEMÁTICO RCCP

Minimizar:

$$\sum_{t=1}^{t}[\sum_{i=1}^{i}(A_{(i)}I_{i,t}^{-} + H_{(i)}I_{i,t}^{+}) + C_{(i)}\delta_{i,t}) + \sum_{k=1}^{k} O_{(k,t)}y_{k,t}]$$

Sujeto a:

$$I_{i,t(x,\delta)} + \sum_{t=1}^{t} D_{(i,t)} \geq 0$$

$$\sum_{i=1}^{i}[U_{(i,k)}\, x_{i,t} + S_{(i,k)}\delta_{i,t} \leq 1 + y_{k,t}$$

$$x_{i,t} - \delta_{i,t} * LS_{(i)} \geq 0$$

$$\delta_{i,t} \geq \frac{x_{i,t}}{M_{(i)}}$$

$$I_{i,t}^{-} \leq [1 - e_{(i,t)}] * M_{(i)}$$

$$l_t = \sum_{i=1}^{i} x_{i,t} * FL_{(i)}$$

$$sg_t = \sum_{i=1}^{i} x_{i,t} * FSG_{(i)}$$

$$y_{k,t} \leq F_{(k,t)}$$

$$\delta_{i,t} \in \{1,0\}$$

$$e_{i,t} \in \{1,0\}$$

$$x_{i,t} \geq 0$$

$$y_{k,t} \geq 0$$

$$l_t \geq 0$$

$$I_{i,t}^{+} \geq 0$$

$$I_{i,t}^{-} \geq 0$$

$$I_{i,t}^{+} - I_{i,t}^{-} = I_{i,t(x,\delta)}$$

$$I_{i,t}^{+} \leq (1 + IT) * SS_{(i)} * e_{i,t}$$

$$I_{i,t}^{+} \geq (1 - IT) * SS_{(i)} * e_{i,t}$$

$$lim.inf \leq l_t \leq lim.sup$$

$$lim.inf \leq sg_t \leq lim.sup$$

TABLA XI
MACRO DE INVENTARIO DEL MODELO RCCP

Macro:

$$I_{i,t(x,\delta)} \equiv \sum_{t=1}^{T} x_{i,t} + II_{(i,0)} - \sum_{t=1}^{t} D_{(i,t)}$$

La validación del cumplimiento de la demanda se logra a través de una reconciliación del inventario. Si para cada producto, la suma entre el inventario inicial y la producción es mayor o igual que la demanda, entonces al final del horizonte de planificación se debe contar con un inventario positivo o cero. El modelo demuestra que la mayoría de los productos tienen un inventario de valor positivo en el periodo $t13$, y apenas $i2$ tiene inventario negativo o backorders, lo cual según el modelo es una solución posible. Pero de forma global, el ejercicio de planificación mantiene un sobrante de inventario al final del ejercicio de planificación.

La restricción que asegura mantener el inventario dentro de bandas, genera la única inviabilidad del modelo, y por esta razón se realizaron múltiples corridas de prueba y error, haciendo lo siguiente:

1) Desactivar la restricción de capacidad; es decir, el modelo tiene capacidad infinita.
2) Desactivar la restricción de tamaño de lote; es decir, el modelo puede producir en lotes pequeños.
3) Reducir los tamaños de lotes como dato de entrada.
4) Desactivar la restricción de banda inferior de inventario; es decir, el modelo no tiene piso mínimo de inventario.

Las ejecuciones de estas alternativas sirvieron para determinar que el modelo funciona correctamente y que no es posible encontrar una solución que permita mantener siempre el inventario esperado entre bandas con la capacidad finita otorgada al modelo. La inviabilidad se elimina cuando se amplía el rango o límite inferior.

La corrida del modelo muestra los inventarios esperados con una banda inferior ampliada al 80%, y con un código de colores que permite validar visualmente el resultad.

Existen eventos en donde el inventario es cero. Esto se debe a falta de capacidad. Los inventarios negativos o backorders representan un 6,1% de incidencia en el ejercicio.

Finalmente, el volumen de leche y la generación de materia grasa, van de la mano. La Fig. 2 muestra la tendencia de la demanda, producción y su respectiva curva de inventario en toneladas y la Fig. 3 muestra las curvas del requerimiento de leche y excedente de crema que ofrece el modelo.

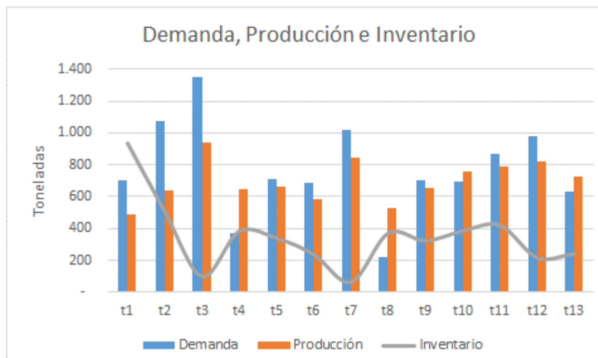

Fig. 2 Gráfico de demanda, producción e inventario

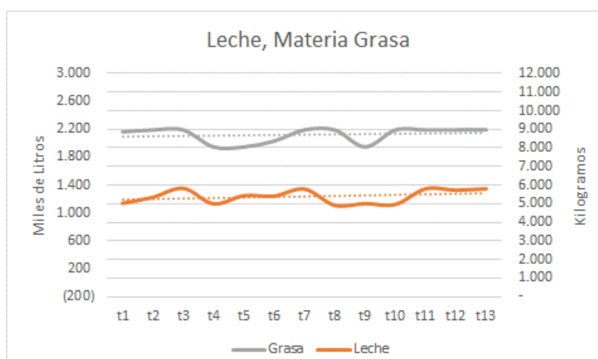

Fig. 3 Balance de leche y materia grasa

Es evidente que el modelo busca cumplir la demanda, al mismo tiempo que produce en cantidades que mantengan un mínimo de variación en los volúmenes de requerimiento y generación de la leche y la materia grasa. La producción no es constante, ni busca perseguir a la demanda, lo cual es correcto para este tipo de negocios donde su materia prima de mayor valor e importancia en volumen es la leche.

En resumen, el modelo de planificación se alimentó con los siguientes datos de entrada (global):

Inventario inicial: 1429,7 Tn

Demanda: 12390,7 Tn

Requerimiento de leche por demanda: 1340 mil litros semanales

A partir de esto, los resultados que ofrece el modelo son:

Producción: 11481,8 Ton

Inventario Final: 520,8 Ton

Requerimiento de leche por producción: 1237,3 mil litros semanales (± 7,9%).

Generación materia grasa: 8758,4 kg semanales (± 4,4%).

IV. Conclusiones

Se desarrolló un modelo matemático ejecutable en GAMS para un plan de fabricación por producto con un horizonte a 13 semanas, que asegure el cumplimiento con la demanda proyectada; el mantenimiento de un nivel de inventario dentro de una banda con respecto a un inventario operacional predefinido; el cumplimiento con las restricciones de volumen de leche; y, el balanceo semanal de la generación de materia grasa.

El cálculo del inventario operacional y de lotes mínimos de producción, toma en cuenta variables como: demanda, exactitud del suministro y/o restricciones duras como el tamaño de un silo, pero no toma en cuenta su relación con la capacidad. Con este modelo, se pudo evidenciar que alcanzar una solución viable no es factible a menos que se relaje algunas de las restricciones.

Tanto las variables como los datos del modelo están planteados de forma genérica de tal forma que sirva para varias industrias de similar naturaleza.

Para cualquier SKU, no se puede tener tamaños de lote mínimo por encima de la política de inventario.

Los softwares ERP que usan la mayoría de empresas, no son amigables con los procesos de planificación debido particularidad de cada industria, por esta razón las empresas terminan implementando módulos especializados de planificación que nunca terminan de ajustarse a su realidad de negocio.

V. Recomendaciones

Utilizar los convenios actuales entre la Universidad y las empresas del sector fabril para arrancar con iniciativas de aplicación de este modelo.

Continuar con este tipo de investigación y analizar el nivel de alineación (o desalineación) que existe entre las políticas de inventario y los lotes mínimos en una muestra de un sector industrial.

Desarrollar iniciativas y estrategias de comunicación de las oportunidades que tienen las industrias en términos de costos y como el sector académico universitario puede aportar a la mejora de los costos de producción.

Referencias

[1] R. García, "Cambios en los hábitos de consumo y su implicación en el turismo," *Newsletter/Boletín de noticias*, 2015.

[2] I. E. de N. INEN, "Norma técnica ecuatoriana NTE INEN 9:2012 Leche cruda. Requisitos." INEN, 2012.

[3] J. Heizer and B. Render, *Dirección de la producción y de operaciones Desiciones estratégicas*. 2007.

[4] APICS, *APICS: Operations Management Body of Knowledge Framework*. 2011.

[5] E. Castillo, A. J. Conejo, P. Pedregal, R. García, and N. Alguacil, "Programación no lineal," *Formulación y Resolución Model. Program. Matemática en Ing. y Cienc.*, pp. 47–72, 2002.

[6] S. Voss and D. L. Woodruff, *Introduction to Computational Optimization Models for Production Planning in a Supply Chain*, Springer. 2005.

[7] J. Marín, *Introducción al Lenguaje GAMS*. 2000.

APÉNDICE A
DESPLIEGUE DEL MODELO MATEMÁTICO EN GAMS

```
Binary Variable
d(i,t) 1 si hay producción del SKU i en el periodo t y cero si no
e(i,t) 1 si iplus es mayor que cero y cero sino;

Positive Variable
x(i,t) cantidad a producir del SKU i en el periodo t
y(k,t) fracción de horas extras de la máquina k en el periodo t
l(t) miles de litro de leche consumida en el periodo t
iplus(i,t) cantidad de inventario positivo del SKU i en el periodo t
iminus(i,t) cantidad de inventario negativo (backorder) del SKU i
 en el periodo t;

Variable
Z función Objetivo
sg(t) kilos de grasa generados o consumidos en el periodo t
inv(i,t) inventario plan esperado  al final del periodo i;

Equation
obj función objetivo
dem(i,t) restricción de demanda (permite backorders)
cap(t,k) restricción de capacidad
size(i,t) restricción de tamaño de lote
link(i,t) restricción de enlace
link2(i,t) restricción de enlace para iplus
milk(t) consumo total de leche
cream(t) generación consumo de sólidos grasos
invplan(i,t) macro del inventario plan esperado
invsplit(i,t) restricción de posición de inventario positivo y negativo
iplusup(i,t) atributo de límite superior para iplus
ipluslo(i,t,k) atributo de límite inferior para iplus;

obj.. Z=E=sum((i,t),A(i)*iminus(i,t)+H(i)*iplus(i,t)+C(i)*d(i,t))+sum((k,t),O(k,t)*y(k,t));
dem(i,t).. inv(i,t)+sum(tp$(ord(tp)<=ord(t)),demand(i,tp))=G=0;
cap(t,k).. sum(i,U(i,k)*x(i,t)+S(i,k)*d(i,t))=L=1+y(k,t);
size(i,t).. x(i,t)-d(i,t)*LS(i)=G=0;
link(i,t).. x(i,t)=L=d(i,t)*M(i);
link2(i,t).. iminus(i,t)=L=(1-e(i,t))*M(i);
milk(t).. l(t)=E=sum(i,x(i,t)*FL(i));
cream(t).. sg(t)=E=sum(i,x(i,t)*FSG(i));
invplan(i,t).. inv(i,t)=E=sum(tp$(ord(tp)<=ord(t)),x(i,tp))+II(i)-sum(tp$(ord(tp)<=ord(t)),
demand(i,tp));
invsplit(i,t).. iplus(i,t)-iminus(i,t)=E=inv(i,t);
iplusup(i,t).. iplus(i,t)=L=(1.4)*SS(i)*e(i,t);
ipluslo(i,t,k).. iplus(i,t)=G=(0.2)*SS(i)*e(i,t);

*Atributos
y.up(k,t)=F(k,t);
l.lo(t)=1163;
l.up(t)=1285;
sg.lo(t)=8248;
sg.up(t)=9164;
```