

Kinematic Analysis of the Parallel Robot of Type 3UPE-RPU

Rolando Morales¹, Daysi Baño¹, Iván Zambrano¹, Andrés Rosales¹

¹Escuela Politécnica Nacional, Ecuador, william.morales@epn.edu.ec, daysi.banom@epn.edu.ec, ivan.zambrano@epn.edu.ec; andres.rosales@epn.edu.ec

Abstract— *This ARTICLE aims to design and build a robot that is able to assist with the rehabilitation treatments of the lower limb. The robot has a mobility of 4 degrees of freedom, two movements of translation and two of rotation, these degrees of freedom are considered based on the flexo-extension movements and internal and external rotation of the lower limb. In the kinematic analysis, the developed equations are characterized by studying the kinematic chain of each element of the robot (arms and platform) separately, through the Denavit & Hartenberg methods and the Euler rotation angles respectively, describing the positions which adopt the joints of each arm separately, and then establish the relationships between each of them. The expressions describing the velocity and acceleration of each element of the robot are derived from the position equations founded. For the validation of results a program is presented which is able to simulate the movements of the robot and show the relation between the positions of the articulations of the arms of the robot and the position of the platform in the space; the results founded through this program show that there is a negligible difference between the positions of the vertices of the platform and the ends of the arms of the robot, when making any movement.*

Keywords- *Kinematics, Robotics, Simulation*

Digital Object Identifier (DOI):<http://dx.doi.org/10.18687/LACCEI2018.1.1.451>
ISBN: 978-0-9993443-1-6
ISSN: 2414-6390

Análisis Cinemático de un Robot Paralelo de Tipología 3UPE-RPU

Rolando Morales¹, Daysi Baño¹, Iván Zambrano¹, Andrés Rosales¹

¹Escuela Politécnica Nacional, Ecuador, william.morales@epn.edu.ec, daysi.banom@epn.edu.ec, ivan.zambrano@epn.edu.ec, andres.rosales@epn.edu.ec

Resumen— En este artículo se presenta el análisis cinemático de un robot paralelo de tipología 3UPE-RPU utilizado para la rehabilitación del miembro inferior de un ser humano. El robot cuenta con una movilidad de 4 grados de libertad, y es capaz de asistir en movimientos de flexo-extensión y, rotación interna y externa del miembro inferior. En el análisis cinemático, las ecuaciones desarrolladas se caracterizan por permitir el estudio de la cadena cinemática de cada brazo del robot y la plataforma de forma separada, a través de los métodos de Denavit & Hartenberg y las matrices de rotación de Euler, respectivamente, describiendo las posiciones que adoptan las articulaciones de cada brazo por separado, para luego establecer las relaciones entre cada uno de ellos. Para la validación de los resultados, se presenta un programa capaz de simular los movimientos del robot y mostrar la relación entre las posiciones de las articulaciones de los brazos del robot y la posición de la plataforma en el espacio.

Keywords—Cinemática, Parámetros de Movimiento, Robótica, Tipología 3UPE-RPU.

I. INTRODUCCIÓN

Claras ventajas como mayor capacidad de carga, menor inercia en sus miembros móviles, mayor rigidez estructural, mayor precisión en sus movimientos y facilidad de control [1], han expandido las áreas de aplicación de los robots paralelos a lo largo de los años. El primer mecanismo en presentar las características de un robot paralelo fue el “Position Controlling Apparatus” [2], empleado para pintar carrocerías de autos, pero no fue hasta los años 60 donde se explotó las ventajas que estos robots ofrecían tanto en la industria [3], como en la aeronáutica [4].

En los últimos años los robots paralelos empezaron a ser empleados en el campo de la medicina, donde se han desarrollado varios proyectos en el área de la rehabilitación del miembro inferior [5], [6] los cuales emplean robots paralelos de 3 y 6 grados de libertad respectivamente, que recrean rutinas de movimientos para este proceso de rehabilitación. El desarrollo de estos modelos ha llegado hasta la construcción de prototipos y la realización de pruebas, las cuales según sus autores mostraron resultados positivos.

El proyecto que sirve de base a este estudio, tiene por objetivo el desarrollo de un robot para rehabilitación del miembro inferior, a través del empleo de un robot paralelo de tipología 3UPE-RPU. El proyecto cuenta con un avance realizado a la cinemática del robot [7], el cuál contribuyó con un primer modelo matemático capaz de describir las posiciones, pero que presentó problemas de convergencia de resultados para ciertos valores de entrada y cargas de cálculo elevadas al resolver el sistema de ecuaciones en software matemático.

Las necesidades para avanzar con un correcto estudio de la dinámica implicada en el robot y el posterior control del mismo, dependen del desarrollo de un modelo matemático capaz de describir las velocidades y aceleraciones asociadas a los movimientos del robot.

El presente estudio desarrolla un modelo matemático capaz de describir las posiciones, velocidades y aceleraciones de las articulaciones de los brazos del robot, empleando cinemática inversa, mientras que con cinemática directa se define la posición de los vértices de la plataforma. Este análisis cinemático, emplea el método de Denavit & Hartenberg para estudiar los brazos y los ángulos de rotación de Euler para definir el movimiento de la plataforma.

A. Robot 3UPE-RPU

El robot 3UPE-RPU consta de dos plataformas de forma triangular: una plataforma base y otra móvil; éstas están conectadas por cada vértice a través de un brazo UPE (Universal, Prismático, Esférico), y sus circuncentros respectivos a través de un brazo RPU (Rotacional, Prismático, Universal), como se muestra en la Fig. 1. Cuenta con una movilidad de 4 grados de libertad, 2 movimientos de traslación y 2 movimientos de rotación, como se muestra en la Fig. 2.

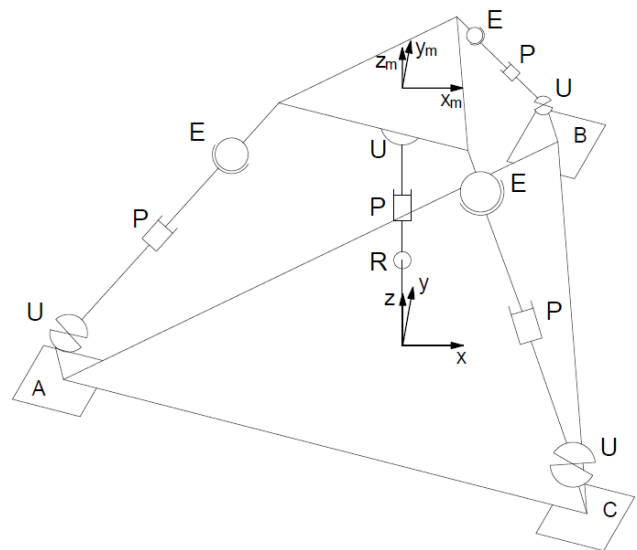


Fig. 1 Robot paralelo 3UPE-RPU.

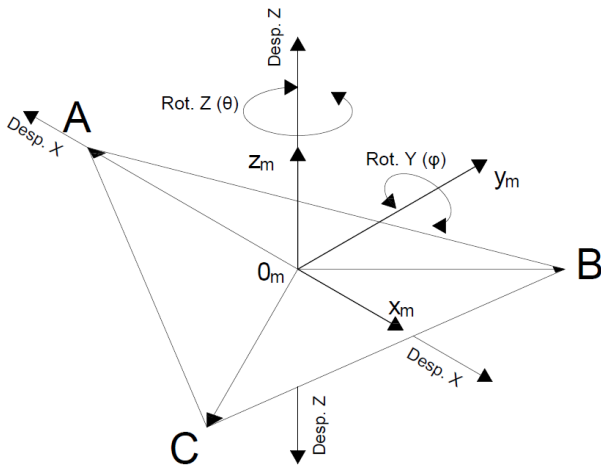


Fig. 2 Movimientos de la plataforma móvil: traslación en x y z , rotación alrededor de z (θ) y alrededor de y (ϕ).

Existen muchos diseños de robots paralelos desarrollados para la rehabilitación del miembro inferior del ser humano, por ejemplo, existe el modelo de tipología 3-PRE de 3 grados de libertad [5], también se encuentra un modelo 6-UPU de 6 grados de libertad, que presenta la forma de un antiprisma triangular [6].

La diferencia de la movilidad (2T2R) del modelo 3UPE-RPU con los anteriormente expuestos, resulta en una mejora de la emulación de movimientos realizados en programas de rehabilitación; además su configuración con brazo central proporciona mayor rigidez y capacidad de carga [8].

B. Análisis cinemático

El análisis cinemático en robótica consiste en el estudio de los movimientos permisibles por los grados de libertad que presenta un robot, determinando ecuaciones de posición, velocidad y aceleración, sin considerar las causas que lo producen.

Para el análisis cinemático, se han desarrollado diferentes métodos como: el Screw Theory [9], el método de Denavit & Hartenberg (D&H) [10] y otros que emplean ecuaciones de geometría plana y espacial [11].

II. METODOLOGÍA

Para el análisis cinemático se emplea el método D&H, para esto se considera cada brazo como una cadena cinemática independiente. La plataforma móvil no se encuentra exenta de este análisis, la traslación y rotación de ésta son analizadas entre los sistemas de coordenadas absoluto (X, Y, Z) y móvil (X_m, Y_m, Z_m).

A. Análisis de brazos UPE

Para determinar las ecuaciones que definan el movimiento de la plataforma, se toma a uno de los brazos UPE para su análisis. Estos brazos se componen de una articulación universal en su base, la cual se la analiza como dos pares rotatorios con ejes de rotación intersecados a 90° ; a continuación, se encuentra la articulación prismática, la cual en su extremo se conecta a la articulación esférica. La articulación

esférica de los brazos UPE actúa como punto de acople con la plataforma, por lo que se la excluye del análisis. Tomando ventaja de la posición de los brazos UPE en la plataforma, el análisis se realiza solo a uno de ellos, en este caso al brazo A como se muestra en la Fig. 3.

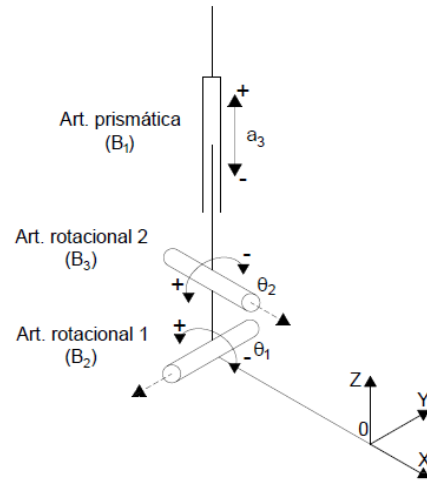


Fig. 4 Esquema del brazo A (UPE), movimientos y variables asociadas

Los parámetros de D&H resultantes de este análisis se muestran en la Tabla I.

Tabla I Parámetros D&H del brazo A

d	θ	a	α
-	-	-R	90°
-	θ_1+90°	-	90°
-	θ_2	a_3	-

Para extrapolar los resultados de los parámetros D&H a todos los brazos UPE, se considera a los brazos restantes (B, C) como una rotación del primer brazo (A) alrededor del eje Z de la base, para esto es necesario agregar una variable inicial que define dicho ángulo de rotación (β) a la que se encuentran los brazos B y C, respecto al brazo analizado. El valor a tomarse para β en cada caso, se muestra a continuación en la Tabla II:

Tabla II Ángulo de rotación β correspondiente a los brazos UPE

Brazo	β
A	0°
B	-120°
C	120°

Al considerar esta rotación, los parámetros D&H resultantes para los brazos UPE se muestran en la Tabla III.

Tabla III Parámetros D&H para los brazos UPE

d	θ	a	α
-	β	-R	90°
-	θ_1+90°	-	90°
-	θ_2	a_3	-

A partir de los resultados expuestos en la Tabla III, se determina la matriz homogénea para los brazos UPE. Para hallar las ecuaciones de posición del extremo del brazo a partir de la matriz del brazo, es necesario multiplicarlo por las coordenadas del punto 0, punto del cual se parte el análisis D&H, como se indica en (1):

$$[P_{UPE}] = \begin{bmatrix} U_x \\ U_y \\ U_z \\ 1 \end{bmatrix} = [UPE] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

donde: P_{UPE} = Posición del extremo del brazo (U_x, U_y, U_z)
 UPE = Matriz homogénea del brazo UPE.

Expresando el resultado de (1) en forma de ecuaciones, se obtiene:

$$U_x = -Rc\beta + B_1s\beta sB_3 - B_1c\beta sB_2cB_3 \quad (2)$$

$$U_y = -Rs\beta - B_1c\beta sB_3 - B_1s\beta sB_2cB_3 \quad (3)$$

$$U_z = B_1cB_2cB_3 \quad (4)$$

Los valores de B_1, B_2, B_3 corresponden a las variables de las articulaciones del brazo UPE, de acuerdo a como se muestra en la Fig. 4.

Al derivar (5), (6), y (7) respecto a las variables de las articulaciones, se obtiene las expresiones que describen la velocidad y aceleración del extremo del brazo:

$$\dot{U}_x = (s\beta sB_3 - c\beta sB_2cB_3)\dot{B}_1 - (B_1c\beta cB_2cB_3)\dot{B}_2 + (B_1s\beta cB_3 + B_1c\beta sB_2sB_3)\dot{B}_3 \quad (8)$$

$$\dot{U}_y = -(c\beta sB_3 + s\beta sB_2cB_3)\dot{B}_1 - (B_1s\beta cB_2cB_3)\dot{B}_2 - (B_1c\beta cB_3 - B_1s\beta sB_2sB_3)\dot{B}_3 \quad (9)$$

$$\dot{U}_z = (cB_2cB_3)\dot{B}_1 - (B_1sB_2cB_3)\dot{B}_2 - (B_1cB_2sB_3)\dot{B}_3 \quad (10)$$

$$\ddot{U}_x = (s\beta sB_3 - c\beta sB_2cB_3)\ddot{B}_1 - (B_1c\beta cB_2cB_3)\ddot{B}_2 + (B_1s\beta cB_3 + B_1c\beta sB_2sB_3)\ddot{B}_3 + \Phi_1 \quad (11)$$

$$\ddot{U}_y = -(c\beta sB_3 + s\beta sB_2cB_3)\ddot{B}_1 - (B_1s\beta cB_2cB_3)\ddot{B}_2 - (B_1c\beta cB_3 - B_1s\beta sB_2sB_3)\ddot{B}_3 + \Phi_2 \quad (12)$$

$$\ddot{U}_z = (cB_2cB_3)\ddot{B}_1 - (B_1sB_2cB_3)\ddot{B}_2 - (B_1cB_2sB_3)\ddot{B}_3 + \Phi_3. \quad (13)$$

Ordenando las expresiones de velocidad (8)(9)(10), de forma matricial se obtiene el jacobiano de los brazos UPE:

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_x \\ \dot{U}_y \\ \dot{U}_z \end{bmatrix} = [J_{UPE}] \begin{bmatrix} \dot{B}_1 \\ \dot{B}_2 \\ \dot{B}_3 \end{bmatrix}. \quad (14)$$

B. Análisis de plataforma móvil

Para el análisis de la plataforma, se elabora la matriz homogénea de la plataforma de acuerdo a los movimientos mostrados en la Fig. 2.

$$[PM] = \begin{bmatrix} c\varphi c\theta & -c\varphi s\theta & s\varphi & x \\ s\theta & c\theta & 0 & 0 \\ -c\varphi c\theta & s\varphi s\theta & c\varphi & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (15)$$

Donde: PM = Matriz homogénea de la plataforma.

x, z, φ, θ = Variables asociadas a los movimientos de la plataforma.

c, s = coseno y seno, respectivamente.

Una vez definida la matriz homogénea de la plataforma móvil, es necesario definir un vector que permita el análisis de los vértices de la plataforma, ya que en éstos son puntos en común, al analizar la plataforma y los brazos de forma simultánea.

Para conseguir esta expresión, se considera de forma general un vector que permita ubicar los vértices desde un sistema de coordenadas relativo (X_m, Y_m, Z_m) ubicado en el circuncentro de la plataforma. De esta forma dicho vector quedará definido por un módulo equivalente al radio (R_m) del círculo circunscrito a la plataforma y un ángulo (α) que indique la rotación alrededor del eje Z_m .

$$V = \{A, B, C\} \leftrightarrow \alpha = \{180, 60, -60\} \quad (16)$$

De forma general, se tiene que, para todo vértice (V) de la plataforma, se define un ángulo (α), lo que origina:

$$\overrightarrow{0_m V} = \begin{bmatrix} R_m c\alpha \\ R_m s\alpha \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (17)$$

Al multiplicar la matriz homogénea de la plataforma (15) con el vector posición de los vértices (17), se consigue el sistema de ecuaciones que expresa la posición de cualquiera de los vértices de la plataforma.

$$[P_{PM}] = \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \\ 1 \end{bmatrix} = [PM] \begin{bmatrix} R_m c\alpha \\ R_m s\alpha \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (18)$$

Donde: P_{PM} = Posición de los vértices (V_x, V_y, V_z)

PM = Matriz homogénea del brazo UPE

Expresando el resultado de la expresión anterior en forma de ecuaciones, se obtiene:

$$V_x = R_m c\alpha c\varphi c\theta - R_m s\alpha c\varphi s\theta + x \quad (19)$$

$$V_y = R_m c\alpha s\theta + R_m s\alpha c\theta \quad (20)$$

$$V_z = -R_m c\alpha s\varphi c\theta + R_m s\alpha s\varphi s\theta + z \quad (21)$$

A partir de las ecuaciones anteriores, se deriva respecto a las variables de movimiento de la plataforma (x, z, φ, θ) para hallar las expresiones correspondientes a velocidad y aceleración de los vértices de la plataforma:

$$\dot{V}_x = -(R_m c \alpha s \varphi c \theta - R_m s \alpha s \varphi s \theta) \dot{\varphi} - (R_m c \alpha c \varphi s \theta + R_m s \alpha c \varphi c \theta) \dot{\theta} + \dot{x} \quad (22)$$

$$\dot{V}_y = (R_m c \alpha c \theta - R_m s \alpha s \theta) \dot{\theta} \quad (23)$$

$$\dot{V}_z = -(R_m c \alpha c \varphi c \theta - R_m s \alpha c \varphi s \theta) \dot{\varphi} + (R_m c \alpha s \varphi s \theta + R_m s \alpha s \varphi c \theta) \dot{\theta} + \dot{z} \quad (24)$$

$$\ddot{V}_x = -(R_m c \alpha s \varphi c \theta - R_m s \alpha s \varphi s \theta) \ddot{\varphi} - (R_m c \alpha c \varphi s \theta + R_m s \alpha c \varphi c \theta) \ddot{\theta} + \ddot{x} + \Phi_4 \quad (25)$$

$$\ddot{V}_y = (R_m c \alpha c \theta - R_m s \alpha s \theta) \ddot{\theta} + \Phi_5 \quad (26)$$

$$\ddot{V}_z = -(R_m c \alpha c \varphi c \theta - R_m s \alpha c \varphi s \theta) \ddot{\varphi} + (R_m c \alpha s \varphi s \theta + R_m s \alpha s \varphi c \theta) \ddot{\theta} + \ddot{z} + \Phi_6 \quad (27)$$

C. Análisis del brazo RPU

En la Fig. 5 se muestra el análisis que se realiza al brazo RPU, a diferencia de los anteriores elementos analizados, se centra más en las restricciones que el brazo RPU otorga al sistema, que en la movilidad que este tiene.

En la base del brazo RPU se encuentra la articulación rotacional con su eje de rotación alineado con el eje Y de la base, de esta manera el movimiento del brazo se restringe al plano XZ. Sobre la articulación rotacional, se ubica la articulación prismática, está permite la extensión del brazo; a continuación, la articulación universal se encarga del acople entre el brazo y la plataforma. La articulación universal al ubicarse inmediatamente bajo el circuncentro (0_m) de la plataforma, proporciona un eje de rotación perpendicular a la superficie de la plataforma y otro eje de rotación paralelo al eje Y_m , restringiendo así la rotación sobre el eje X_m .

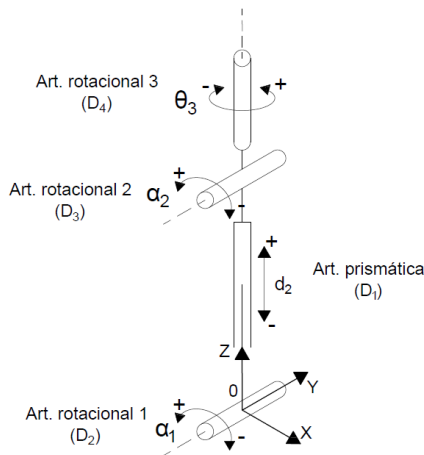


Fig. 5 Esquema del brazo RPU, movimientos y variables asociadas.

Para este caso en particular, el análisis cinemático se realiza a través de cinemática inversa, asumiendo que la posición del

punto 0_m corresponde a la posición del extremo del brazo, obteniéndose:

$$x = D_1 s D_2 \quad (28)$$

$$z = D_1 c D_2 \quad (29)$$

$$\varphi = D_2 + D_3 \quad (30)$$

$$\theta = D_4 \quad (31)$$

Los valores D_1, D_2, D_3, D_4 corresponden a las variables asignadas a las articulaciones del brazo. A partir de las expresiones anteriores, se obtiene las ecuaciones de velocidad y aceleración derivando respecto a las variables de las articulaciones.

$$\dot{x} = s D_2 \dot{D}_1 + D_1 c D_2 \dot{D}_2 \quad (32)$$

$$\dot{z} = c D_2 \dot{D}_1 - D_1 s D_2 \dot{D}_2 \quad (33)$$

$$\dot{\varphi} = \dot{D}_2 + \dot{D}_3 \quad (34)$$

$$\dot{\theta} = \dot{D}_4 \quad (35)$$

$$\ddot{x} = s D_2 \ddot{D}_1 + D_1 c D_2 \ddot{D}_2 + 2 c D_2 \dot{D}_1 \dot{D}_2 - D_1 s D_2 \dot{D}_2^2 \quad (36)$$

$$\ddot{z} = c D_2 \ddot{D}_1 - D_1 s D_2 \ddot{D}_2 - 2 s D_2 \dot{D}_1 \dot{D}_2 - D_1 c D_2 \dot{D}_2^2 \quad (37)$$

$$\ddot{\varphi} = \ddot{D}_2 + \ddot{D}_3 \quad (38)$$

$$\ddot{\theta} = \ddot{D}_4 \quad (39)$$

III. VALIDACIÓN DE RESULTADOS

Para validar los resultados obtenidos, se calcula a través de un software matemático dos ejemplos de cálculo, en el cual se analiza los casos en que la plataforma se encuentra en reposo y en movimiento.

A. Caso en reposo

Para este ejemplo se ingresa los datos de posición de la plataforma mostrados en la Tabla IV.

Tabla IV: Datos de entrada para el ejemplo en reposo

Variable	Valor
x	166.7 [mm]
z	250 [mm]
φ	0°
θ	0°

La Fig. 6 muestra un esquema con la posición indicada.

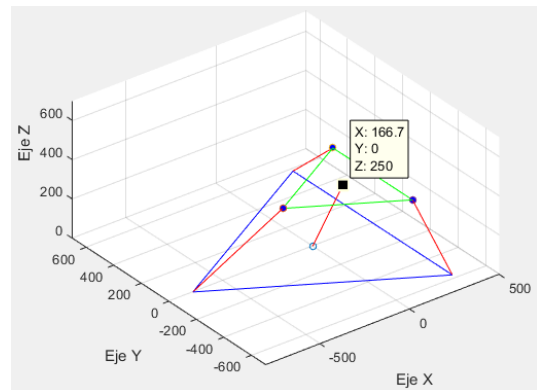


Fig. 6 Esquema del robot paralelo en la posición indicada para el ejemplo en reposo.

En la Tabla V se obtiene la posición de las articulaciones de los brazos del robot con la plataforma en la posición indicada.

Tabla V: Posición de articulaciones

Articulación	Brazos UPE			Brazo RPU
	A	B	C	
Prismática [mm]	559.0	381.9	381.9	300.5
1ra rotacional [°]	-63.4	-45.0	-45.0	33.7
2da rotacional [°]	0	-22.2	22.2	-33.7
3ra rotacional [°]	-	-	-	0

B. Caso en movimiento

Para este caso se emplea como condición inicial el punto especificado en el literal anterior, como condición final se tienen los valores descritos en la Tabla VI.

Tabla VI: Condición final para el ejemplo en movimiento

Variable	Valor
X	-333 [mm]
Z	250 [mm]
Φ	0°
Θ	0°

Cabe recalcar que el movimiento realizado corresponde a un desplazamiento horizontal a velocidad constante de 10 [mm/s]. En la Fig. 7 se observa el esquema de la posición final de la plataforma.

En este caso, los resultados obtenidos se muestran en las siguientes gráficas de la Fig. 8, las cuales detallan la posición de cada articulación de los brazos del robot en función de la posición de la plataforma.

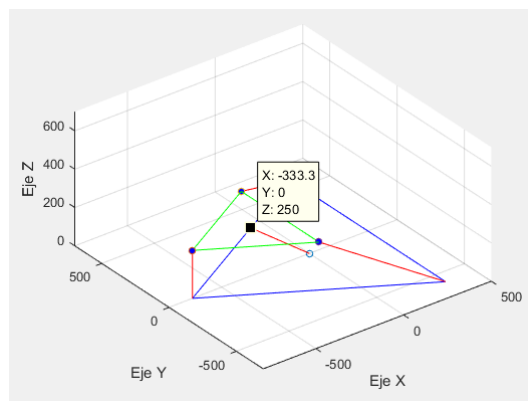


Fig. 7 Posición final de la plataforma

IV. CONCLUSIONES

Los resultados muestran curvas suaves, sin discontinuidades, ni puntos de inflexión pronunciados, analizándolas más a profundidad se puede constatar que las articulaciones se están comportando de la manera esperada, por lo que, a primera vista se puede afirmar a estos resultados como válidos.

Al estudiar el robot paralelo como un solo sistema se observa que cualquier elemento, excluyendo la base, puede ser tomado como punto de partida para el análisis cinemático, pero al hacer esto se provoca que los elementos restantes pasen a ser dependientes del primero. Esto se traduce a un empleo de modelos cinemáticos directo e indirecto para el elemento principal y sus dependientes, respectivamente.

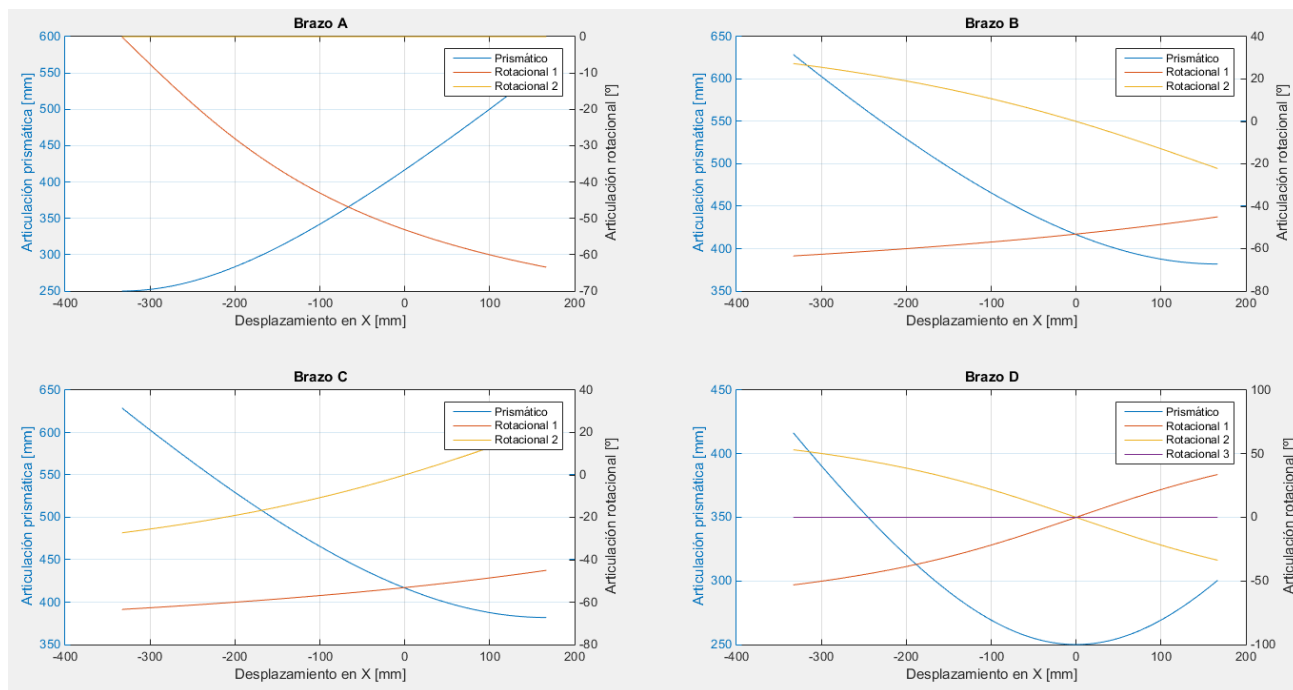


Fig. 8 Gráficas de relación entre el movimiento de la plataforma y el de las articulaciones de los brazos

REFERENCIAS

- [1] Y. D. Patel and P. M. George, "Parallel Manipulators Applications—A Survey," *Mod. Mech. Eng.*, vol. 2, no. 3, pp. 57–64, Aug. 2012.
- [2] W. L. V. Pollard, "Position Controlling Apparatus," 2286571, 1942.
- [3] V. E. Gough and S. G. Whitehall, "Universal Tyre Test Machine," in *9th International Congress FISITA*, 1962, pp. 117–137.
- [4] D. Stewart, "A platform with six degrees of freedom," *Proc. Inst. Mech. Eng.*, vol. 180, no. 1965, pp. 371–386, Jun. 1965.
- [5] F. J. Abu-Dakk, A. Valera, J. A. Escalera, M. Vallés, V. Mata, and M. Abderrahim, "Trajectory Adaptation and Learning for Ankle Rehabilitation Using a 3-PRS Parallel Robot," 2015, pp. 483–494.
- [6] A. Rastegarpanah, M. Saadat, and A. Borboni, "Parallel Robot for Lower Limb Rehabilitation Exercises," *Appl. Bionics Biomech.*, vol. 2016, pp. 1–10, 2016.
- [7] A. Fernández and L. Sotomayor, "Análisis cinemático inverso y directo del robot paralelo," Escuela Politécnica Nacional, Quito, 2016.
- [8] P. Araujo-Gómez, M. Díaz-Rodríguez, V. Mata, A. Valera, and A. Page, "Design of a 3-UPS-RPU Parallel Robot for Knee Diagnosis and Rehabilitation," 2016, pp. 303–310.
- [9] X. Kong and C. M. Gosselin, "Type Synthesis of 3-DOF PPR-Equivalent Parallel Manipulators Based on Screw Theory and the Concept of Virtual Chain," *J. Mech. Des.*, vol. 127, no. 6, p. 1113, 2005.
- [10] R. Di Gregorio and V. Parenti Castelli, "A Translational 3-DOF Parallel Manipulator," in *Advances in Robot Kinematics: Analysis and Control*, J. Lenarčič and M. L. Husty, Eds. Dordrecht: Springer Netherlands, 1998, pp. 49–58.
- [11] B. Siciliano, "A study on the kinematics of a class of parallel manipulators," in *Advances in Robot Kinematics: Analysis and Control*, J. Lenarčič and M. L. Husty, Eds. Dordrecht: Springer Netherlands, 1998, pp. 29–38.

APÉNDICE

Términos en ecuaciones de aceleración

$$\begin{aligned}\Phi_1 = & -2(c\beta cB_2cB_3)\dot{B}_1\dot{B}_2 \\ & + 2(s\beta cB_3 + c\beta sB_2sB_3)\dot{B}_1\dot{B}_3 \\ & + 2(B_1c\beta cB_2sB_3)\dot{B}_2\dot{B}_3 \\ & + (B_1c\beta sB_2cB_3)\dot{B}_2^2 - (B_1s\beta cB_3 \\ & - B_1c\beta sB_2cB_3)\dot{B}_3^2\end{aligned}\quad (40)$$

$$\begin{aligned}\Phi_2 = & -2(s\beta cB_2cB_3)\dot{B}_1\dot{B}_2 \\ & + 2(c\beta cB_3 + s\beta sB_2sB_3)\dot{B}_1\dot{B}_3 \\ & + 2(B_1s\beta cB_2sB_3)\dot{B}_2\dot{B}_3 \\ & + (B_1s\beta sB_2cB_3)\dot{B}_2^2 - (B_1c\beta sB_3 \\ & - B_1s\beta sB_2cB_3)\dot{B}_3^2\end{aligned}\quad (41)$$

$$\begin{aligned}\Phi_3 = & -2(sB_2cB_3)\dot{B}_1\dot{B}_2 - 2(cB_2sB_3)\dot{B}_1\dot{B}_3 \\ & + 2(B_1sB_2sB_3)\dot{B}_2\dot{B}_3 \\ & + (B_1cB_2cB_3)\dot{B}_2^2 \\ & - (B_1cB_2cB_3)\dot{B}_3^2\end{aligned}\quad (42)$$

$$\begin{aligned}\Phi_4 = & 2(R_m c\alpha s\varphi s\theta + R_m s\alpha s\varphi c\theta)\dot{\varphi}\dot{\theta} \\ & - (R_m c\alpha c\varphi c\theta - R_m s\alpha c\varphi s\theta)\dot{\varphi}^2 \\ & - (R_m c\alpha c\varphi c\theta - R_m s\alpha c\varphi s\theta)\dot{\theta}^2\end{aligned}\quad (43)$$

$$\Phi_5 = -(R_m c\alpha s\theta + R_m s\alpha c\theta)\dot{\theta}^2\quad (44)$$

$$\begin{aligned}\Phi_6 = & 2(R_m c\alpha c\varphi s\theta + R_m s\alpha c\varphi c\theta)\dot{\varphi}\dot{\theta} \\ & + (R_m c\alpha s\varphi c\theta - R_m s\alpha s\varphi s\theta)\dot{\varphi}^2 \\ & + (R_m c\alpha s\varphi c\theta - R_m s\alpha s\varphi s\theta)\dot{\theta}^2\end{aligned}\quad (45)$$