# Functioning of Theoretical Discursive Reasoning in Geometry of Engineering Students

Ruth Cueva[1], Master en Pedagogía Profesional, Jaime Calderón[2], MBA, María José Vallejo[3], Máster en Química Sostenible, Julián Simbaña[4], Máster en Automatización, Nelson Media, Dr. En Ciencias Físicas y Matemáticas.
[1],[3],[4]Departamento de Ciencias, Escuela Politécnica Nacional, Ecuador, ruth.cueva@epn.edu.ec, maria.vallejo@epn.edu.ec, julian.simbana@epn.edu.ec
[2]Rectorado, Escuela Politécnica Nacional, Ecuador, jaime.calderon@epn.edu.ec

Abstract– ***The present work´s objective is to analyze the operation of the theoretical discursive reasoning that is generated when engineering students solve problems of geometry in a pencil and paper environment. The results related to the different characteristics of the structuring of the discourse identified in the resolutions of four problems are presented. A classification of each characteristic was made for each student's speech and was related to the performance indicators of the theoretical discursive reasoning***

***Keywords-- Discursive reasoning, engineering, geometry, deductive step.***

Digital Object Identifier (DOI):http://dx.doi.org/10.18687/LACCEI2018.1.1.114
ISBN: 978-0-9993443-1-6
ISSN: 2414-6390

# Funcionamiento del Razonamiento Discursivo Teórico en Geometría en Estudiantes de Ingeniería

Ruth Cueva[1], Master en Pedagogía Profesional, Jaime Calderón[2], MBA, María José Vallejo[3], Máster en Química Sostenible, Julián Simbaña[4], Máster en Automatización, Nelson Media, Dr. En Ciencias Físicas y Matemáticas.
[1,3,4]Departamento de Ciencias, Escuela Politécnica Nacional, Ecuador, ruth.cueva@epn.edu.ec, maria.vallejo@epn.edu.ec, julian.simbana@epn.edu.ec
[2]Rectorado, Escuela Politécnica Nacional, Ecuador, jaime.calderon@epn.edu.ec

***Resumen- El presente trabajo tiene como objetivo analizar el funcionamiento del razonamiento discursivo teórico que se genera cuando estudiantes de ingeniería resuelven problemas de geometría en un entorno de lápiz y papel. Se presentan los resultados relativos a las diferentes características de la estructuración del discurso identificadas en las resoluciones de cuatro problemas planteados. Se realiza una clasificación de cada característica que se logra identificar en el discurso del estudiante y se relaciona con los indicadores del funcionamiento del razonamiento discursivo teórico.***

***Palabras Clave- Razonamiento discursivo, ingeniería, geometría, paso deductivo.***

## I. INTRODUCCIÓN

Durante los últimos años la didáctica en las matemáticas ha sido de gran interés, tanto para explicar las teorías cognitivas, como para estudiar cómo se produce el proceso de *visualización, razonamiento y pensamiento espacial en geometría*. La geometría se considera uno de los campos con más exigencia cognitiva para el estudiante, ya que es necesario construir, razonar y ver indisociablemente. Paralelamente, se la considera como un instrumento reflexivo que le permite al ser humano resolver problemas de diversa índole y comprender un mundo que le ofrece una amplia gama de variadas formas geométricas, en cada uno de los escenarios que lo conforman, sea este natural o artificial [1,2,3 y 4].

La comprensión verdadera del discurso deductivo asociado a la resolución de un problema de geometría, requiere orientarse desde el punto de vista operativo del uso de las afirmaciones matemáticas dentro de cada paso deductivo, y desde el punto de vista estructural de la asociación de los pasos deductivos, mediante la superposición de proposiciones lo que supone una concienciación previa de la organización en los dos niveles [1].

El funcionamiento válido de un razonamiento y los tipos de malentendidos más comunes que cometen los estudiantes durante la estructuración discursiva, pueden ser analizados desde la organización del discurso [1,5]. Lo común es privilegiar el contenido de una proposición sobre su estatus y confundir la hipótesis dada con la conclusión buscada. Además, se usa erróneamente la afirmación matemática, confundiéndola con su reciproco o con su contrario o con un argumento o no se constatan las condiciones para su aplicación. Por otro lado, un error al avanzar en la estructuración deductiva del discurso es dejar baches, lo que hace perder la sensación de continuidad [1].

Por lo anterior, el acto de razonar se puede describir como dar pasos de unas proposiciones a otras, como "conectar de manera lógica" proposiciones, como presentar proposiciones para justificar una afirmación, etc. Para entender la actividad de razonar, tenemos que percibir las diferencias funcionales de las varias proposiciones que se movilizan en ella. No hay razonamiento sin una organización discursiva regulada por diferencias funcionales entre las proposiciones que lo constituyen. Llamaremos "estatus" a la función específica, al papel particular de cada proposición dentro del conjunto de las otras proposiciones que son requeridas o declaradas para obtener una prueba o para producir una argumentación. Por ejemplo, los términos "hipótesis", "premisa", "conclusión", "afirmación", "argumento", etc., hacen referencia al posible estatus de una proposición en un razonamiento.

## II. METODOLOGÍA

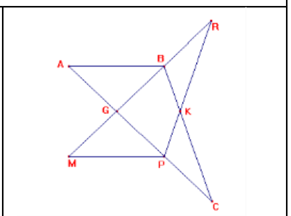
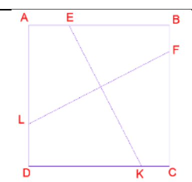
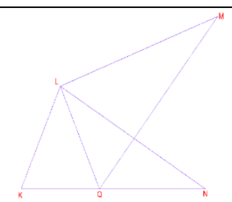
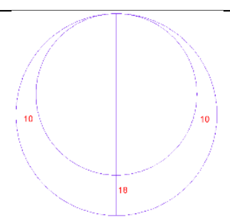
Para lograr la comprensión del funcionamiento del razonamiento discursivo se diseñaron cuatro problemas de geometría cuya resolución implicaba realizar procesos de razonamiento aplicando diversos conocimientos geométricos y coordinando las distintas representaciones en los diversos registros semióticos. Veinte estudiantes de ingeniería fueron evaluados con cuatro problemas geométricos, tres de ellos problemas de probar y uno de aplicación.

Para la selección de los problemas se cuidó que los conocimientos geométricos necesarios para su resolución hayan sido tratados en el respectivo curso de los estudiantes. Se determinó que tres de los problemas que se plantearon demandan una demostración formal con una estructura deductiva, porque se consideró que este tipo de problemas aporta en mayor medida al desarrollo de habilidades básicas del pensamiento lógico formal, requerido en la formación de profesionales en cualquier rama, especialmente en ciencias e ingeniería [6,7]. El restante problema contiene un enunciado con datos numéricos específicos, es decir, constituye un problema de aplicación, de búsqueda o empírico. Este tipo de problemas desarrolla capacidades específicas operativas que permiten visualizar la aplicación de afirmaciones matemáticas en ámbitos concretos de la realidad, que pueden ser representados por objetos geométricos, y en particular en la solución de problemas de la ingeniería. La característica común de los 4 problemas es que todos presentaban una configuración

Digital Object Identifier (DOI): http://dx.doi.org/10.18687/LACCEI2018.1.1.114
ISBN: 978-0-9993443-1-6
ISSN: 2414-6390

inicial, junto con el enunciado del problema, con fin de identificar el papel que juegan los procesos de visualización en la identificación de las afirmaciones geométricas, y facilitar el papel heurístico de las configuraciones [7,8]. Todos los problemas requieren para su solución la identificación de subconfiguraciones relevantes [9]. Los problemas 1, 3 y 4 tienen más de una manera de resolverlos, que depende de la subconfiguración relevante identificada ya que ésta condiciona las afirmaciones matemáticas asociadas, sin que esto asegure que se pueda resolver el problema [9,10]. Para el análisis se registró todo el proceso de resolución con el fin de lograr la identificación de la organización del discurso [11]. Se presentan los cuatro problemas planteados en la tabla I.

TABLA I
PROBLEMAS TIPO

| | |
|---|---|
| Problema 1 (P1) | |
| En la figura, los puntos G y B dividen el segmento MR en tres partes congruentes, y los puntos G y P también dividen el segmento AC en tres partes congruentes. Sabemos que AG y BG son congruentes. Demuestre que los ángulos de vértices R y C son congruentes. (Describa detalladamente su razonamiento) |  |
| Problema 2 (P2) | |
| En el cuadrado ABCD, los puntos E, F, K y L verifican que EK es perpendicular a LF. Demuestre que EK y LF son congruentes. (Describa detalladamente su razonamiento). |  |
| Problema 3 (P3) | |
| En la siguiente figura se verifica que los ángulos LKQ, LQK y LQM son congruentes entre sí. También se sabe que el ángulo KLQ es congruente con el MLN. Demuestre que los segmentos QM y KN son congruentes. (Describa detalladamente su razonamiento) |  |
| Problema 4 | |
| Dos círculos son tangentes interiores como se muestra en la figura. Calcule los radios de ambos círculos. (Describa detalladamente su razonamiento |  |

Los problemas planteados se resuelven al utilizar las proposiciones en sus espacios de significado, ya sea de contenido o de estatus y mediante la aplicación de afirmaciones matemáticas o argumentos que las conviertan de simples proposiciones a necesarias para la validación de un razonamiento [12]. A continuación, se describe posibles afirmaciones matemáticas tales como teoremas, definiciones, axiomas y propiedades que pueden dar una pauta de lo que el estudiante necesita hacer para resolver el problema o generar el discurso deductivo.

TABLA II
CONOCIMIENTOS GEOMÉTRICOS NECESARIOS PARA LA RESOLUCIÓN DE LOS PROBLEMAS GEOMÉTRICOS PLANTEADOS

| Problema de probar | Conocimiento geométrico utilizado |
|---|---|
| P1 | Teorema: Aditividad<br>Si una recta AC se divide en dos segmentos $AB$ y $BC$<br>$AB + BC = AC$<br>Teorema: LAL<br>Si dos triángulos tienen dos lados de uno iguales respectivamente a dos del otro, y los ángulos comprendidos por dichas parejas de rectas son iguales, también tendrán la base de uno igual a la del otro, un triángulo será igual al otro, y los ángulos restantes de uno serán iguales a los restantes del otro, respectivamente, es decir, que serán iguales los opuestos a los lados iguales. |
| P2 | Definición: Paralelogramo<br>Un paralelogramo es un cuadrilátero cuyos lados opuestos son paralelos.<br>Teorema: Paralelogramo<br>En un paralelogramo los lados opuestos son iguales.<br>Teorema: Ángulos 1<br>Ángulos con lados perpendiculares son iguales entre sí.<br>Teorema: Ángulos 2<br>Si dos rectas son paralelas, y una es perpendicular a una tercera recta, la otra recta también será perpendicular a ella.<br>Teorema: ALA<br>Si dos triángulos tienen dos ángulos de uno iguales, respectivamente, a dos del otro, y un lado igual a otro, sea que éste junte a los ángulos iguales, o sea que subtienda a uno de ellos, los triángulos también tendrán los lados restantes del uno iguales a los lados restantes del otro, y el ángulo restante del uno igual al ángulo restante del otro. |
| P3 | Teorema: Aditividad<br>Si un ángulo $ABC$ se divide en dos por una recta $BD$,<br>$\measuredangle ABD + \measuredangle BDC = \measuredangle A$<br>Teorema: Triángulo isósceles<br>Si los ángulos de la base de un triángulo son iguales entre sí, el triángulo es isósceles.<br>Teorema: ALA (Referido en P2) |
| P4 | Definición de circulo (centro O y radio R)<br>Propiedad: suma de segmentos<br>Teorema de Pitágoras<br>Relación métrica en el triángulo rectángulo<br>Operaciones de segmentos<br>Resolución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones |

Para resolver problemas que contienen datos numéricos, como en el ejercicio 4, se necesitan, además de lo mencionado, los Axiomas de Cuerpo de los Números Reales.

En los distintos tipos de conexiones que tiene que realizar el estudiante para generar su razonamiento se analiza el funcionamiento del razonamiento discursivo teórico atendiendo las siguientes características para el desarrollo metodológico del presente trabajo de investigación:

*A. Cambio del foco de atención desde el contenido de una proposición hacia el estatus en un paso deductivo con base en afirmaciones matemáticas o a argumentos*

Se ha verificado y clasificado la resolución de los cuatro problemas enfocándose en: primero, si el estudiante cambia atención la desde el contenido de la proposición hacia el estatus (cambio de foco), es decir otorgarle el papel de premisas, hipótesis, afirmaciones matemáticas o conclusiones; segundo, si el estudiante usa argumentos como comentarios, ejemplos, premisas sin demostración previa o conjeturas [1]. Este análisis se realizó en cada paso deductivo del discurso del estudiante y esta esquematizado en la Figura 1.

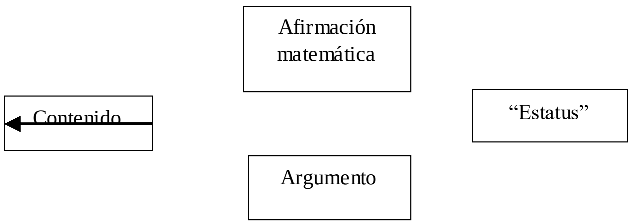



Fig. 1. Esquema del análisis de un paso deductivo respecto al cambio del foco de atención

*B. Secuencia continua de enunciados entre afirmaciones matemáticas o entre argumentos.*

Para identificar esta característica se ha verificado dentro de un paso deductivo del discurso del estudiante la utilización de una secuencia continua de enunciados conectados entre sí por una afirmación matemática o por argumentos. La figura 2 muestra un esquema de lo antes expuesto.

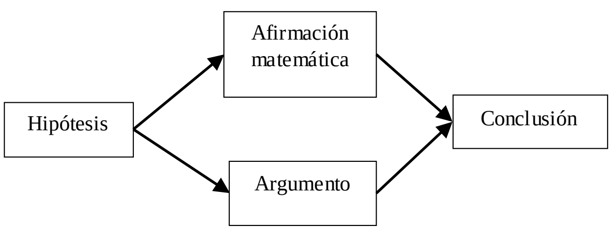



Fig. 2. Esquema del análisis de un paso deductivo tomando en cuenta una secuencia continúa de enunciados

C. *Aplicación de afirmaciones donde se distinguen teoremas o argumentos*

Se verifica que el estudiante aplica afirmaciones matemáticas, ya sea teoremas, axiomas o definiciones; o argumentos en cada paso deductivo.

D. *Aplicación de mecanismos de sustitución parcial o total*

El mecanismo de sustitución es un importante indicador en el funcionamiento válido del razonamiento; es una actividad relacionada con la afirmación matemática integrante del paso deductivo, pero que a la vez se utiliza para relacionar el razonamiento de una manera integral. Esto se explica, porque el estudiante debe ser consciente de que la única forma de tener certeza de una conclusión obtenida, es que haya sido el resultado de la aplicación de una afirmación matemática y, además, es necesario que identifique la necesidad de "este mecanismo" para cambiar el estatus de una proposición, desde el epistémico hacia el lógico [1]. Del análisis de las soluciones se ha inferido que el mecanismo de sustitución, se puede ejecutar mediante dos alternativas, la una cuando el estudiante escribe las proposiciones como secuencias de pasos deductivos, que pueden o no cumplir el estatus de hipótesis, afirmación matemática o conclusión y; la otra cuando el estudiante combina, con protagonismo fluctuante, la actividad cognitiva del razonamiento discursivo teórico y la de la actividad heurística sobre la configuración inicial, con la característica de que no registra en el discurso todas las conclusiones que obtiene en este última actividad. A la primera la denominaremos *sustitución completa* y a la segunda *sustitución parcial.*

E. *Aplicación parcial o total. de secuencia de conclusiones*

Se ha considerado que para un proceso de razonamiento discursivo en geometría, se debe conectar los pasos deductivos mediante conclusiones que se vuelven hipótesis necesarias para el siguiente paso deductivo. En función de esto, se ha cuantificado la resolución de los estudiantes atendiendo a si realizaron esta secuencia de conclusiones de manera parcial o total.

F. *Uso parcial o total de afirmaciones matemáticas para conectar conclusiones*

Para generar un discurso para la resolución de un problema geométrico se necesita conectar los pasos deductivos, con proposiciones, que se deben superponer. Cada uno de estos pasos debe estar constituidos por hipótesis, afirmación matemática y conclusión. Para obtener una adecuada conexión, las conclusiones se toman como premisas para el nuevo paso deductivo. A esto se debe que no haya brecha entre dos pasos. Se analiza si para conectar conclusiones, el estudiante lo hace a través de afirmaciones matemáticas explicitas en su conexión entre pasos deductivos lógicos.

G. *Aplicación parcial o total de una secuencia de proposiciones continuas*

Una demostración requiere un razonamiento válido, lo que quiere decir que la conclusión de cada paso deber ser necesaria para estructurar el siguiente paso; y entre dos pasos no debe haber espacios vacíos. En este apartado se analiza que el estudiante, durante su razonamiento discursivo teórico, construya una secuencia continua de proposiciones sin generar baches en su discurso.

En general, esta metodología de análisis cubre procesos cognitivos que genera el estudiante cuando estructura un proceso de razonamiento discursivo teórico al resolver problemas de geometría. El análisis de estos resultados se ha tabulado de tal manera que se identifiquen procesos cognitivos con el fin de determinar los problemas en el funcionamiento del razonamiento discursivo teórico.

## II. RESULTADOS Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

A partir de los indicadores señalados en el apartado anterior, se ha procedido a analizar el funcionamiento del razonamiento discursivo teórico evidenciado en el discurso que han construido los estudiantes cuando resuelven problemas de geometría en un entorno de lápiz y papel.

### A. *Cambio del foco de atención desde el contenido hacia el estatus con base en afirmaciones matemáticas o a argumentos*

El funcionamiento válido de un razonamiento discursivo predice que para el estudiante lo común es privilegiar el contenido de una proposición sobre su estatus y confundir la hipótesis dada con la conclusión buscada. Además, en lo que respecta a la afirmación matemática, los errores son no constatar las condiciones de su aplicación, confundirla con su reciproco o con su contrario o utilizar un argumento para validar una hipótesis dada [1,9,13].

En la Tabla III se presentan los resultados del análisis del funcionamiento del razonamiento en función del cambio de foco de atención desde el contenido de la proposición hacia una hipótesis, afirmación matemática o conclusión en el discurso generado por los estudiantes al resolver los diferentes problemas propuestos en cada paso deductivo del discurso.

En cualquier acto de razonar, implícita o explícitamente, se trabaja con proposiciones en un paso deductivo, es decir, con enunciados que tienen un valor por sí mismos y un estatus en relación con otras proposiciones [11,13]. En la tabla III se observa que en el P1 el 80% de los estudiantes realizan un cambio de foco de atención desde el espacio de significado de contenido de la proposición hacia un estatus en base a una afirmación matemática, y solo el 15% de ellos usa argumentos para este cambio. Estos porcentajes responden a la naturaleza del enunciado y la figura del P1, ya que se puede asociar a los datos establecidos en la figura inicial afirmaciones matemáticas o argumentos en el razonamiento [1].

Por otro lado, para los problemas P2, P3 y P4 el porcentaje de cambio de foco de atención en base a una afirmación matemática disminuye considerablemente frente al problema P1. Analizando las posibles causas se observó que en los problemas P2 y P4 se necesita realizar alguna construcción geométrica para resolverlos. Además, el problema P4 necesita la aplicación de la definición de círculo con su respectiva definición de centro y radio, lo que complica el razonamiento del estudiante.

Respecto al problema P3, la complicación se da por la superposición de los triángulos dados, lo que complica el cambio de foco del enunciado a un estatus.

TABLA III
ANÁLISIS DEL FUNCIONAMIENTO DISCURSIVO RESPECTO AL CAMBIO DE FOCO DE ATENCIÓN

| Actividad Cognitiva | P1 | P2 | P3 | P4 |
|---|---|---|---|---|
| En base a afirmación matemática | E02, E03, E04, E05, E06, E07, E08, E09, E11, E12, E13, E14, E16, E18, E19, E20<br>16/20 (80%) | E02, E03, E13, E19<br>4/20 (20%) | E04, E08, E13, E14, E17<br>5/19 (26,3%) | E02, E14<br>2/17 (11,8%) |
| En base a argumentos | E10, E15, E17<br>3/20 (15%) | E04, E07, E08, E09, E20<br>5/20 (25%) | E2, E03, E09<br>3/19 (15,7%) | E11<br>1/17 (5,9%) |
| Total Estudiantes | 20 | 20 | 19 | 17 |

### B. *Secuencia continua de enunciados conectados entre afirmaciones matemáticas o entre argumentos.*

Posterior al análisis respecto al contenido de las proposiciones y su cambio de foco de atención hacia un estatus determinado, se analizó si existe una secuencia continua de enunciados entre afirmaciones matemáticas o entre argumentos. Este análisis se realiza porque los estudiantes basan su razonamiento en argumentos y no en afirmaciones matemáticas lo que en lo posterior les causa problemas de comprensión que desembocan en razonamientos no validos o incorrectos [4].

Hay diferentes maneras de pasar de una o varias proposiciones a otra, pero no todas ellas permiten la construcción de una prueba legítima. Una demostración requiere un razonamiento válido; eso quiere decir que la conclusión de cada paso debe ser la premisa del otro.

En la Tabla IV se presentan los resultados del análisis del funcionamiento discursivo teórico considerando la secuencia continua de enunciados. Respecto a los resultados, se puede constatar que son similares a los obtenidos en la Tabla III.

En el problema P1, el 80% de los estudiantes genera una secuencia continua de enunciados entre afirmaciones matemáticas, ya sea mediante el teorema de aditividad o el de congruencia de triángulos. Por otro lado, el 15 % de ellos utiliza argumentos, es decir una premisa sin demostración o una conjetura producto de la asociación una afirmación matemática o una subconfiguración, lo cual estimula la configuración inicial [4,7,9,10].

Esto puede deberse a que el problema P1 presenta varias opciones de configuraciones y subconfiguraciones relevantes para su resolución. Además, los teoremas como el de aditividad de segmentos y el teorema de LAL de congruencia de triángulos son afirmaciones matemáticas que el estudiante conoce y las usa para realizar la conexión lógica entre las proposiciones. Otro posible factor que facilita su resolución es el conocimiento del resultado final, lo cual facilita el direccionamiento de las proposiciones y la conexión entre las mismas, situación que determina que se constate una secuencia continua de enunciados conectados entre sí [4,9].

En cuanto al problema P4, este necesita, para su resolución, de relaciones métricas que permitan el uso del teorema de Pitágoras en los triángulos rectángulos generados por construcción. Lo que no es de fácil visualización, como se muestra en el porcentaje de estudiantes que realizan el cambio de foco alrededor del 5,9%.

### C. *Aplicación de afirmaciones donde se distinguen teoremas o argumentos*

El análisis de la manera en la que el estudiante identifica las afirmaciones matemáticas y cómo establece relaciones entre ellas del tipo “si…, entonces…”es otro elemento que hemos identificado como indicador del funcionamiento del razonamiento discursivo teórico. Esta relación produce un vínculo entre dos afirmaciones para generar una nueva afirmación geométrica a través de una proposición conocida.

TABLA V
ANÁLISIS DEL FUNCIONAMIENTO DISCURSIVO POR APLICACIÓN DE AFIRMACIONES

| Actividad Cognitiva | P1 | P2 | P3 | P4 |
|---|---|---|---|---|
| Teoremas | E02, E03, E04, E05, E06, E07, E08, E09, E11, E12, E13, E14, E16, E18, E19, E20<br>16/20 (80%) | E02, E03, E13, E19<br>4/20<br>(20%) | E04, E08, E13, E14, E17<br>5/19<br>(26,3%) | E02, E14<br>2/17<br>(11,8%) |
| Argumentos | E12, E13, E14, E19 | E03 | - | - |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 4/17<br>(20%) | 1/20<br>(5%) | | |
| Total Estudiantes | 20 | 20 | 19 | 17 |

### D. *Aplicación de mecanismos de sustitución parcial o total*

Los análisis del razonamiento discursivo realizados en los anteriores apartados estaban vinculados a un solo paso deductivo de la resolución de los problemas planteados. Sin embargo, es necesario analizar, no solo un paso deductivo de resolución, sino también el conjunto de pasos generados durante todo el discurso del estudiante. Por esto, a continuación, se toman en cuenta el análisis y razonamiento del estudiante en forma integral [1].

Con lo descrito en la metodología y basándose en la Tabla VI, se observa que en el problema P1 el 75% de los estudiantes aplica mecanismos de sustitución escribiendo los enunciados como secuencias de proposiciones, que pueden o no cumplir el estatus de hipótesis, afirmación matemática o conclusión, es decir realizan una sustitución total.

Por otro lado, el 10% de ellos combina, la actividad cognitiva del razonamiento discursivo teórico y la actividad heurística sobre la configuración inicial, con la característica de que no registra en el discurso todas las conclusiones que obtiene en esta última. Esto se debe a la naturaleza del problema P1, descritos anteriormente.

Con respecto a los problemas P2, P3 y P4, se observa un descenso considerable en el porcentaje de estudiantes que aplican el mecanismo de sustitución. Esto está ligado a la dificultad de realizar los procesos para cada paso deductivo, un cambio de foco de atención, una aplicación de afirmaciones matemáticas y la distinción el sí del entonces, ya que sin ellos no es evidente distinguir los mecanismos de sustitución.

TABLA VI
ANÁLISIS DEL FUNCIONAMIENTO DEL RAZONAMIENTO DISCURSIVO POR APLICACIÓN DE MECANISMOS DE SUSTITUCIÓN

| Actividad Cognitiva | P1 | P2 | P3 | P4 |
|---|---|---|---|---|
| Total | E02, E04, E05, E06, E07, E08, E09, E11, E12, E13, E14, E16, E18, E19, E20<br>15/20<br>(75%) | E03, E13, E17, E19<br>4/20<br>(20%) | E12, E14, E17<br>3/19<br>(15,8%) | E08, E09, E13<br>3/17<br>(17,6%) |
| Parcial | E03, E19<br>2/20<br>(10%) | E02, E05, E07<br>3/20<br>(15%) | - | E02, E14<br>2/17<br>(11,8%) |

| Total Estudiantes | 20 | 20 | 19 | 17 |
|---|---|---|---|---|

E. *Aplicación parcial o total de secuencia de conclusiones*

El razonamiento se fundamenta en la conexión de proposiciones, por lo que una forma de analizarlo en un contexto integral, es encontrar evidencia de que el estudiante muestra la capacidad de identificar una conclusión de un paso deductivo como necesaria para convertirse en hipótesis para el siguiente paso deductivo y así sucesivamente hasta llegar a un razonamiento válido [5,6].

De acuerdo a la Tabla VII, se observa que en el problema P1 el 50% de los estudiantes usa todas sus conclusiones como hipótesis en el siguiente paso deductivo; sin embargo, esto no aseguró que el estudiante tenga éxito en encontrar un razonamiento valido.

Por otro lado, se observa que en los problemas P2, P3 y P4 solo el 10%, 10,5% y 5,9% de los estudiantes, respectivamente, no usan una secuencia total de conclusiones. Este resultado está acorde a los resultados antes descritos, ya que estos problemas presentan poca claridad en el discurso de los estudiantes en un solo paso deductivo, y consecuentemente no pueden generar una secuencia continua de conclusiones.

TABLA VII
ANÁLISIS DEL FUNCIONAMIENTO DEL RAZONAMIENTO DISCURSIVO POR APLICACIÓN DE SECUENCIA DE CONCLUSIONES

| Actividad Cognitiva | P1 | P2 | P3 | P4 |
|---|---|---|---|---|
| Total | E02, E04, E07, E08, E09, E12, E13, E14, E19, E20 10/20 (50%) | E03, E17 2/20 (10%) | E08, E17 2/19 (10,5) | E14 1/17 (5,9%) |
| Parcial | E12, E13, E14, E19 4/20 (20%) | E03 1/20 (5%) | - | - |
| Total Estudiantes | 20 | 20 | 19 | 17 |

F. *Uso parcial o total de afirmaciones matemáticas para conectar conclusiones*

La conexión de conclusiones, provoca que no exista una brecha entre los diferentes pasos deductivos. Esta manera específica de hacer conexiones produce que el razonamiento discursivo se genere de forma secuencial o en forma de árbol. La adecuada conexión entre conclusiones permite que el estudiante llegue a un razonamiento válido, al percibir todas las condiciones del problema que se va a resolver [1,7].

De acuerdo a la Tabla VIII, se observa que en el problema P1 el 30% de los estudiantes conecta todas las conclusiones mediante afirmaciones matemáticas entre los diferentes pasos deductivos; y el 20% de estudiantes utiliza argumentos para realizar esta conexión. A pesar de que el problema 1 es claro y fácil de resolver permite avanzar dejando vacíos entre pasos deductivos lo que provoca que no se genere una adecuada conexión entre conclusiones.

En los problemas P2, P3 y P4, debido a que carecen de secuencia de conclusiones el porcentaje de los estudiantes que utilizan argumentos o afirmaciones para conectar conclusiones es bajo. Este resultado tiene estrecha relación con los descritos en la tabla VII.

TABLA VIII
ANÁLISIS DEL FUNCIONAMIENTO DEL RAZONAMIENTO DISCURSIVO POR USO DE AFIRMACIONES MATEMÁTICAS PARA CONECTAR CONCLUSIONES

| Actividad Cognitiva | P1 | P2 | P3 | P4 |
|---|---|---|---|---|
| Total | E02, E08, E12, E13, E14, E19 6/20 (30%) | E03, E07, E08, E09, E10, E13 6/20 (30%) | E14, E17 2/19 (10,5%) | E14 1/17 (5,9%) |
| Parcial | E12, E13, E14, E19 4/20 (20%) | E03 1/20 (5%) | - | - |
| Total Estudiantes | 20 | 20 | 19 | 17 |

G. *Aplicación parcial o total de una secuencia de proposiciones continuas*

Los denominados "baches, se refiere a dejar vacíos entre conclusiones, un razonamiento válido necesita que la conclusión de cada paso sea la premisa de otra y entre dos pasos no debe haber los vacíos mencionados. Es este tipo de razonamiento, a menudo denominado deductivo, es el que se usa en cualquier prueba en geometría [1].

En el problema 1 debido a su facilidad el porcentaje de alumnos que utiliza una secuencia de proposiciones de forma parcial, es alrededor de un 75 %, esto se debe a que el estudiante no realiza bien las conexiones entre proposiciones y conclusiones, en los problemas 2, 3 y 4 el porcentaje de estudiantes que realiza una conexión parcial es similar debido a la complejidad que conlleva la resolución de los mismos.

TABLA IX

ANÁLISIS DEL FUNCIONAMIENTO DEL RAZONAMIENTO DISCURSIVO POR EL USO DE SECUENCIA DE PROPOSICIONES CONTINUAS

| Actividad Cognitiva | P1 | P2 | P3 | P4 |
|---|---|---|---|---|
| Total | E08<br>1/20 (5%) | - | E17<br>1/19 (5,3%) | E14<br>1/17 (5,9%) |
| Parcial | E02, E03, E04, E05, E06, E07, E09, E11, E12, E13, E14, E16, E18, E19, E20<br>15/20 (75%) | E02, E03, E13, E19<br>4/20 (20%) | E02, E03, E13, E19<br>4/19 (21%) | E04, E08, E13, E14<br>4/17 (23,5%) |
| Total Estudiantes | 20 | 20 | 19 | 17 |

## CONCLUSIONES

El problema 1, al ser un problema de probar y acotado, y que para resolverlo no se apoya en manipulaciones de configuraciones o de trabajo heurístico o en argumentaciones que se dan en el marco de una discusión en el aula de clase, es de fácil resolución y el funcionamiento del razonamiento discursivo asociado se produce de forma clara. Sin embargo, esto no entrena al estudiante a discernir entre configuraciones adecuadas y configuraciones ambiguas, como las que pueden aparecer en la geometría plana.

Los estudiantes visualizan este tipo de problemas con mayor facilidad y desarrollan un razonamiento discursivo teórico; sin embargo, esto no garantiza que los estudiantes acedan a problemas de probar y de aplicación con mayor complejidad en el sentido configuracional, lo cual trunca el desarrollo del razonamiento con configuraciones geométricas más complejas.

Por lo antes mencionado y con base en los resultados para los problemas P2, P3 y P4, la manipulación de la configuración (heurística) es la base o fundamento del funcionamiento del razonamiento discursivo. Por lo que se concluye que, para el desarrollo del razonamiento discursivo teórico real, hace falta que el docente incite a los estudiantes a pensar en la manipulación de la configuración inicial, ya sea con construcciones geométricas u otro tipo de aprehensiones, inmediatamente después de que se haya llevado las proposiciones de un contenido a un estatus aplicando las hipótesis dadas en el enunciado inicial.

Con base en los resultados de los cuatro problemas, la visualización y el discurso constituyen dos herramientas para el funcionamiento del razonamiento discursivo teórico que a menudo se han opuesto, tanto desde un punto de vista pedagógico como psicológico o matemático. Sin embargo, su articulación es absolutamente decisiva para el aprendizaje de la geometría, pues la actividad geométrica descansa en la sinergia cognitiva de esos dos registros de representación.

La organización de estructuras cognitivas permite a los estudiantes realizar los varios tipos de actividad de conocimiento tanto empíricos como científicos.

Problemas como el P4, se pueden plantear desde diferentes registros. Pero el registro más común, es el natural ya que es de fácil acceso para el estudiante. De los problemas 2 y 3 se observa que los teoremas movilizan un mecanismo de razonamiento discursivo adecuado, que consiste en una sustitución de unas proposiciones por otras, mientras que los argumentos proceden por composición acumulativa de unas proposiciones con otras.

## REFERENCES


[1] R. Duval y A. Saénz-Ludlow, “Comprensión y aprendizaje en matemáticas: perspectivas semióticas seleccionadas", Editorial Univresidad Distrital Francisco José de Caldas, 2016, pp. 95-125.

[2] B. Garcia, A. Coronado y L. Montealegre, “Formación y desarrollo de competencias matemáticas: una perspectiva teórica en la didáctica de las matemáticas”, Revista Educación y Pedagogía, vol 23, num. 59, enero-abril 2011

[3] C. Parra e I. Saiz, “Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones”, Editorial Paidós SAICF, Buenos Aires, 1994.

[4] H. Quesada, “Análisis de la coordinación entre los procesos de visualización y los procesos de razonamiento en la resolución de problemas en geometría”, Tesis Doctoral, Universidad de Alicante, 2014.

[5] N. Balacheff, “Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas”, Una empresa docente. Universidad de los Andes, Bogotá, 2000.

[6] J. Lárez, “Las demostraciones geométricas como instancia de resolución de problemas”, Paradigmas vol 35, no.2 Maracay dic. 2014.

[7] F. Clemente, “Características del razonamiento configural en estudiantes para maestros en la resolución de problemas de probar en geometría”, Tesis doctoral, Univerisidad de Alicante, 2015.

[8] M. T. Battista, “Spatial visualization and gender differences in hign school geometry”, Journal for Research in Mathematics Education, 1990, 21, 47-60

[9] G. Torregrosa Gironés; H. Vilella Quesada; M.C. Penalva Martinés, “Razonamiento configural como coordinación de procesos de visualización. Enseñanza de las ciencias”, revista de investigación y experiencias didácticas, 2010, vol. 28, no 3, p. 327-340.

[10]M. T. Batista, “ Development of the shape makers geometry microworld: Desing priniples and research”, In K. Heid & G. Blume (Eds), Research on technology in the learning and teaching of mathematics: Syntheses ans perspectives. Greenwich, CY, 2008)

[11]K. Hakkarainen, T. Palonen, S. Paavola y E. Lehtinen, «Communities of Networked Expertise. Professional and Educational Perspectives,» Elsevier, 2004F. Clemente y S. Llinares, “Formas del discurso y razonamiento configural de estudiantes para maestros en la resolución de problemas de geometría”, Enseñanza de las Ciencias, 2015, 33(1), 0009-27.

[12]K. Hakkarainen, T. Palonen, S. Paavola y E. Lehtinen, «Communities of Networked Expertise. Professional and Educational Perspectives,» Elsevier, 2004
[13]L. Franchi y A. Hernández de Ricón, "Tipología de errores en la Geometría Plana. Parte II"; Educere, vol. 8, num 25, abril-junio, 2004, pp. 196-204
[14]R. Báez, y M. Iglesias, "Principios didácticos a seguir en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría en la UPEL", "El Mácaro". Enseñanza de la Matemática, Vols. 12 al 16, Número extraordinario, 67-87
[15]R. Duval , Understanding the Mathematical Way of Thinking – The Registers of Semiotic Representations, Gewerbestrasse: Springer, 2017.