Use of Logic in the Resolution of Geometry Problems in a Pencil and Paper Environment by Engineering Students

Fernando Alvarez[1], Maria Chaparro[2],
[1],[2] Corporación Universitaria Minuto de Dios - UNIMINUTO,
falvarez, machaparro(@uniminuto.edu)

Abstract*– Mathematical logic is fundamental today in the scientific field. Therefore, engineering students must be competent in logical operations. In this paper, first-year engineering students were asked to solve four problems related to the teaching and learning of two-dimensional geometric shapes as part of an evaluation, generating a variety of responses, within the parameters of the four types of logic . This document presents and analyzes these results, and compares and discusses the differences between natural human reasoning and engineering logic. It seeks to explain the defects in logical reasoning that occur despite formal training and considers several possible cultural and psychological explanations for this phenomenon.
***Keywords*— logic, engineering, reasoning, cognitive habilyties**

Digital Object Identifier (DOI):http://dx.doi.org/10.18687/LACCEI2018.1.1.108
ISBN: 978-0-9993443-1-6
ISSN: 2414-6390

Uso de la Lógica en la Resolución de Problemas de Geometría en un entorno de Lápiz y Papel por Estudiantes de Ingeniería

***Abstract*– La lógica matemática es fundamental en la actualidad dentro del campo científico; por lo tanto, los estudiantes de ingeniería deben ser competentes en operaciones lógicas. En este trabajo a los estudiantes de primer año de ingeniería se les propuso resolver cuatro problemas relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de formas geométricas bidimensionales como parte de una evaluación, generando una variedad de respuestas, dentro del parámetro de los cuatro tipos de lógicas. Este documento presenta y analiza estos resultados, y compara y discute las diferencias entre el razonamiento humano natural y la lógica de la ingeniería. Busca explicar las fallas en el razonamiento lógico que ocurren a pesar del entrenamiento formal y considera varias posibles explicaciones culturales y psicológicas para este fenómeno. La conclusión resalta la necesidad de un mayor énfasis en el desarrollo de habilidades cognitivas y de resolución de problemas geométricos en la educación de ingeniería. Cabe destacar que la importancia de la fluidez en el lenguaje de estudio emerge como un factor significativo en el aprendizaje de temas técnicos.**

***Keywords*-- lógica, ingeniería, razonamiento, habilidades cognitivas.**

I. INTRODUCCIÓN

La lógica es una herramienta importante para todo tipo de conocimiento y de actividad racional, pero también para la vida cotidiana [1].

La Ingeniería es una ciencia aplicada basada en otras ciencias exactas como las matemáticas, la geometría, la física y la química. [2] Muchos estudios indican que la capacidad en el razonamiento lógico no está separada de la capacidad intelectual general y que los estudiantes que dominan el razonamiento y la resolución de problemas tienden a desempeñarse mejor en cualquier tema de ciencias [3].

Se distingue dos razonamientos cognitivos fundamentales involucrados en la solución de problemas y demostraciones.

Razonamiento discursivo natural: es espontáneo, se da en la comunicación ordinaria, se expresa mediante la descripción, explicación y argumentación.

Razonamiento discursivo teórico: es más científico, utiliza teoremas, axiomas o definiciones para llegar a una conclusión, y se basa en la deducción. Se puede presentar en un registro estrictamente simbólico o en el registro natural, pero siempre mediante una estructura deductiva [4].

En este trabajo nos interesa analizar el razonamiento como un proceso discursivo teórico, que se evidencia en el discurso generado por el estudiante cuando resuelve problemas de geometría plana, en un entorno de lápiz y papel.

El razonamiento discursivo teórico se basa en definiciones, teoremas o axiomas, que conducen a una conclusión. Ocurre en un registro estrictamente simbólico o en lenguaje natural, para enunciar una propiedad, de tal forma que las propiedades identificadas tengan relación con la interpretación que se ha dado a la configuración y se pueda reconocer propiedades a partir de otras ya conocidas. Son distintas expresiones del discurso natural, y hay un salto estructural entre la descripción, la explicación y la argumentación respecto del proceso de deducción [5].

En la actividad del razonamiento con los problemas de probar se trabaja con proposiciones. Estas proposiciones son entendidas como enunciados que tiene un valor de verdad por sí mismos y que en su relación con otras tienen un estatus específico. El razonamiento podría ser visto como la conexión lógica de proposiciones con el fin de justificar una afirmación, por lo que es necesario identificar las diferentes funciones de las proposiciones que forma parte del discurso durante el proceso de probar. Las proposiciones pueden tener diferentes estatus, a saber: hipótesis, premisa, afirmación, argumento, conclusiones, etc. El estatus en una organización discursiva es distinto al de una estructura teórica (axioma, definición, teorema, etc.). Al primero se le denomina estatus operativo y al segundo teórico [1].

El razonamiento deductivo en matemática, en general, y en geometría, en particular, implica dos niveles distintos de organización discursiva. Uno que refiere la organización de varias proposiciones en un paso del proceso deductivo, y el otro, la organización de varios de estos pasos. Al primero se lo denomina "nivel local" y al segundo “nivel global”. En el nivel local cada proposición toma una de las siguientes categorías del estatus operativo: premisa, conclusión o afirmación matemática. La forma de conectar las proposiciones dentro del nivel local depende del estatus operativo de ésta, sin que sean indispensables consideraciones lingüísticas.

El nivel global abarca varios niveles locales. Los niveles locales están conectados por proposiciones que se superponen, es decir, las conclusiones de un paso son consideradas premisas de otros pasos, eliminando de este modo las brechas entre los niveles locales. De este modo, el componente del

Digital Object Identifier (DOI): http://dx.doi.org/10.18687/LACCEI2018.1.1.108
ISBN: 978-0-9993443-1-6
ISSN: 2414-6390

significado predominante en una organización discursiva es el estatus de las proposiciones y no su contenido; el estatus operativo de las proposiciones está fijado por su estatus teórico [6].

A. *Generalidades*

El objetivo de este artículo es analizar el uso de la lógica que los estudiantes de ingeniería realizan en la resolución de los problemas geométricos en un entorno de lápiz y papel.

Para analizar los problemas geométricos tanto los de probar, como los de búsqueda, se necesita recordar algunas reglas de la Lógica [7].

TABLA I
REGLAS DE INFERENCIAS

Introducción de la Conjunción (I ∧)	$p \quad p$ $q \quad q$ $p \wedge q \quad q \wedge p$
Eliminación de la Conjunción ($E \wedge$)	$p \wedge q \quad p \wedge q$ $\overline{\quad p \quad} \quad \overline{\quad q \quad}$
Introducción de la Disyunción ($I \vee$)	p q $\overline{p \wedge q} \quad \overline{p \wedge q}$
Eliminación de la Disyunción ($E \vee$)	$p \vee q$ $p \rightarrow q$ $p \rightarrow r$ ——— r
Introducción de la Implicación ($I \rightarrow$) (Teorema de la Deducción)	p . . . q ——— $p \rightarrow q$
Eliminación de la Implicación ($E \rightarrow$) (Modus Ponens)	$p \rightarrow q$ p ——— q
Introducción de la Negación ($I \neg$)	p . . . $q \wedge \neg q$ ——— $\neg p$
Eliminación de la Negación ($E \neg$)	$\neg\neg p$ ——— p

TABLA II
AXIOMAS LÓGICOS

Axioma 1. Propiedad Reflexiva.	$a = a$
Axioma 2. Propiedad Simétrica.	$a = b \rightarrow b = a$
Axioma 3. Propiedad Transitiva.	$a = b \rightarrow (b = c \rightarrow a = c$
Axioma 4. Propiedad de Reemplazo	$a = b \rightarrow \big(A(a,a) \rightarrow A(a,b)\big)$

TABLA III
TEOREMAS LÓGICOS

Teorema 1	$a = b \rightarrow (a + c = b + c)$
Teorema 2	$a = b \rightarrow b = a$

II. MÉTODO DE INVESTIGACIÓN

A. *Diseño de estudio*

Para lograr una comprensión preliminar de la naturaleza de las dificultades que presentan los estudiantes de ingeniería en la resolución de problemas geométricos, se realizó una prueba, destinada a ser el primer paso en un proyecto de investigación que utiliza una variedad de métodos, incluidas entrevistas y sesiones de pruebas. Las preguntas del instrumento de recolección de datos fueron diseñadas para cubrir el pensamiento científico y el estilo de aprendizaje de manera amplia. La prueba consistió en un instrumento de cuatro problemas geométricos.

Los cuatro problemas implicaban identificar los distintos procesos de razonamiento [1]. Para la selección de los problemas se cuidó que los conocimientos geométricos necesarios para su resolución hayan sido tratados en el respectivo curso de los estudiantes. [8] Se determinó que tres (3) de los problemas que se plantearon demandan una demostración formal con una estructura deductiva, porque se consideró que este tipo de problemas aporta en mayor medida al desarrollo de habilidades básicas del pensamiento lógico formal, requerido en la formación de profesionales en cualquier rama, especialmente en ciencias e ingeniería. El restante problema contiene un enunciado con datos numéricos específicos, es decir, constituye un problema de aplicación, de búsqueda o empírico. Este tipo de problemas desarrolla capacidades específicas operativas que permiten visualizar la aplicación de afirmaciones matemáticas en ámbitos concretos de la realidad, que pueden ser representados por objetos geométricos, y en particular en la solución de problemas de la ingeniería. La característica común de los 4 problemas es que presentaban una configuración inicial, junta con el enunciado del problema, con el fin de identificar el papel que juegan los procesos de visualización en la identificación de las afirmaciones geométricas, y facilitar el papel heurístico de las configuraciones [9]. Todos los problemas requieren para su solución la identificación de subconfiguraciones relevantes [10]. Los problemas 1, 3 y 4 tienen más de una manera de resolverlos, que depende de la subconfiguración relevante identificada ya que ésta condiciona las afirmaciones matemáticas asociadas, sin que esto asegure que se pueda resolver el problema [11]. Para el análisis se registró todo el proceso de resolución con el fin de lograr la identificación de la organización del discurso [5].

B. *Contenido de la herramienta*

Para resolver los problemas de probar en geometría se han utilizado las formas del discurso generado por los estudiantes para el profesor al resolver problemas de geometría de probar y el razonamiento configural. Se analiza las respuestas de 20

Digital Object Identifier: (to be inserted by LACCEI).
ISSN, ISBN: (to be inserted by LACCEI).

estudiantes a cuatro problemas de probar para determinar cómo identificaban y relacionaban propiedades geométricas para deducir nuevos hechos y propiedades de las figuras [12], lo que se presenta en la siguiente tabla a continuación.

TABLA V
CONOCIMIENTO GEOMÉTRICO

Problema de probar	Conocimiento geométrico utilizado
P1	Teorema: Aditividad Si una recta AC se divide en dos segmentos AB y BC $AB + BC = AC$ Teorema: LAL Si dos triángulos tienen dos lados de uno iguales respectivamente a dos del otro, y los ángulos comprendidos por dichas parejas de rectas son iguales, también tendrán la base de uno igual a la del otro, un triángulo será igual al otro, y los ángulos restantes de uno serán iguales a los restantes del otro, respectivamente, es decir, que serán iguales los opuestos a los lados iguales.
P2	Definición: Paralelogramo Un paralelogramo es un cuadrilátero cuyos lados opuestos son paralelos. Teorema: Paralelogramo En un paralelogramo los lados opuestos son iguales. Teorema: Ángulos 1 Ángulos con lados perpendiculares son iguales entre sí. Teorema: Ángulos 2 Si dos rectas son paralelas, y una es perpendicular a una tercera recta, la otra recta también será perpendicular a ella. Teorema: ALA Si dos triángulos tienen dos ángulos de uno iguales, respectivamente, a dos del otro, y un lado igual a otro, sea que éste junte a los ángulos iguales, o sea que subtienda a uno de ellos, los triángulos también tendrán los lados restantes del uno iguales a los lados restantes del otro, y el ángulo restante del uno igual al ángulo restante del otro.
P3	Teorema: Aditividad Si un ángulo ABC se divide en dos por una recta BD, $\measuredangle ABD + \measuredangle BDC = \measuredangle A$ Teorema: Triángulo isósceles Si los ángulos de la base de un triángulo son iguales entre sí, el triángulo es isósceles. Teorema: ALA (Referido en P2)

Para resolver problemas que contienen datos numéricos, como en el ejercicio 4, se necesitan los Axiomas de Cuerpo de los Números Reales como se muestra en la siguiente tabla.

TABLA VI
AXIOMAS DE CUERPO

Problema	Conocimiento algebraico y geométrico utilizado
P4	Los axiomas de cuerpo son los siguientes: Axioma 1. Propiedad conmutativa. $x + y = y + x$, $x * y = y * x$. Axioma 2. Propiedad asociativa. $x + (x + z) = (x + y) + z$, $x * (y * z) = (x * y) * z$. Axioma 3. Propiedad distributiva. $x * (y + z) = x * y + x * z$. Axioma 4. Existencia de elementos neutros. Existen dos números reales distintos, que se indican por 0 y 1 tales que para cada número real x se tiene: $0 + x = x + 0 = x$, $1 * x = x * 1 = x$ Axioma 5. Existencia de negativos. Para cada número real x existe un número real y tal que $x + y = y + x = 0$ Axioma 6. Existencia del recíproco. Para cada número real $x \neq 0$ existe un número real y tal que $x * y = y * x = 1$ Teorema: Ley cancelativa para la suma $(a + b = a + c) \to b = c$. Teorema: Ley cancelativa para el producto $(ab = ac \wedge a \neq 0) \to b = c$. Teorema: Los números naturales distintos de cero $2 \neq 0$ Teorema: Binomio cuadrado perfecto Para todo número real r se cumple la siguiente igualdad: $(r - 1)^2 = r^2 - 2r + 1$ Teorema de Pitágoras En un triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa.

Nota. Axiomas de cuerpo Se supone la existencia de dos operaciones, llamadas adición y multiplicación, que, junto con los números reales, forman la suma de x e y, notada por $x + y$, y el producto de x por y, notado por $x * y$.

III. RESOLUCIÓN DE LOS PROBLEMAS DESDE LA LÓGICA

D. *Problema 1*

En la figura que se muestra a continuación. Los puntos G y B dividen el segmento MR en tres partes congruentes, y los puntos G y P también dividen el segmento AC en tres partes congruentes. AG y BG son congruentes. Demuestre que los ángulos de vértices R y C son congruentes. (Describa detalladamente su razonamiento).

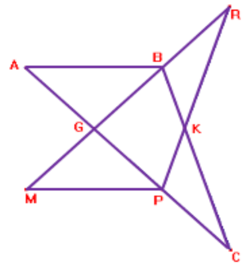

Fig. 1 Esquema del problema 1.

Este problema tiene una configuración inicial y demanda una prueba. Es posible identificar varias maneras de resolverlo, no obstante en todas ellas se requiere realizar asociaciones entre la configuración inicial y afirmaciones matemáticas que relacionen congruencia de segmentos, de ángulos y de triángulos. La configuración inicial cumple un papel descriptivo, ya que ayuda a contextualizar el enunciado y un papel heurístico para la determinación de una subconfiguración relevante.

En cuanto a la organización lógica del discurso de la solución del problema 1 se tiene los siguientes pasos:

1. Los datos son:

$$MG = GB, GB = BR, AG = GP, GP = PC, AG = BG \quad (1)$$

2. Las rectas y, en particular, la recta RG, poseen la propiedad aditiva, se puede afirmar que:

$$GR=GB+BR \quad (2)$$

3. Realizando reemplazos convenientes, se obtiene:

$$RG=GB+GR \quad (3)$$
$$RG=AG+AG \quad (4)$$

4. La propiedad aditiva de la recta CG, se puede afirmar que:

$$CG=GP+PC \quad (5)$$

5. Realizando un reemplazo conveniente, se obtiene:

$$CG=AG+PC \quad (6)$$

6. En virtud de la propiedad transitiva de la igualdad y utilizando los datos, se puede sostener que:

$$PC=AG \quad (7)$$

7. Reemplazando esto en la ecuación (5), se obtiene:

$$CG=AG+AG \quad (8)$$

8. Aplicando la propiedad transitiva de la igualdad en la ecuación (3) y en la ecuación (7), se produce:

$$CG=RG \quad (9)$$

9. Haciendo uso de la propiedad transitiva en los datos, se obtiene:

$$BG=GP \quad (10)$$

10. Por la propiedad reflexiva de la igualdad, se afirma que:

$$\measuredangle BGP=\measuredangle BGP \quad (11)$$

11. Vemos que las tres condiciones para aplicar el teorema LAL a los triángulos GRP y GBC se cumplen:

$$CG=RG \wedge BG=GP \wedge \measuredangle BGP=\measuredangle BGP \quad (12)$$

12. Aplicamos el teorema LAL a los triángulos GRP y GBC se infiere por modus ponens que:

$$\measuredangle R=\measuredangle C \quad (13)$$

B. *Problema 2*

En el cuadrado ABCD, los puntos E, F, K y L verifican que EK es perpendicular a LF. Demuestre que EK y LF son congruentes.

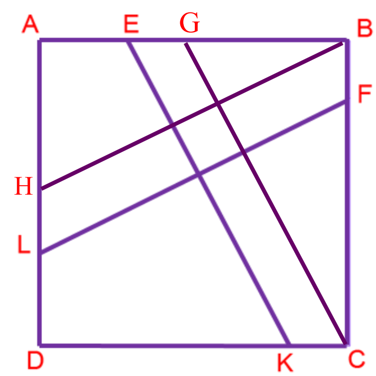

Fig. 2 Esquema del problema 2.

En este problema se adjunta una configuración inicial y demanda una prueba. El procedimiento requiere una aprehensión operativa de cambio figural, para visualizar la subconfiguración relevante que da la idea de solución del problema.

El papel de la configuración inicial es descriptivo, ya que ayuda a contextualizar el enunciado. El papel heurístico lo cumple la configuración después de realizar la aprehensión operativa de cambio figural asociada al Teorema de Pitágoras, lo que es una dificultad inicial y de no superarla el estudiante no podrá resolver el problema En este problema la configuración inicial puede dificultar la identificación de las configuraciones relevantes.

En cuanto a la organización lógica del discurso de la solución del problema 1 se tiene los siguientes pasos:

1. Los datos son que la recta EK es perpendicular a la recta LF, la recta AB, AD son paralelas a las rectas AG y BC respectivamente, que el segmento AB, BC, DC y AD son congruentes y los ángulos ∡A, ∡B, ∡C y ∡D son congruentes e iguales a 90°.

2. Por construcción se tiene que las rectas CG, BH son paralelas a EK y LF.

3. Juntando convenientemente lo demostrado, se tiene que la recta AB y CG son paralelas a DC y EK. 4. Al aplicar la definición del paralelogramo al cuadrilátero EGCK. Como EG pertenece a AB, y CK pertenece a DC, se obtiene que la recta EG y CG son paralelas a KC y EK. Por lo tanto, EGCK, es paralelogramo.

5. Por el Teorema Paralelogramo y por Modus Ponens se infiere que:

$$GC=EK \tag{14}$$

6. De la misma manera se demuestra que LHBF es paralelogramo, y se obtiene que:

$$BH=LF \tag{15}$$

7. Por el Teorema de ángulos, las rectas BH y LF son paralelas, y LF es perpendicular a EK. Por lo tanto, la recta HB también es perpendicular a EK.

8. Las rectas EK y CG son paralelas, y EK es perpendicular a LF. Por lo tanto, la recta CG también es perpendicular a LF.

9. Por el Teorema de ángulos, los ángulos GCB y ABH, puesto que sus lados AB y BC, BH y CG son perpendiculares entre sí. Gracias al Modus Ponens se obtiene:

$$\measuredangle GCB=\measuredangle ABH \tag{16}$$

10. De las siguientes ecuaciones:

$$AB=BC \wedge \measuredangle A=\measuredangle B \wedge \measuredangle GCB=\measuredangle ABH \tag{17}$$

11. Por el Teorema ALA aplicado a los triángulos GBC y AHB. Como cumplen las condiciones necesarias, por Modus Ponens se infiere:

$$CG=BH \tag{18}$$

12. Usando la Propiedad Transitiva de la igualdad y lo demostrado en la ecuación (15), se determina que:

$$CG=LF \tag{19}$$

13. Usando la propiedad transitiva de la igualdad y lo demostrado en el paso 7, deducimos que:

$$EK=LF \tag{20}$$

C. Problema 3

En la siguiente figura se verifica que los ángulos LKQ, LQK y LQM son congruentes entre sí. También se sabe que el ángulo KLQ es congruente con el MLN. Demuestre que los segmentos QM y KN son congruentes.

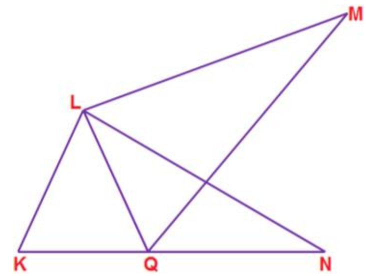

Fig. 3 Esquema del problema 3.

Este es un problema que presenta una configuración inicial, que durante su resolución cumple un papel descriptivo (permite contextualizar el problema) y un papel heurístico pues las subconfiguraciones relevantes (los triángulos ΔKLN y ΔQLM) se solapan, siendo una dificultad para su identificación. Por otro lado, estas subconfiguraciones son complementarias (con su unión forman toda la configuración inicial). La verificación de las hipótesis necesarias para aplicar el criterio de congruencia de triángulos A.L.A. se apoya en la identificación de los dos triángulos.

1. Los datos son:

$$\measuredangle LKQ=\measuredangle LQK \tag{21}$$

$$\measuredangle LQK=\measuredangle LQM \tag{22}$$

2. En virtud de la Propiedad Transitiva de la igualdad, podemos inferir que:

$$\measuredangle LKQ=\measuredangle LQM \tag{23}$$

3. Aplicando el Teorema Triángulo isósceles al triángulo KLQ, puesto que sus ángulos de la base son iguales entre sí. Se produce:

$$KL=LQ \tag{24}$$

4. En virtud de la Propiedad Aditiva de los ángulos, deducimos que:

$$\measuredangle KLN=\measuredangle KLQ+\measuredangle QLN \tag{25}$$

$$\measuredangle QLM=\measuredangle QLN+\measuredangle NLM \tag{26}$$

5. Al aplicar el Teorema Lógico 1 a los ángulos KLQ y MLN:

$$\measuredangle KLQ+\measuredangle QLN=\measuredangle MLN+\measuredangle QLN \tag{27}$$

6. Al reemplazar se infiere:

$$\measuredangle KLN=\measuredangle MLN+\measuredangle QLN \tag{28}$$

$$\measuredangle KLN=\measuredangle QLM \tag{29}$$

7. Por el teorema ALA a los triángulos KLN y QLM, por Modus Ponens se infiere que:

$$KN=QM \tag{30}$$

D. *Problema 4*

Dos círculos son tangentes interiores como se muestra en la figura. Calcula los radios de ambos círculos

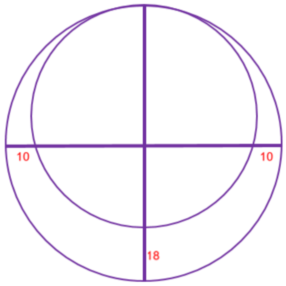

Fig. 4 Esquema del problema 4.

Este es un problema de calcular, cuenta con una configuración inicial y para su resolución requiere identificar una sub configuración relevante, es decir realizar una aprehensión operativa de cambio figural y asociar a ésta afirmaciones matemáticas (aprehensión discursiva). Para generar el discurso que resuelva el problema se requiere de la coordinación de aprehensiones operativas y discursivas, a través de varias identificaciones.

El problema 4 tiene más de una manera de resolución, presentamos una de ellas. (Figura 3. 6). La configuración que se obtiene al construir el radio interior cumple el papel heurístico que produce la idea que resolverá el problema. Las sub configuraciones presentes (ʘ (A, r) y ʘ (O, R)), juntas establecen que los círculos son tangentes internamente. Para la determinación de los radios se debe descomponer la figura en círculos y aplicar el teorema de Pitágoras junto con suma de segmentos. Al contar con datos numéricos y dado que se solicita la medida de los radios de los dos círculos, se movilizan los registros algebraico y geométrico.

1. Se tiene que el $\measuredangle 0=90°$, el segmento BC=10 y el segmento ED=18.

2. En virtud de la aditividad de la longitud de una recta, se puede escribir que:

$$R=x+10 \tag{31}$$

3. Aplicando el Teorema Lógico 2 en el paso 2, se puede inferir:

$$R-10=x \tag{32}$$

4. Por la Aditividad de la longitud de una recta, se puede inferir que:

$$2r+18=2R \tag{33}$$

5. Por la Propiedad Distributiva de números reales (el Axioma 3), aplicado en el paso 5, se puede deducir que:

$$2(r+9)=2R \tag{34}$$

6. Usando la Ley Cancelativa del producto de números reales en el paso 6, se puede deducir que:

$$r+9=R \tag{35}$$

7. La Propiedad Conmutativa de la suma de números reales, aplicada en el paso 6, nos permite inferir que:

$$9+r=R \tag{36}$$

8. Por el Teorema Lógico 2, deducimos que:

$$(9+r)-r=R-r \tag{37}$$

9. La Propiedad Asociativa de la suma de números reales, aplicada en el paso 8, se infiere que:

$$9+(r-r)=R-r \tag{38}$$

10. Por el Axioma 5 sabemos que:

$$r-r=0 \tag{39}$$

11. Realizando este reemplazo en el paso 9, obtenemos:

$$9+0=R-r \tag{40}$$

12. Por el Axioma 4 se tiene:

$$9+0=9 \tag{41}$$

13. Realizando el reemplazo en el paso 11, obtenemos:

$$9+R-r \tag{42}$$

14. En virtud de la Aditividad de la longitud de una recta, se infiere:

$$AO+r=R \tag{43}$$

15. Por el Teorema Lógico 2, deducimos que:

$$AO=R-r \tag{44}$$

16. Por la Propiedad Transitiva de la igualdad, aplicada a los pasos 13 y 15, llegamos a conocer que el segmento AO es igual a 9.

17. En virtud de los datos, expuestos en el paso 1, el triángulo AOB es rectángulo.

18. Aplicamos el Teorema de Pitágoras al triángulo AOB:

$$AO^2+x^2=r^2 \tag{45}$$

19. Realizando el reemplazo del paso 16 en el paso 18, se obtiene:

$$9^2+x^2=r^2 \tag{46}$$

20. Reemplazamos el paso 3 en el paso 19, se produce:

$$9^2+(R-10)^2=r^2 \tag{47}$$

21. Realizando el reemplazo del paso 7 en el paso 20, obtenemos:

$$9^2+((9+r)-10)^2=r^2 \tag{48}$$

22. Haciendo uso de la Propiedad Conmutativa de la suma de los números reales en el paso anterior, se produce:

$$9^2+((r+9)-10)^2=r^2 \tag{49}$$

23. Usando la Propiedad Asociativa de la suma de los números reales en el paso anterior, se produce:

$$9^2+ (r\,(9-10))^2=r^2 \tag{50}$$

24. Por definición, 9-10=-1

25. Realizando el reemplazo correspondiente, averiguamos que:

$$9^2+(r-1)^2=r^2 \tag{51}$$

26. Por el binomio cuadrado perfecto se obtiene que:

$$r^2-2r+1=(r-1)^2 \tag{52}$$

27. El reemplazo correspondiente en el paso 25 nos lleva a:

$$9^2+(r^2-2r+1)=r^2 \tag{53}$$

28. El Axioma de los Elementos Neutros de los números reales nos permite escribir que:

$$9^2+(r^2-2r+1)=0+r^2 \tag{54}$$

29. Haciendo uso de la Propiedad Conmutativa de la suma de los números reales en el paso anterior, se produce:

$$9^2+(-2r+1+r^2)=0+r^2 \tag{55}$$

30. La Propiedad Asociativa de la suma de los números reales transforma el resultado anterior en el siguiente:

$$(9^2-2r+1)+r^2=r^2 \qquad (56)$$

31. La Ley Cancelativa le da una nueva forma al resultado del paso 30.

$$9^2-2r+1=0 \qquad (57)$$

32. La Propiedad Conmutativa de la suma de los números reales lo modifica aún más:

$$9^2+1-2r=0 \qquad (58)$$

33. El Teorema Lógico 1 permite sumar 2r a ambos lados de esta igualdad. Se obtiene:

$$9^2+1=2r \qquad (59)$$

34. La Ley Cancelativa del producto obtiene un radio es 41.

35. Aplicando la regla de inferencia de Modus Ponens a los pasos anteriores, se produce: 41=r.

36. Se reemplaza en 8, se produce que el radio es igual a R=9+41=50.

37. La Propiedad Transitiva de la igualdad nos asegura, entonces, que el radio R es igual a 50.

38. La Propiedad Simétrica de la igualdad, aplicada a los pasos 35 y 36, se asegura que el radio r es 41 y el radio R es igual a 50.

39. Con los resultados anteriores, se infiere la respuesta de r=41 y R=50.

E. Resultados y Discusiones

Los resultados se centran en base al discurso desarrollado por el estudiante. Este proceso puede ser realizado en un registro estrictamente simbólico o en un registro de lenguaje natural. La organización sistemática de la estructura del discurso se realiza a través de la observación de los elementos componentes del discurso. El discurso que presenta el estudiante puede no estar ordenado. Las evidencias cognitivas identificadas, y que sirven de insumos para el análisis, han sido agrupadas con el criterio de que cada una tenga el estatus de hipótesis, afirmación matemática o tesis. A partir de esta agrupación, se procedió a la identificación y posterior organización de los diferentes axiomas teoremas y reglas de inferencias de la lógica. El análisis de la organización del discurso generado por el estudiante, al resolver problemas de geometría, no requiere considerar diferencias entre problemas de probar y empíricos, ya que se está realizando una aplicación de las reglas de la lógica matemática que son válidas en todos los registros semióticos [13].

A continuación, se presentan cuatro tablas que contienen el cumplimento de reglas lógicas de los veinte estudiantes, en los diferentes problemas planteados.

TABLA VII

CARACTERÍSTICAS LÓGICAS PROBLEMA 1

Características Lógicas	Problema 1
Axioma Lógico Aditivo	E01, E02, E03, E04, E05, E06, E07, E08, E09, E10, E11, E12, E13, E14, E16, E18, E19, E20 (18/20) 90%
Axioma Lógico transitivo	E02, E03, E04, E05, E06, E07, E08, E09, E11, E12, E13, E14, E16, E17, E18, E19, E20 (17/20) 85%
Axioma Lógico Reflexivo	E01, E02, E03, E04, E05, E06, E07, E08, E09, E11, E12, E13, E14, E15, E16, E18, E19, E20 (18/20) 90%
Identificación de teoremas lógicos 2.	E01, E02, E03, E04, E05, E06, E07, E08, E09, E11, E12, E13, E14, E16, E18, E19, E20 (17/20) 85%
Cumplimiento del Modus Ponens	E01, E02, E03, E04, E05, E06, E07, E08, E09, E10, E11, E12, E13, E14, E16, E18, E19, E20 (18/20) 90%

TABLA VIII

CARACTERÍSTICAS LÓGICAS PROBLEMA 2

Características Lógicas	Problema 2
Axioma de Cuerpo 1.	E01, E02, E03, E04, E05, E07, E08, E09, E10, E12, E13, E14, E15, E16, E17, E18, E19, E20 (18/20) 90%
Cumplimiento del Modus Ponens	E02, E03, E04, E05, E07, E08, E09, E11, E12, E13, E14, E15, E19, E20 (14/20) 70%
Identificación del teorema lógico 2.	E01, E02, E03, E04, E05, E07, E08, E09, E10, E13, E16, E19 (12/20) 60%
Axioma Lógico transitivo	E01, E02, E03, E04, E05, E07, E08, E09, E12, E13, E14, E15, E16, E19, E20 (15/20) 75%

TABLA IX

CARACTERÍSTICAS LÓGICAS PROBLEMA 3

Características Lógicas	Problema 3
Axioma Lógico Aditivo	E02, E03, E04, E05, E06, E07, E08, E09, E12, E13, E14, E17, E18, E20 (14/19) 73,7%
Cumplimiento del Modus Ponens	E02, E03, E04, E06, E07, E08, E09, E14, E17 (9/19) 47,4 %
Identificación de teoremas lógicos 1.	E01, E02, E03, E04, E08, E09, E11, E12, E14, E17, E18, E19, E20 (13/19) 68,4 %
Axioma Lógico transitivo	E02, E03, E04, E05, E06, E07, E08, E09, E13, E14, E16, E17, E18, E19, E20 (15/19) 78,9 %

TABLA X

CARACTERÍSTICAS LÓGICAS PROBLEMA 4

Características Lógicas	Problema 4
Axioma Lógico Aditivo	E01, E02, E04, E05, E06, E07, E08, E09, E12, E13, E14, E17,

	E19, E20 (14/17) 82,35%
Axioma Lógico transitivo	E01, E02, E04, E05, E06, E07, E08, E09, E11, E12, E13, E14, E18, E19, E20 (15/17) 88,23%
Axioma Lógico Reflexivo	E01, E02, E04, E05, E06, E08, E11, E13, E14, E16, E17 (11/17) 64,7%
Propiedad Conmutativa	E01, E02, E04, E05, E06, E09, E11, E13, E14, E18, E19 (11/17) 64,7%
Propiedad Asociativa	E01, E02, E05, E14 (4/17) 23,5 %
Cumplimiento del Modus Ponens	E07, E08, E14 (3/17) 17,6 %
Teorema de Pitágoras al triángulo	E01, E02, E07, E08, E09, E13, E14, E16, E17 (9/17) 52,94%
binomio cuadrado perfecto	E02, E07, E08, E09, E14, E16, E17, E18, E19 (9/17) 52,94%

El análisis de la herramienta reveló que los estudiantes de ingeniería, a pesar de la capacitación formal en lógica matemática, aplicaban el razonamiento pragmático cuando se les daba silogismos para resolver. La preferencia por el razonamiento pragmático genera cierta preocupación sobre su capacidad para tomar buenas decisiones de diseño en sus vidas laborales. Aunque los requisitos lógicos estrictos no son necesarios en el razonamiento cotidiano, la investigación científica y la toma de decisiones profesionales en ingeniería y gestión requieren una estrecha adhesión a las reglas lógicas. A pesar de que gran parte de la comunicación en la ingeniería hace un uso intensivo de los gráficos y la expresión gráfica formalizada, el diseño debe seguir principios lógicos.

La necesidad del pensamiento lógico en la vida profesional, junto con el bajo rendimiento de los grupos estudiantiles, lleva a la conclusión de que el pensamiento lógico y sistemático debería enfatizarse más en la educación. Los ingenieros deben poder seleccionar una forma de pensar apropiada en cada situación, y poder alternar entre los modos de pensamiento cotidiano, el pensamiento formal estricto y la resolución de problemas heurísticos y creativos. Una buena capacidad para reflexionar sobre las funciones cognitivas y las altas habilidades metacognitivas es indispensable. Por lo tanto, los objetivos de desarrollar las habilidades metacognitivas deben abordarse explícitamente en el plan de estudios. El estudio también implica que el lenguaje afecta la capacidad en el razonamiento formal más de lo esperado. Las personas pueden aplicar diferentes tipos de pensamiento cuando usan el lenguaje natural y el lenguaje algebraico.

IV. Conclusiones

Este estudio corrobora la necesidad de un conocimiento profundo del lenguaje para un desempeño preciso en las tareas de razonamiento. El resultado sugiere que el lenguaje natural y el algebraico como medio de estudio tienen un efecto más fuerte sobre el aprendizaje en ciencia e ingeniería de lo que comúnmente se cree. Esta premisa conlleva a que se deba prestar más atención a los modos de instrucción en los programas de estudio del lenguaje algebraico en general. Sin embargo, se necesitan más estudios para confirmar y explicar en qué medida el lenguaje algebraico influye en el aprendizaje.

Sin duda la configuración heurística afecta el pensamiento lógico deductivo, se observa que los estudiantes pueden utilizar el axioma reflexivo, pero no lo indican en su discurso formal.

Para organizar lógicamente el discurso que se genera al resolver problemas de probar en geometría, necesitamos: las reglas de inferencia, los axiomas y los teoremas de la lógica, los teoremas de la geometría. En cambio, los problemas de búsqueda requieren: las reglas de inferencia, los axiomas y los teoremas de la lógica, los teoremas de la geometría y los axiomas y los teoremas de números reales.

Esta diferencia se debe al hecho de que los problemas de búsqueda incluyen datos numéricos.

La razón por la que en el problema 1 se tiene mayor uso de la lógica se basa en el hecho de que, en los problemas de búsqueda, el valor buscado se incluye en el proceso de la búsqueda desde el comienzo, dándole el nombre de una incógnita. Es decir, desde el mismo inicio se supone que el valor buscado existe, aunque, por el momento, es desconocido. Ello constituye la esencia del método analítico.

Por otra parte, en los problemas de probar, la relación que se desea demostrar no se supone existente. Ello constituye la esencia del método sintético. En él, tal suposición se consideraría una petición de principio, por tal motivo los estudiantes tienen problema de utilizar la lógica en la resolución de este tipo de problemas.

Organizando el discurso de la resolución de un problema de manera lógica, se pretende enseñar al estudiante a concientizar cuáles de las propiedades que se usan son geométricas, cuáles son lógicas y cuáles son numéricas.

De este modo se pretende que la enseñanza de la Geometría sea más efectiva, más esclarecida, más consciente.

Referencias

[1] R. Guibourg, “Lógica, proposición y norma,” Buenos Aires: Astrea, 2008, pp. 100-150.

[2] K. Hakkarainen, T. Palonen, S. Paavola y E. Lehtinen, “Communities of Networked Expertise. Professional and Educational Perspectives,” *Educational Technology Research and Development*, vol. 55, no. 4, pp. 391-393, Aug 2007.

[3] J. Holvikivi, “Logical reasoning ability in engineering students: a case study,” IEEE TRANSACTIONS ON EDUCATION, vol. 50, p. 27, 2007.

[4] M. Romero, “ICT and meaningful science learning,” Enseñanza en las ciencias, no 32, pp. 101-115, 2014.

[5] R. Duval, Semiosis et pensée humaine, Berne: Peter Lang, 1995.

[6] R. Duval, *Comprensión y aprendizaje en matemáticas: prespectivas semióticas seleccionadas*, Universidad del Valle, 2016.

[7] J. PLATO, “Gentzen’s proof systems: byproducts in a work of genius,” *The Bulletin of Symbolic Logic*, vol. 18, no 3, p. 367, 2012.

[8] G. Torregrosa, “Coordinación de procesos cognitivos en geometría,” *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, vol. 10, no 2, pp. 275-300, 2007.

[9] F. Clemente, S. Llinares y G. Torregrosa, “Visualization and Configural Reasoning,” vol. 31, no 51, pp. 497 - 516, 2017.

[10] A. Mesquita, “On conceptual obstacles linked with external representation in geometry,” *Mathematical Behavior*, vol. 17, no 2, pp. 183-195, 1998.

[11] F. Clemente y S. Llinares, “Formas del discurso y razonamiento configural de estudiantes para maestros en la resolución de problemas de geometría,” *Enseñanza de las Ciencias*, vol. 33, no 1, pp. 9-27, 2015.

[12] F. Salvador, “Pre-service primary teachers’ ways of discourse and configural reasoning in solving geometrical problems,” *enseñanza de las ciencias*, vol. 33, no 1, pp. 9-27, 2015.

[13] R. Duval, “Understanding the Mathematical Way of Thinking,” The Registers of Semiotic Representations, Gewerbestrasse: Springer, 2017.