

Designing a Modeling Activity in Differential Equations Course from the Perspective of System Dynamics

Ruth Rodríguez, Dra.¹, and Rafael Bourguet, Dr.¹

¹ Tecnológico de Monterrey, México, ruthrdz@itesm.mx, bourguet@itesm.mx

Abstract— This paper aims to present a case that has been designed to be implemented in a course Differential Equations in a private university in Northeast Mexico. The activity has been designed based on some systems thinking and skills in order to develop generic skills needed for future engineers of the twenty-first century; most notably that of holistic thinking. The idea of merging the differential equations and dynamic systems is to provide new meanings in order to ED but also to develop new skills in class to enable the future engineer to deal with the new exigencies that society imposes. Through a qualitative study through interviews, classroom observations some early results of such implementation is. It is observed that students are flattered to know a technological tool to give a new mathematical object representing the differential equation and appreciates being able to solve real-life problems of a social nature.

Keywords— *Differential Equations, Modeling, Dynamic Systems.*

Digital Object Identifier (DOI): <http://dx.doi.org/10.18687/LACCEI2015.1.1.232>

ISBN: 13 978-0-9822896-8-6

ISSN: 2414-6668

13th LACCEI Annual International Conference: “Engineering Education Facing the Grand Challenges, What Are We Doing?”
July 29-31, 2015, Santo Domingo, Dominican Republic **ISBN:** 13 978-0-9822896-8-6 **ISSN:** 2414-6668
DOI: <http://dx.doi.org/10.18687/LACCEI2015.1.1.232>

Diseño de una actividad de modelación en un curso de Ecuaciones Diferenciales desde una perspectiva de Dinámica de Sistemas

Ruth Rodríguez, Dra.¹

¹Tecnológico de Monterrey, México, ruthrdz@itesm.mx

Rafael Bourguet, Dr.¹

¹Tecnológico de Monterrey, México, bourguet@itesm.mx

Abstract– El presente trabajo tiene como objetivo el presentar un caso que ha sido diseñado para ser implementado en un curso de Ecuaciones Diferenciales en una Universidad privada del Noreste de México. La actividad ha sido diseñada tomando como base algunas habilidades de pensamiento sistémico y con el objetivo de desarrollar habilidades genéricas necesarias para los futuros ingenieros del siglo XXI; muy en particular la de pensamiento holístico. La idea de fusionar las ecuaciones diferenciales y dinámica de sistemas, es para dotar de nuevos significados al objeto de ED pero también de desarrollar nuevas habilidades en clase que permitan al futuro ingeniero el hacer frente a las nuevas exigencias que la sociedad le impone. A través de un estudio cualitativo por medio de entrevistas, observaciones en clase se muestran algunos primeros resultados de tal implementación. Se observa que los estudiantes encuentran favorecedor el conocer una herramienta tecnológica que permita dotar de una nueva representación al objeto matemático Ecuación Diferencial y aprecia el poder resolver problemas de la vida real de naturaleza social.

Palabras claves: Ecuaciones Diferenciales, Modelación, Dinámica, Sistemas.

I. INTRODUCCIÓN

El presente trabajo pretende mostrar resultados alrededor de un diseño de un curso innovador de Ecuaciones Diferenciales a través de la modelación y la simulación computacional (ver referencia 4). Este curso se ha implementado desde hace algunos años en una universidad privada del noreste de México y pretende particularmente el hacer evidentes a los alumnos la aplicación de este objeto matemático en diferentes áreas, en especial, en aquellas de naturaleza física y en los últimos meses aquellos de naturaleza social. El estudio presentado es analizado desde un paradigma cualitativo.

Primeramente, a través de una aproximación cualitativa con entrevista a experto (ver referencia 19), observaciones de cursos "de especialidad", análisis de libros de texto, tecnologías y lenguajes utilizados y discusiones colegiadas con un experto nos lleva a identificar aspectos claves de la modelación que suelen ser de interés para el futuro ingeniero. En un segundo momento, se detallará el diseño colaborativo de actividades de modelación de un ingeniero y un profesor de matemáticas (ED) las cuales han permitido establecer una

serie de actividades que proponen el que los alumnos modelen la "realidad" que los rodea o que eventualmente será parte de su cotidiano en su ambiente laboral; se presenta aquí una de estas actividades. Lo anterior tomando en cuenta dos aspectos: las ideas claves de la parte matemática sobre las EDs y sobre todo las prácticas de modelación de valor el futuro ingeniero del siglo XXI (ver referencias 1, 2 y 3).

Finalmente, como un tercer punto, se muestran resultados de una encuesta enmarcadas en un paradigma cualitativo posterior a la implementación de estas actividades a lo largo de un año (2014) en estudiantes de ingeniería de un curso de ED, en los cuales principalmente se desea validar el aporte de este enfoque de enseñar ED a través de la modelación y la simulación con prácticas fundamentales de modelación desde un punto de vista ingenieril.

Los resultados aportan evidencia de aportes positivos (ventajas) de este diseño de curso en cuanto la percepción de los alumnos en cuanto la utilidad de estas actividades en su comprensión del concepto central del curso como lo es la ED y sobre todo de la aplicación de esta herramienta en problemas y contextos más cercanos a su entorno laboral futuro. Algunas áreas de oportunidad son también señaladas lo que consideramos que puede ser objeto de investigación en estudios futuros. Se parte de una idea base del panorama general sobre el entorno global donde se espera se desempeñe el actual ingeniero en formación, que le demanda desarrollar habilidades genéricas importantes, no solo las de naturaleza profesional y disciplinar, en nuestro caso, de matemáticas (ver referencias 1, 2 y 3).

II. SOBRE PENSAMIENTO SISTÉMICO Y DINÁMICA DE SISTEMAS

Sobre el trabajo en pensamiento sistémico, se retoman a autores clásicos como las referencias 5, 6, 7 y 8 sobre el tema de pensamiento sistémico y holístico. En particular, nos interesa enfocarnos en esta habilidad muy importante y necesaria en el siglo XXI ya que se espera que los alumnos puedan resolver problemas complejos tomando en cuenta todos los aspectos posibles del mismo, mirando el fenómeno

de manera diversa y viendo el gran cuadro de todas y cada una de las cuestiones que ahí importan. Es en base a estos autores, y el trabajo previo al respecto de la referencia 18, que hemos continuado este trabajo.

III. SOBRE LA PROBLEMÁTICA EN LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

Se trabaja bajo el supuesto de que está ampliamente reportado en la literatura desde hace décadas atrás (ver referencias 9 y 10) el gran énfasis en la enseñanza de las matemáticas en los procesos meramente analíticos. El uso de tecnología vino a permitir poner en juego otras representaciones de gran interés como la numérica y gráfica. Sin embargo, a pesar de estos avances, son pocas las propuestas que permiten cambiar de manera significativa esta realidad en las aulas de la actualidad. Para el nivel superior, en el área de formación de ingenieros, un curso terminal como lo es el de Ecuaciones Diferenciales, asume que es posible poner en juego muchas otras representaciones del mismo objeto: no solo la parte analítica, la numérica y gráfica; sino también la verbal cuando ésta representa un fenómeno real. Hay propuestas muy valiosas e innovadoras como 11 y 12 que permiten poner en juego otras cuestiones que creemos fundamentales en este curso como lo es la modelación de fenómenos diversos (físicos y sociales) así como el uso de simuladores apropiados para conocer más sobre el fenómeno en cuestión. Diversos trabajos apoyan este tipo de enfoque innovador; por un lado las referencias 4 y 13 permiten dar todo un apoyo en la parte de modelación para el aprendizaje de las matemáticas. Trabajos importantes como las referencias 14, 15, 16, 17 y 18 permiten fusionar desde años atrás el enfoque de dinámica de sistemas para re-visitar aspectos claves del conocimiento matemático. Este mismo trabajo es un trabajo adicional a uno ya realizado antes y reportado en la referencia 3. Para ello tomaremos como otros documentos base libros de texto como las referencias 5, 12, 18, así como uso de un simulador de dinámica de sistemas muy particular como lo es el software Vensim (ver referencia 19) el cual al igual que los estudios planteados por las referencias 14, 17 y 18 asumen un lenguaje conocido basado en 4 conectores base: *stocks/acumuladores*; *flows/Flujos*; *variables/convertidores* y finalmente *arrows/conectores*. El lenguaje y un ejemplo específico se desarrollan en la siguiente sección.

Es importante señalar que el uso de este simulador es promovido en clase ya que cuenta con una versión gratuita educativa (PLE) que permite entonces el solicitar a cada uno de los alumnos de la clase el tenerlo instalado en su propio equipo de cómputo al momento de realizar la clase.

A. Sobre un ejemplo para introducir dinámica de sistemas en clase de matemáticas: el caso de un tanque con agua

Consideramos que un primer ejemplo a ser presentado a los alumnos para introducir de manera gradual el lenguaje de Vensim es el de un tanque con agua (el acumulador o *stock*) al

cual se le introduce agua con un cierto ritmo de entrada (*flow* o razón de cambio) y se le deja salir agua con un cierto ritmo (*flow*, razón o ritmo de salida). El esquema a través de Vensim sería el siguiente:

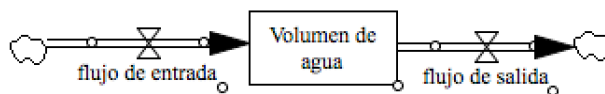


Fig. 1 Primer ejemplo visto en clase: tanque con agua

La ecuación diferencial (1) asociada sería la siguiente:

$$V = V(t) = \text{Volumen de agua}$$

$$F_e = \text{flujo de entrada}$$

$$F_s = \text{flujo de salida}$$

$$\frac{dV}{dt} = F_e - F_s \quad V(t = 0) = V_0 \quad (1)$$

B. Ejemplo de un tanque que tiene agua con sal (salmuera)

Poner explicación del mismo en español

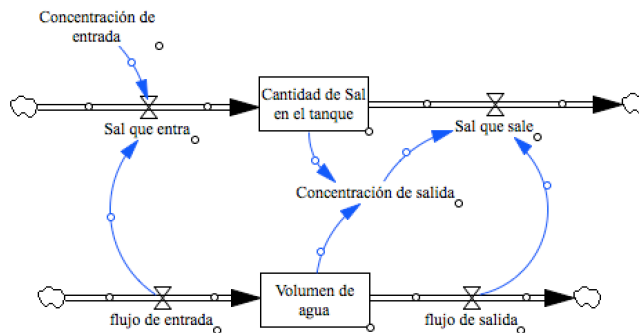


Fig. 2 Ejemplo 2 en la sesión inicial: tanque con salmuera

Donde

$$V = V(t) = \text{Volumen de agua}$$

$$F_e = \text{flujo de entrada}$$

$$F_s = \text{flujo de salida}$$

$$S = S(t) \text{ Cantidad de Sal en el tanque}$$

$$C_e = \text{concentración de entrada}$$

$$C_s = \text{concentración de salida, la cual es a su vez igual a Cantidad de Sal / Volumen de agua}$$

$$\text{Sal que entra} = C_e * F_e$$

$$\text{Sal que sale} = C_s * F_s$$

Las ecuaciones (2) serían:

$$\frac{dS}{dt} = C_E f_E - C_S f_S; S(t=0) = S_0$$

$$\frac{dS}{dt} = (C_E f_E) - (C_S f_S)$$

$$\frac{dS}{dt} = (C_E f_E) - \left(\left(\frac{S(t)}{V(t)} \right) * f_S \right)$$

$$\frac{dS}{dt} = (C_E f_E) - \left(\left(\frac{S(t)}{V_0 + (f_E - f_S) * t} \right) * f_S \right)$$

con
 $S(t=0) = S_0$

IV. LA ACTIVIDAD DISEÑADA

La actividad que se diseñó está basada en un ejercicio que aparece originalmente en la referencia [11] en el cual se plantea a los alumnos un escenario con tres posibles opciones.

Supongamos que una especie de pescado en un lago particular tiene una población que es modelada por un modelo logístico de población con una razón de crecimiento k , una capacidad de carga N y tiempo t en años. Ajusta el modelo para representar cada una de las siguientes situaciones:

Suponga que el parámetro de razón de crecimiento $k = 0.3$ y que la capacidad de carga N es 2500 en el modelo logístico de población. Suponga además que la población inicial es 2500.

- Si un tercio de la población de peces son capturados anualmente, ¿qué modelo predice el comportamiento a largo plazo de la población de peces?*
- Si el número de peces capturados cada año es proporcional a la raíz cuadrada del número de peces en el lago, ¿qué modelo predice el comportamiento a largo plazo de la población de peces?*
- Si 100 peces son capturados cada año, ¿qué modelo predice el comportamiento a largo plazo de la población de peces?*
- Cuál situación (a, b ó c) es la más dañina para el ambiente, justifica tu respuesta.*

Es importante señalar que el ejercicio original no contempla el último inciso, justamente ha sido agregado para que el estudiante tenga la opción de reflexionar sobre la situación real planteada y que pueda discutir con sus compañeros de equipo (máximo 3 estudiantes por equipo) sobre la mayor decisión a tomar en esta situación bajo las condiciones dadas en el problema.

A partir de este ejercicio se decidió diseñar un caso que se le presentará a los alumnos para que se resuelva en clase

Más pescados, más dinero ¿Qué estrategia seguir?

Por Rafael Bourguet (bourguet@itesm.mx)

Descripción del caso

En noviembre 10 del 2014, como responsable del Departamento de Cuidado Ambiental de su propia compañía, usted debe decidirse por la política a seguir para los próximos 8 años. Pasado mañana usted informará la decisión a la junta de inversionistas.

Su compañía se ha estado diversificando hacia el mercado de pescados enlatados. Ha encontrado una riqueza extraordinaria sobre esto en el lago que se encuentra a dos horas de sus oficinas centrales. Los Departamentos de Planeación, de Ingeniería y de Vinculación con la comunidad le entregaron sus recomendaciones la semana pasada. Usted está por evaluarlas y entonces comprometerse con una de ellas el día de hoy.

El lago y sus peces

El lago ha sido evaluado en su dinámica de población de peces. Se estima que su tasa máxima de recuperación es aproximadamente del 30% anual con una capacidad de carga de 2500. Actualmente, éste es el número de peces que tiene la población total. El sistema ecológico del lago se ha mantenido en equilibrio por varios años. Sin embargo, la calidad de vida de la gente que vive alrededor puede mejorarse significativamente con escuelas, pavimentación de caminos, un centro de salud. Emprender una iniciativa para generar riqueza a través de una fábrica de pescados enlatados ha sido bien visto por la comunidad. Usted ha trabajado el proyecto y sus inversionistas le escucharán pasado mañana.

Las recomendaciones de los Departamentos

Las recomendaciones para extracción de pescados del lago provienen del corporativo, específicamente, de los departamentos de planeación, ingeniería y vinculación con la comunidad. El primero recomienda pescar un tercio de la población total cada año. Esto con base a su tasa de recuperación máxima; el segundo, ha propuesto con base en su cálculos de balance de masas que la extracción del 30% de la raíz cuadrado de la población actual de peces es lo apropiada para una máxima obtención de utilidades y cuidado del medio ambiente. Y finalmente, el tercero, ha propuesto sólo sacar 100 peces cada año, pues es la manera convencional en que han trabajado los pescadores de la comunidad aledaña por muchos años.

La decisión y la estrategia a seguir

Su departamento de cuidado ambiental ha realizado la modelación en computadora de la dinámica poblacional de los peces en el lago. La curva logística ha logrado capturar la dinámica dominante de esta población. Ahora es momento de incluir las recomendaciones que tiene en el modelo y encontrar el nuevo punto de equilibrio, si es que hay alguno. La pregunta a responder es ¿Qué estrategia causa menos daño a la población de peces con el fin de poder tener un negocio sustentable por muchos años?

En la segunda sesión de implementación, se platica sobre el modelo logístico de población, y se propone la siguiente estructura que se espera sea retomada para modelar el caso propuesto.

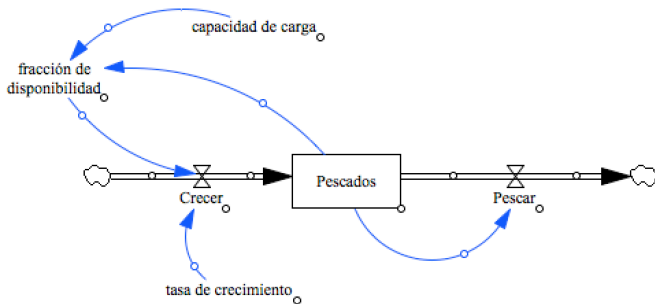


Fig. 3 Ejemplo de un modelo propuesto para modelar el caso planteado.

Donde

$$P = P(t) = \text{Peces} / \text{pescados}$$

$$CC = \text{capacidad de carga} = 2500$$

$$FD = \text{Fracción de disponibilidad} = (1 - \text{Peces} / \text{Capacidad de carga})$$

$$tc = \text{tasa de crecimiento} = 0.3$$

$$\text{Crecer} = tc * FD * P$$

$$\text{Pescar} = \text{hipótesis según casos a, b, c propuestas}$$

De los modelos matemáticos asociados a esta representación se encuentra una ecuación diferencial no lineal de primer orden de la siguiente forma:

$$\frac{dP}{dt} = \text{Crecer} - \text{Pescar}$$

$$\frac{dP}{dt} = (tc * FD * P(t)) - \text{Pescar}$$

$$\frac{dP}{dt} = \left(tc * P(t) * \left(1 - \frac{P(t)}{CC} \right) \right) - \text{Pescar}$$

con

$$P(t = 0) = 2500 \quad (3)$$

De acuerdo a las 3 hipótesis planteadas en el caso, las ED para cada caso serían:

$$a) \frac{dP}{dt} = \left(0.3 * \left(1 - \frac{P(t)}{2500} \right) * P(t) \right) - \frac{P(t)}{3}$$

$$b) \frac{dP}{dt} = \left(0.3 * \left(1 - \frac{P(t)}{2500} \right) * P(t) \right) - 0.3 \sqrt{P(t)}$$

$$c) \frac{dP}{dt} = \left(0.3 * \left(1 - \frac{P(t)}{2500} \right) * P(t) \right) - 100$$

Es importante notar que las 3 ED son NO lineales, de ahí la dificultad de obtener la solución analítica por los métodos analíticos. Por lo que el uso del simulador Vensim es muy adecuado para resolver este caso y poder permitir que cada equipo de estudiantes tome una postura sobre la pregunta finalmente planteada:

¿Qué estrategia causa menos daño a la población de peces con el fin de poder tener un negocio sustentable por muchos años?

En la siguiente sección se relatan algunas respuestas obtenidas al respecto.

Se comparten aquí algunas respuestas esperadas al mismo, ilustramos las mismas con el simulador Vensim

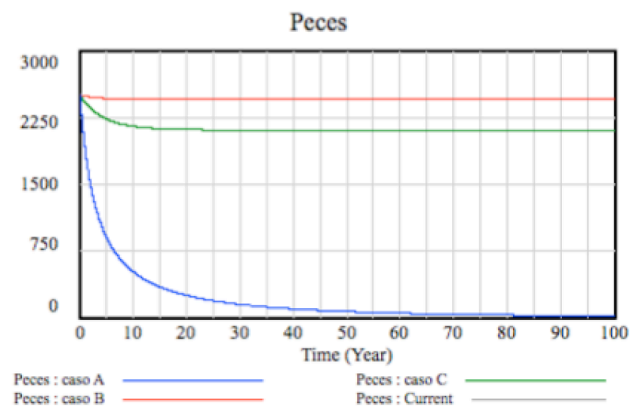


Fig. 4 Soluciones de las ED (3) con Vensim.

Es importante hacer notar que en esta imagen que finalmente obtuvieron los alumnos con el simulador durante su experiencia, es posible notar que la opción a) causa un daño muy fuerte al medio ambiente mientras que las otras dos se mantienen constantes. Por otro lado, la opción b) es menos dañina que la c). La c) se mantiene constante.

En lo que resta del escrito, deseamos hacer una reflexión al respecto los comentarios y decisiones tomadas por los alumnos al estudiar el caso en clase de Ecuaciones Diferenciales.

V. ALGUNAS PRIMERAS RESPUESTAS OBTENIDAS

Se realizó una implementación de esta actividad durante el semestre Enero-Mayo 2015 en dos grupos de Ecuaciones Diferenciales: Grupo 1 en modalidad Honors y G6. Es importante resaltar que la modalidad Honors significa que los alumnos tiene un promedio de 90/100 para tomar la materia y generalmente la componente internacionalización es altamente promovida (bilingües y estancia de 1 año en el extranjero antes de graduarse). La distribución de estudiantes se vería de la siguiente manera:

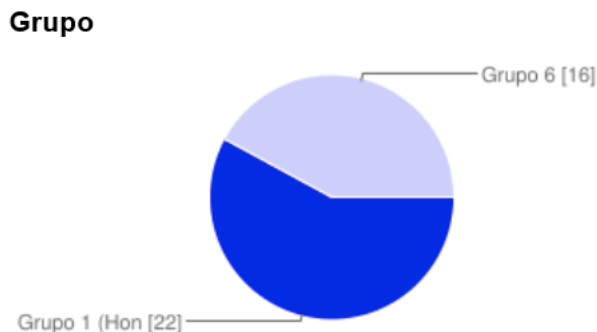


Fig. 5 Distribución de respuestas de los alumnos en 2015.

En total, se tuvieron 38 respuestas de parte de ellos.

En ambos grupos, los alumnos concluyeron que la opción B era menos dañina al igual que los alumnos del grupo 6. Sin embargo, lo que se desea rescatar en este escrito es más la parte de la riqueza de la discusión entre ellos y los equipos antes de tomar esta decisión.

Por ejemplo, aparece en la sesión de clase una discusión sobre lo que se busca como encargados de la empresa de pesca, si obtener un mayor ganancia desde el punto de vista financiero (pescar más peces, opción a) o si se desea cuidar el medio ambiente (opción b más recomendada). Finalmente una buena parte de ellos opinan que una opción “intermedia” es la opción c. Otra discusión importante fue si buscar un beneficio o estabilidad a corto-mediano plazo (8 años) o a largo plazo (noten como el dominio en el tiempo simulado fue de 100 años)

Algo interesante a resaltar fue en el grupo 6 que un par de equipos proponen soluciones alternativas variantes de las primeras 3 propuestas. Un alumno propone pesar en lugar de 100 peces al año, 150 (variante de la opción c). Previo a esta propuesta ellos varían los parámetros con el apoyo de Vensim, una cuestión que queríamos promover justamente con el uso del software en este caso.

Además, otro equipo propone el variar la opción c. En lugar de una constante de proporcionalidad de $k = 0.30$ en ese caso, se propone el variar este valor a 0.15, es decir, que la opción es nuevamente jugar con la constante de pesca para el caso de

que se decidiera pescar la raíz cuadrada de la población en el tiempo t (variante de la opción b).

Un alumno de Honors plantea la posibilidad de ampliar la visión del modelo logístico de población para este caso considerando posibles interacciones con otras especies en el mismo eco-sistema; una cuestión que es muy importante sobre todo si interesa justamente desde el punto de vista sistémico el considerar todos los factores involucrados y la conexión entre éstas.

Consideramos desde el punto de vista del objetivo de introducir pensamiento sistémico en clase de Ecuaciones Diferenciales, el uso de un simulador de Dinámica de Sistemas como Vensim y el abordar un caso como éste que permite discutir sobre cuestiones éticas y de desarrollo sustentable, que el objetivo inicial del trabajo se logra. No solo apoyamos a que los alumnos “vean” otras representaciones para el objeto matemático en cuestión (la ecuación diferencial); aprendan a usar a su favor herramientas tecnológicas diversas sino además se promueve que dentro del salón de clases se puedan poner en juego habilidades genéricas importantes como la de comunicación, al debatir sus ideas y posturas; las de pensamiento crítico, al iniciar a pensar en varios factores no considerados inicialmente en la estructura matemática propuesta si no a pensar más allá (holísticamente) de las fronteras naturales de las disciplinas al menos en el contexto escolar.

A continuación mostramos 2 análisis más que nos permiten complementar esta propuesta sobre las ventajas de implementar estas actividades descritas arriba (en particular el caso) en una clase de ED.

- a) Encuesta a los 28 alumnos participantes en el semestre EM2015 sobre 3 preguntas con escala tipo Likert (1 al 5, 1 favoreció mucho/5 no favoreció).
- b) Análisis cualitativo de 21 respuestas de alumnos ados preguntas abierta sobre ventajas y desventajas del uso del software en el salón de clases. Las hemos categorizado en algunos apartados que son acordes a una taxonomía previamente explicada y presentada en [18].

A) Estudio descriptivo

A continuación nos permitimos mostrar las respuestas de los alumnos respecto a 3 preguntas específicas.

Pregunta 1

¿El uso de cajas y flujos en el simulador te permite complementar tu visión de las ED?

- 1. Completamente de acuerdo
- 5. Completamente en desacuerdo

Las respuestas las mostramos en la siguiente figura:

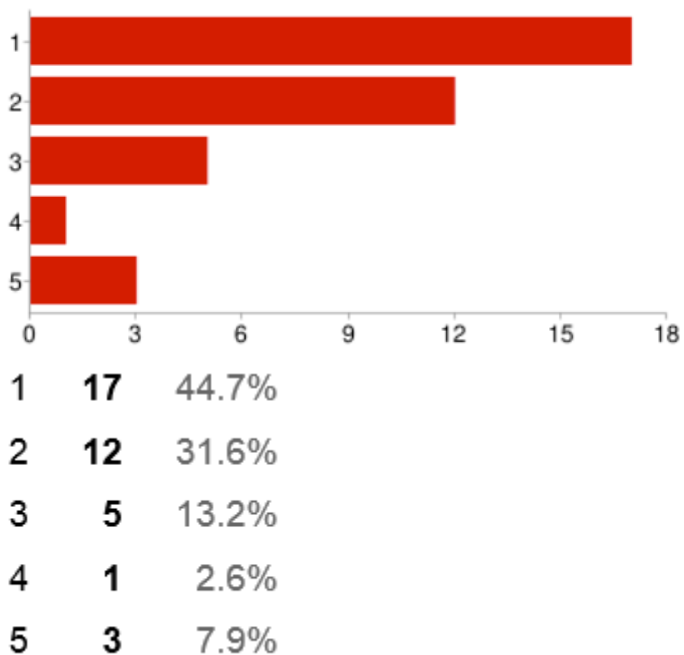


Fig. 6 Respuestas de los alumnos en EM2015 a la pregunta 1

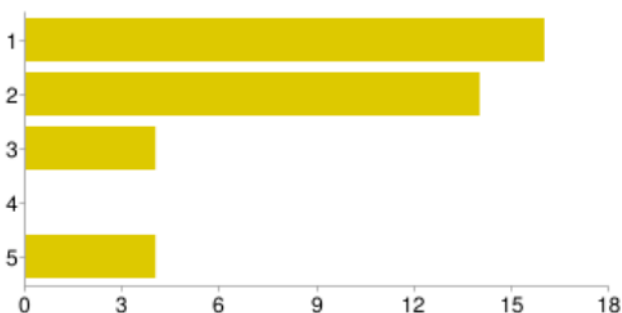
Los resultados muestran que el 76% del grupo manifiestan su acuerdo de que el uso del software le permite complementar su visión de las ED al permitirles tener una nueva representación gráfica de las mismas (diagramas cajas/flujo), algo que en el siguiente análisis se exploran las razones del mismo.

Pregunta 2

¿El software te permite tener una mejor comprensión de las ED?

1. Completamente de acuerdo
5. Completamente en desacuerdo

Las respuestas las mostramos en la siguiente figura:



1	16	42.1%
2	14	36.8%
3	4	10.5%
4	0	0%
5	4	10.5%

Fig. 7 Respuestas de los alumnos en EM2015 a la pregunta 2

En esta parte, un 79% de los estudiantes están de acuerdo que el software favorece el ampliar su comprensión del concepto ED el cual había sido más expuesta en clase sobre la estructura matemática (la ED en sí) y la solución analítica y gráfica que hacia otras cuestiones.

Finalmente, la pregunta 3

¿El software fue fácil de aprender a usar en clase?

1. Completamente de acuerdo
5. Completamente en desacuerdo

1	14	36.8%
2	10	26.3%
3	7	18.4%
4	5	13.2%
5	2	5.3%

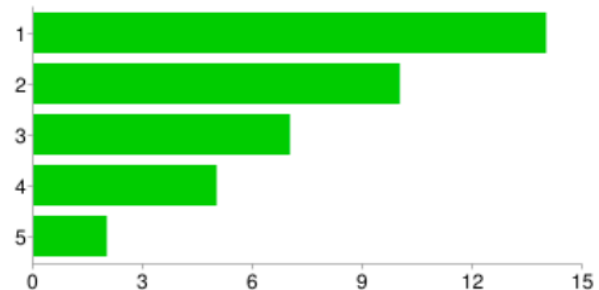


Fig. 8 Respuestas de los alumnos en EM2015 a la pregunta 3

En este punto, disminuye el porcentaje de acuerdo al respecto la facilidad del uso de software a 63%. Es importante hacer notar que el uso del software por primera vez se hace en una clase previa de 1.5 horas y que en la sesión 2 de 2 se solicita resolver el caso. En sus comentarios sobre áreas de oportunidad de la experiencia ellos proponen mayor tiempo de uso del mismo previo al caso, sugieren una segunda sesión antes del caso y además el introducir el mismo antes en el curso. En esta ocasión sucedió en la semana 15 de 16 del curso, a manera de cierre del mismo. Un área de oportunidad importante a retomar.

B) Estudio cualitativo

Un estudio cualitativo sobre las 21 respuestas que obtuvimos a las respuestas de los alumnos respecto a las ventajas y desventajas del uso del software como Vensim, del punto de vista de Dinámica de Sistemas y de la introducción de este tipo de problemas de naturaleza social en clase de matemáticas permite tener evidencias de la gran ventaja que supone para los alumnos el usar un sistema de esta naturaleza para poder entender con mayor claridad las dependencias de esta herramienta matemática, la importancia de variar los parámetros de la ecuación diferencial y tener diversas posibilidades y finalmente el poder concluir sobre esta oportunidad de lidiar con problemas más complejos en la clase a través del uso de esta herramienta y de métodos numéricos para poder conocer la solución de la ED.

A. Sobre la posibilidad de modelar fenómenos de naturaleza diversa (no solo física)

Me gustó manejar el software como una herramienta para ver el potencial del uso de ecuaciones diferenciales en diferentes aspectos profesionales, no solo los temas comunes de clases.

La abstracción lógica de los procesos, en la vida real, y el ambiente poco amigable del software a primera vista, lo que hace interesante observar la forma que dicho modelo "real" se complica al momento de modelarlo con todas sus variables. Siendo paralelo a su modelo matemático pudimos observar la otra cara de la moneda. Ver aplicaciones reales de ED con tanto apoyo tecnológico propicia un entendimiento claro y sustancial.

También considero que es una herramienta que nos podrá ayudar a aproximar los comportamientos de distintos sistemas cuando se traten de sistemas más complejos, los cuales podrían ser difíciles de resolver de alguna otra manera.

B. Sobre la posibilidad de usar un software específico como Vensim

El software Vensim es una poderosa alternativa para trabajar el pensamiento sistemático y crítico ayudando al usuario a organizar ideas y establecer variables. Este útil programa le asegura al usuario la convergencia de sus resultados y explorar el mundo de la matemática a través de la organización cognitiva y la esquematización visual.

C. Sobre la posibilidad de hacer un análisis cualitativo del fenómeno y ver conexiones

Algunas formas de expresar esto último fueron:

Me gusto el programa Vensim porque nos permite observar las conexiones dentro de los procesos de mezclas y visualizar el problema de una manera más general. También se me hace muy útil para poder visualizar las gráficas dentro de cada tanque y como se relacionan las razones de cambio dentro del sistema

D. Sobre el poder establecer una ED para modelar un fenómeno

El problema a mano llega a complicarse pero con este programa es sencillo comprender lo que está relacionado y los efectos en el tiempo que van a tener las diferentes variables.

El programa permite atacar el problema de una manera más didáctica.

Vensim es un software que si bien no da las ecuaciones diferenciales de manera directa, lo que permite es modelarlas y verlas, y eso fue lo que más me gustó, porque al hacerlo en clase todo se siente muy de fórmula y algunas cosas son difíciles de visualizar, o al utilizar otros software como el de la TI, solo ves un número, pero al utilizar el software lo acomodas y lo ves. Esto ayuda mucho porque al diseñar la ecuación no la escribes, sino que las relaciones en un sistema, con flechas, flujos, etc. y así se va construyendo en automático y eso te permite visualizar las relaciones de unas variables con otras.

E. Sobre la posibilidad de usar métodos numéricos para resolver la ED

En los comentarios, solo 4 alumnos comentan sobre la capacidad de producir tablas y 2 de ellos resaltan los métodos numéricos usados para encontrar la solución. Aunque esto es la base del software, llama nuestra atención que solo es mencionado pocas veces. Un alumno resalta el poco error en cálculos y la precisión del uso de software a pesar de los métodos numéricos.

Adicionalmente, por medio del empleo de métodos numéricos para hallar valores de ecuaciones diferenciales tales como el método de Euler o los métodos de Runge-Kutta, se despliegan tablas que permiten verificar los valores de las variables tanto dependientes como independientes, comprobándola con la solución analítica del sistema lineal de ecuaciones diferenciales, que por cierto, se resolvió utilizando el método de la transformada de Laplace

Así mismo creo muy conveniente el hecho de que puedan crearse tablas con precisiones, facilitando las predicciones

Algunas otras cuestiones interesantes que surgen durante el análisis de sus comentarios es respecto a la importancia que el software y todas las representaciones que permite de la ED (gráfica, numérica, visual) permiten a la persona que modela “llegar a una convergencia de los resultados” que le permita tomar decisiones. Además de cómo esto permite explorar el mundo de la matemática desde una organización visual.

Es señalado además por un alumno cómo el software no te deja olvidar/ignorar variables ya que una vez que se relacionan en el software (unir a través de flechas) no te permite el no usarlas en la definición de la ecuación.

El software es muy amigable ya que no te deja ignorar variables después de haberlas unido, aunque a ti se te olvide la fórmula, en el cuadrado de abajo puedes ver las variables que tienes que ocupar y con eso recuerdas de una mejor manera. Además las flechas y los cuadros se adaptaron de una manera muy buena para los problemas de mezclas, ya que los podías ver como los tanques y los flujos

V. CONCLUSIONES

A través de la puesta en práctica de este ejercicio en un curso de Ecuaciones Diferenciales en el semestre Enero-Mayo 2015 posterior a un trabajo previo de diseño durante dos años (2013-2014, ver referencia 3), se encuentra que la introducción de este tipo de actividades basadas en pensamiento sistémico en clase de matemáticas es de gran ayuda al alumno así como la herramienta visual que le proporciona un software de modelación dinámica como Vensim. Los resultados permiten ver que parece ser un acierto el continuar trabajando en esta dirección y eventualmente tener una variedad más amplia de actividades basadas en modelación de fenómenos sociales de tal forma que los alumnos puedan desarrollar no solo habilidades matemáticas en la clase sino además se permita el ir desarrollando habilidades genéricas como el pensamiento crítico, el holístico, habilidades de comunicación y escucha con sus compañeros así como de empatía tanto con los otros como con el medio ambiente que le rodea. Este trabajo pretende aportar elementos de respuesta a la pregunta de qué estamos haciendo en educación de la ingeniería frente a los grandes cambios que enfrentamos hoy en el siglo XXI, creemos que al igual que diversos organismos internacionales (referencias 1 y 2) y con propuestas como 3 podemos aportar una idea de cómo apoyar a los requerimientos del siglo XXI hacia los ingenieros sobre su formación global y holística desde una clase de Matemáticas.

REFERENCES

[1] Organization for Economic Cooperation and Development [OCDE], “PISA 2009 Results. What Students Know and Can Do: Students Performance in Reading, Mathematics and Science”, 2009. Retrieved for <http://www.oecd.org/pisa/keyfindings/pisa2009keyfindings.htm>

[2] Bourn, D. & Neal, I., “The Global Engineer. Incorporating global skills within UK Higher Education of Engineers”. Engineers against Poverty. Leading Education and Social Research. Institute of Education. University of London, 2008.

[3] Rodríguez, R. y Bourguet, R., “Diseño interdisciplinario de Modelación Dinámica usando Ecuaciones Diferenciales y Simulación”. Latin American and Caribbean Consortium of Engineering Education (LACCEI 2014). 2014.

[4] Senge, Peter M., “The 5th Discipline: the art and practice of the learning organization”. New York: Doubleday/Currency, 1990.

[5] Meadows, D., “Thinking in Systems. A primer”. Chelsea Green, 2008.

[6] Richmond, B., “Systems Thinking. A critical set of Critical Thinking Skills for the 90’s and beyond”. Systems Dynamics, 1990.

[7] Richmond, B., “Tracing Connections. Voices of Systems Thinkers”. ISEE, 2010.

[8] Arslan, S., Chaachoua, H. y Laborde, C., “Reflections on the teaching of differential equations. What effects of the teaching of algebraic dominance?” Memorias del X Congreso Internacional de Matemática Educativa (ICME XI). Dinamarca, 2004.

[9] Artigue, M., “Functions from an Algebraic and Graphic Point of View: Cognitive Difficulties and Teaching Practices”, en Dubinsky, E. & Harel, G (eds), The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy, MAA notes 25. Washington, DC: MAA, 1994.

[10] Blanchard, P., “Teaching differential equations with a dynamical systems viewpoint”, en *The College Mathematics Journal*, 25, 385-393, 2004.

[11] Blanchard, P., Devaney, R. y Hall, G., “Differential Equations”. (3a edición). Belmont: Cengage, 2006.

[12] Niss, M., Blum, W. y Galbraith P., “Introduction. ICMI Study 14: Applications and Modelling in Mathematics Education”. New York: Springer, 3-32, 2007.

[13] Fisher, D. (1997). *Seamless Integration of System Dynamics into High School Mathematics: Algebra, Calculus, Modeling Courses*.

[14] Bourguet, R. E. y Pérez, G. (2003). On Mathematical Structures of Systems Archetypes. En *Proceedings of the 21st International System Dynamics Conference*. Nueva York, E.U.A.: System Dynamics Society.

[15] Bourguet, R. E., “Desarrollo de Pensamiento Sistémico usando ecuaciones diferenciales y dinámica de sistemas”. En Reunión de Intercambio de Experiencias en Estudios sobre Educación del Tecnológico de Monterrey (RIE). Monterrey, 2005.

[16] Fisher, D., “Lessons in Mathematics: a Dynamic Approach”, 2011.

[17] Fisher, D., “Modeling Dynamics Systems: Lessons for a First Course”. 3rd Edition, 2011.

[18] Sterman, J. D., “Learning in and about complex systems”. En *Business dynamics: system thinking and modeling for a complex world*. (Cap. 1, 5-10). Estados Unidos de América: Irwin/McGraw-Hill, 2000.

[19] Vensim www.vensim.com