Construction of a Mathematical Filter with Application to Ground Potential Fields

Miguel Antonio Ávila, Msc.[1], Jaime Antonio Benítez, Msc.[1], Diego Julián Rodríguez, Msc.[1]
[1] Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Colombia, maavila@udistrital.edu.co, jbenitez@udistrital.edu.co, djrodriguezp@udistrital.edu.co

***Abstract*– Since similar behavior in mathematical terms of terrestrial gravitational fields and magnetic potential (Poisson's ratio) and their respective development in 2D Fourier series, designing the filter to produce maps of pseudo gravity and pseudo magnetism from actual values for each field using the proposed methodology. The gravimetric data collected are taken to the frequency domain, which is then multiplied by the filter developed which contains the declination, inclination and magnetic dipole moment of the study area.**

***Keywords*— Convolution, design of filters, domain of the frequency, mathematical filter, mechanisms of filtering, potentials terrestrial, relationship of Poisson, seudo field**

Digital Object Identifier (DOI): http://dx.doi.org/10.18687/LACCEI2015.1.1.105
ISBN: 13 978-0-9822896-8-6
ISSN: 2414-6668

Construcción de un Filtro Matemático Con Aplicación a Campos Potenciales Terrestres

Miguel Antonio Ávila, Msc[1], Jaime Antonio Benítez, Msc[2], Diego Julián Rodríguez, Msc[3]
[1]Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Colombia, maavila@udistrital.edu.co
[2]Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Colombia, jbenitez@udistrital.edu.co
3Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Colombia, djrodriguezp@udistrital.edu.co

Resumen- De acuerdo con el comportamiento similar en términos matemáticos de los campos potenciales terrestres gravitatorio y magnético (relación de Poisson) y de su respectivo desarrollo en series de Fourier 2D, el presente trabajo pretende diseñar un filtro en el dominio de la frecuencia que permita obtener los mapas de seudo gravedad y seudo magnetismo a partir de valores reales de cada campo mediante el uso de la transformada rápida de Fourier de acorde a la aplicación de metodología propuesta en el presente trabajo. Los datos capturados de gravimetría se llevan al dominio de la frecuencia, donde luego se multiplican por el filtro desarrollado el cual que contiene la declinación, inclinación magnética y el momento dipolar de la zona de estudio.

Palabras claves: Convolución, diseño de filtros, dominio de la frecuencia, filtros matemáticos, mecanismos de filtrado, potencial terrestre, relación de Poisson, seudo campo.

Abstract- Since similar behavior in mathematical terms of terrestrial gravitational fields and magnetic potential (Poisson's ratio) and their respective development in 2D Fourier series, designing the filter to produce maps of pseudo gravity and pseudo magnetism from actual values for each field using the proposed methodology. The gravimetric data collected are taken to the frequency domain, which is then multiplied by the filter developed which contains the declination, inclination and magnetic dipole moment of the study area.

keywords: Convolution, design of filters, domain of the frequency, mathematical filter, mechanisms of filtering, potentials terrestrial, relationship of Poisson, seudo field

.

I. INTRODUCCIÓN

Las manifestaciones reales del comportamiento de la Tierra se estudian a partir del conocimiento de sus campos de fuerza magnético y gravitatorio (utilizando una representación geométrica de sus líneas de campo), los cuales se asocian utilizando modelos matemáticos que describen de la mejor manera posible el comportamiento intrínseco de los campos terrestres. Una primera aproximación al estudio de este comportamiento es el planteamiento de las funciones potenciales (modelamiento matemático del comportamiento natural del planeta) que se corresponden con las primeras derivadas espaciales de los campos de fuerza terrestres.

Del comportamiento similar en términos matemáticos de los potenciales gravitacional y magnético, Poisson dedujo una relación matemática que permite obtener el potencial magnético a partir del potencial gravitatorio y viceversa, por consiguiente obtener una relación final para los campos de fuerza correspondientes. Para el estudio y análisis de dichos campos, pueden aplicarse técnicas espectrales simultáneamente y así, hacer una separación de las variables independientes en cada caso, las cuales equivalen al número de onda y a la frecuencia. De hecho, las partes comunes a los dos campos permiten que su análisis se pueda llevar a cabo mediante técnicas de cómputo aplicando conceptos generales tanto físicos como matemáticos.

En consecuencia, si se conoce el campo gravitacional de un cuerpo puede predecirse el comportamiento magnético de éste, sin conocimiento previo de su estructura. Dicho procedimiento consiste en cambiar su densidad por material magnético con reducción al polo (dado que en un punto la magnetización inducida es una continuación analítica descendente) en proporción constante y asumiendo una dirección de magnetización, el campo magnético esperado es igual a la primera derivada (respecto a z) del campo gravitacional multiplicado por una constante que convierte el campo gravitacional en campo magnético [1].

Los mapas magnéticos calculados de esta manera se denominan seudo magnéticos, lo mismo ocurre si los mapas de gravedad hubiesen sido obtenidos a partir de datos magnéticos, los cuales se conocen como seudo gravedad. De éstos pueden deducirse algunas

13th LACCEI Annual International Conference: "Engineering Education Facing the Grand Challenges, What Are We Doing?"
July 29-31, 2015, Santo Domingo, Dominican Republic **ISBN:** 13 978-0-9822896-8-6 **ISSN:** 2414-6668
DOI: http://dx.doi.org/10.18687/LACCEI2015.1.1.105

conclusiones geológicas y geofísicas que permiten establecer la naturaleza del cuerpo.

II. GRAVITACIÓN Y GRAVEDAD

El conocimiento de la forma de la Tierra ha sido reflexionado por muchos pensadores, obteniendo como conclusión que la figura terrestre es un cuerpo cercano a un globo por su forma y posteriormente, su aproximación geométrica a un elipsoide [2]. Esta aproximación es el resultado de la investigación, cuyo soporte está contenido en la teoría del inverso del cuadrado para la gravitación universal propuesta por Isaac Newton a mediados del siglo XVII, la cual determina que dos cuerpos de masas M y m se atraen mutuamente en proporción directa del producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado del radio vector que une sus centros de masa, en la forma:

$$\vec{F}_G = -\frac{KMm}{r^2}\hat{r} \tag{1}$$

Si se supone un cuerpo de masa m situado en la superficie de la Tierra en reposo con respecto a ésta, la fuerza total que actúa sobre él es la suma vectorial de la fuerza gravitacional y la fuerza centrífuga debida a la rotación de la Tierra. La combinación de estas dos fuerzas proporciona la fuerza de gravedad dada en la forma:

$$\vec{F}_g = \vec{F}_G + \vec{F}_C \tag{2}$$

Utilizando las herramientas del cálculo vectorial, un campo vectorial puede obtenerse a partir de ***F* = *Grad V***, lo que evidencia que la fuerza de gravedad tiene asociado un potencial de gravedad dado por:

$$W_g = V + \Phi \tag{3}$$

III. GEOMAGNÉTISMO

Desde la antigüedad, las propiedades atractivas de los materiales eran conocidas por los griegos y chinos, siendo estos últimos los inventores del compás magnético; pero es W. Gilbert quien inicialmente introduce la idea de que la Tierra es un gran imán, concepto que sirvió para que el inglés H. Halley (1656-1742) elabore la primera carta magnética para la declinación. Con este soporte, Poisson (1781-1840) define los conceptos de dipolo e intensidad de magnetización, contribuyendo de esta forma a la teoría general del potencial y su aplicación al campo magnético, [3].

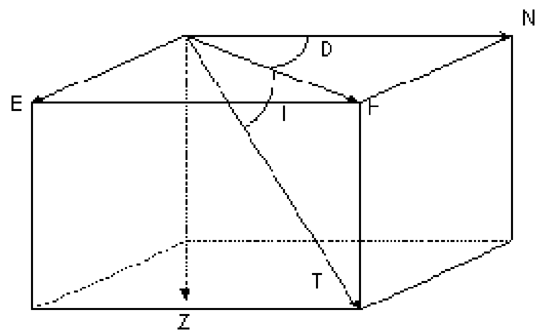


Fig. 1 Componentes del campo magnético para un punto sobre la superficie terrestre.

Retomando la teoría de Poisson para el potencial magnético ***A***, éste se puede separar en la suma de los potenciales correspondientes a los campos interno y externo de modo que:

$$A_{(\vec{r})} = A_i + A_e \tag{4}$$

Para una región libre de fuentes magnéticas cerca de la superficie terrestre, se tiene que el potencial magnético cumple con la ecuación de Laplace, dada por la expresión:

$$\nabla^2 A_{(\vec{r})} = 0 \tag{5}$$

Cuya solución para el campo interno como para el campo externo será en términos de funciones armónicas en la forma:

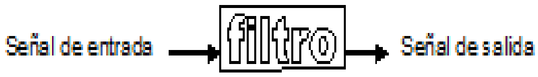
$$A_e = a\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} P_{nm}[g_{nm}Cos\, m\lambda + h_{nm}Sen\, m\lambda] \tag{6}$$

Siendo g_{nm} y h_{nm} Los coeficientes de amplitud y P_{nm} los polinomios de Legendre. La metodología del presente trabajo exige el conocimiento del desarrollo de la ecuación de Laplace en términos de una serie discreta de Fourier en 2D, ya que las mediciones se realizan sobre una porción pequeña de la superficie terrestre, la cual se puede asumir como un plano tangente a la superficie terrestre. Teniendo de esta manera, la expresión final para el potencial en términos de una serie discreta doble de Fourier como:

$$V_{x,y} = \frac{1}{MN}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{n} WV_{mn}\, e^{z.K_{mn}}\, e^{i\,\vec{K}_{mn}.\vec{r}} \qquad (7)$$

IV. FILTROS

El sistema intermedio entre una señal de entrada y una señal de respuesta se conoce como filtro. Lo que significa que dada una señal inicial continúa f (t), ésta es modificada obteniendo una señal de salida g (t).



Teniendo presente que este procesamiento es realizado en un tiempo que no es real, se requiere que los datos iníciales (señal análoga) entren en una secuencia finita de números. El proceso de convertir la señal análoga en una secuencia numérica, se denomina digitalización, la cual consta de dos operaciones:

- Muestreo (sampling): define el instante del tiempo en el cual la señal es observada (medida).

- Cuantización: es la conversión de los puntos de la muestra en una señal continua de amplitudes dentro de una secuencia numérica.

Aunque algunas aplicaciones geofísicas dependen solamente del carácter observacional de los datos, la digitalización es realizada en un espaciado desigual para luego interpolarlos a puntos equidistantes de tal forma que la digitalización puede ser desarrollada con suficiente densidad y muestreo garantizando semejanza entre lo análogo y lo digital.

De tal forma que si se conocen las funciones propias, valores propios y las propiedades del filtro, la relación entre la señal de entrada y de salida será conocida. Por tanto, el filtro debe cumplir, por sus condiciones matemáticas, dos propiedades fundamentales:

- Principio de linealidad: descrita como la relación entre $f_{(t)}$ y $f_{(t)}$del sistema, este principio también se conoce como principio de superposición (operador lineal).

- Principio estacionario: representado en la condición de independencia del tiempo, presentando su respuesta invariante del tiempo, para lo cual $f_{(t-\tau)}$ tendrá una salida $g_{(t-\tau)}$ para cualquier τ.

A. Diseño de filtros

El diseño de un filtro matemático está sujeto a un procedimiento que obedece a la característica del filtro [5] diferenciando:

- Filtro de distorsión lenta: donde la señal de entrada es multiplicada por un factor constante H_0 con decaimiento en t_0, conservando la señal de entrada.

- Filtro de distorsión de amplitud: aplicado bajo la condición de que el valor absoluto de la función del sistema no es constante ya que el ángulo de fase ϕ (ω) depende de la definición de la función de transferencia (función del sistema).
- Filtro de distorsión de fase: utilizado con la condición de que el ángulo de fase no es lineal. La importancia de éste radica en la proporcionalidad directa que ofrece entre la energía de $f_{(t)}$ y $f_{(\omega)}$

B. Filtrado en geociencias

En ciencias de la Tierra se pueden dar diferentes formas de filtrado, entre ellos el filtrado natural en el cual no hay control humano sobre el filtro. Filtro instrumental que es un mecanismo sobre el cual se ejerce control humano y el filtro matemático cuya técnica especial es usada básicamente para conjuntos digitales, con los que se puede obtener una separación de ondas.

C. Propósito del filtro

Su diseño se construye de acuerdo con la necesidad del procesamiento geofísico, que puede ser la separación de ruido o preparación de la señal para análisis espectral. De esta forma se requiere tener con certeza la señal que se desea, siendo esta decisión la base del proceso de filtrado y para ello se cuenta con el filtrado de frecuencia, filtrado de velocidad y el Filtrado de polarización.

D. Filtrado espacial bidimensional

El filtrado bidimensional tiene una significación especial en el estudio de los campos gravitatorio y geomagnético, debido a que la utilización de filtros hace que pequeñas anomalías tengan una mayor resolución y por ende el análisis arroja mejores interpretaciones de los perfiles obtenidos partir de los datos iniciales. A partir de una función de entrada $f_{(x,y)}$ con una respuesta de pulso $g_{(x,y)}$

Si de la muestra se escoge un intervalo igual a 0,5 ciclos/s, se obtendrá el número de onda de Nyquist, teniendo en cuenta que el muestreo en 2D puede ser no equidistante a lo largo de los ejes coordenados X, Y. Entonces la frecuencia de Nyquist (σ = 1 / 2h) no corresponde con los números de onda, [5].

V. RELACIÓN DE POISSON

Dado que el potencial gravitatorio y magnético se pueden expresar matemáticamente de manera similar. Y asumiendo que la densidad y la magnetización son constantes en todo el espacio y en todo el volumen, puede relacionarse los potenciales A y U de los campos magnético y gravitacional, mediante la expresión:

$$A_{(\vec{r})}) = \vec{M}\,.\nabla\left[\frac{V_{(\vec{r})}}{K\rho}\right] \qquad (8)$$

De la condición de asumir la componente vertical de los dos campos para facilidad del estudio, tal como lo presento Baranov en 1957, de acuerdo con:

$$A_{(\vec{r})}) = \frac{M}{K\rho}\frac{\partial}{\partial n}V_{(\vec{r})} \qquad (8.1)$$

Y si multiplicamos por el vector unitario correspondiente al campo gravitatorio, se sugiere la realización del producto escalar para obtener:

$$T\,\gamma_0 = \frac{M}{K\rho}\frac{\partial}{\partial t}g_{(\vec{r})} \qquad (9)$$

Las transformadas discretas respectivas utilizando la metodología propuesta, presentan como resultado

$$T_{x,y} = \frac{1}{MN}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{n} WT_{mn}\, e^{z.K_{mn}}\, e^{i\,\vec{K}_{mn}.\vec{r}} \qquad (10)$$

$$g_{x,y} = \frac{1}{MN}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{n} W g_{mn}\, e^{z.K_{mn}}\, e^{i\,\vec{K}_{mn}.\vec{r}} \qquad (11)$$

De las expresiones (10) y (11) se puede interpretar que, dado el campo gravitacional en el dominio del tiempo y calculando su transformada rápida de Fourier (FFT) para obtener Wg_{mn} en el dominio de la frecuencia, se puede calcular el campo magnético teórico (seudo magnético) en el mismo dominio, sí se multiplica Wg por el filtro en el domino de la frecuencia propuesto en el presente trabajo, cuya expresión es, [4].

$$\frac{M}{K\rho}\left[\left(\left(\frac{2\pi m}{M}\right)^2+\left(\frac{2\pi n}{N}\right)^2\right)^{1/2}+i\left(\frac{2\pi m}{M}\cdot\frac{Cos\,D}{Tg\,I}+\frac{2\pi n}{N}\cdot\frac{Sen\,D}{Tg\,I}\right)\right] \qquad (12)$$

Siendo K la constante de gravitación, ρ la densidad supuesta para la zona de estudio. El filtro contiene el momento dipolar M de la zona, el tamaño del grid de estudio M, N y por ende la posición (m, n) de cada punto en el cual se han capturado medidas de campo gravitatorio. Además de los elementos del campo magnético de la zona como son la declinación D, la inclinación i, del campo magnético.

En la expresión (12), se puede observar que es número complejo, de tal forma que la operación realizada en el dominio de frecuencia es una multiplicación entre números complejos $(Wg_{mn} * filtro)$, y del resultado del procesamiento solamente se utiliza la parte real para el respectivo análisis. La programación del algoritmo permite realizar las multiplicaciones en el dominio de la frecuencia del filtro con los datos observados de campo de gravedad o magnético utilizando la operación de una multiplicación de matrices para obtener el campo teórico magnético o gravimétrico según sea el caso.

VI. METODOLÓGIA

Para obtener el mapa de seudo magnetometría, utilizando la metodología propuesta en el presente trabajo, se toma la grilla de valores reales de gravedad cuya grafica se muestra en la figura (1):

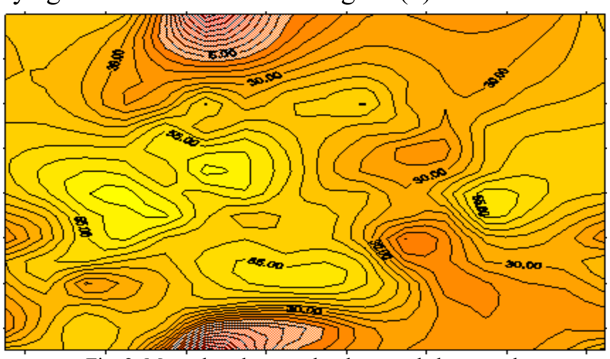


Fig. 2. Mapa de valores reales de gravedad en mgal.

Los datos de entrada de valores de gravedad se deben disponer en una grilla de valores cuyas filas y columnas deben ser potencias de dos (2, 4, 8, 16, 32, 64...), con la idea de llevarlos al dominio de la frecuencia, teniendo una disposición para una transformada de Fourier en 2D (FFT- 2D). La gráfica en el dominio de la frecuencia de los valores de gravedad se muestra en la figura 2.

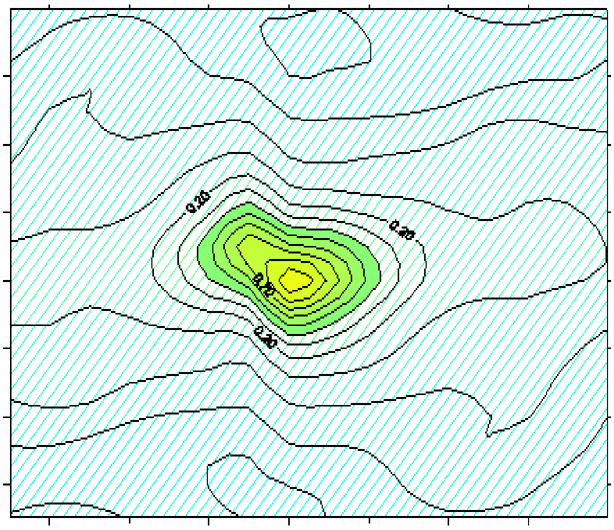


Fig. 3. Mapa de valores de gravedad en el dominio de la frecuencia en mgal.

Una vez que se tienen los valores de la FFT – 2D, se procede a multiplicar esta transformada por el filtro diseñado en el presente trabajo. Luego, estos valores se llevan al dominio del tiempo mediante una transformada inversa de Fourier (FFT-INV- 2D), arrojando datos cuya representación gráfica es:

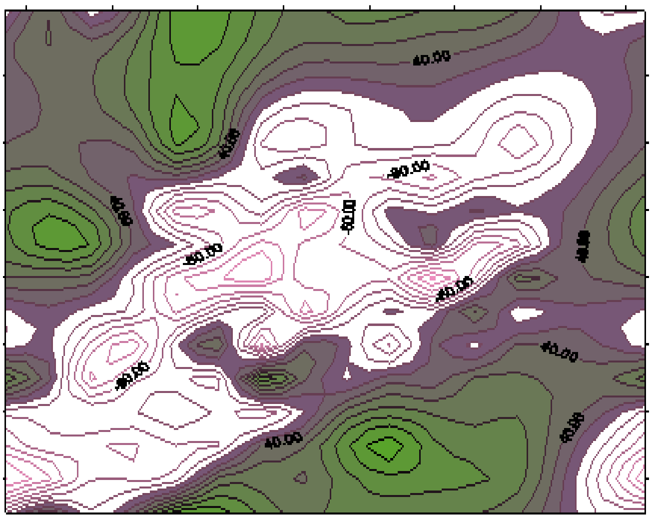


Fig. 4 Representación del campo seudo magnético en el dominio del tiempo.

En la figura 4, se muestra el mapa de seudo magnetometría que arroja la metodología propuesta en el presente trabajo, el cual presenta una gran similitud con el mapa de magnetometría de valores reales, cuya gráfica se tiene a continuación.

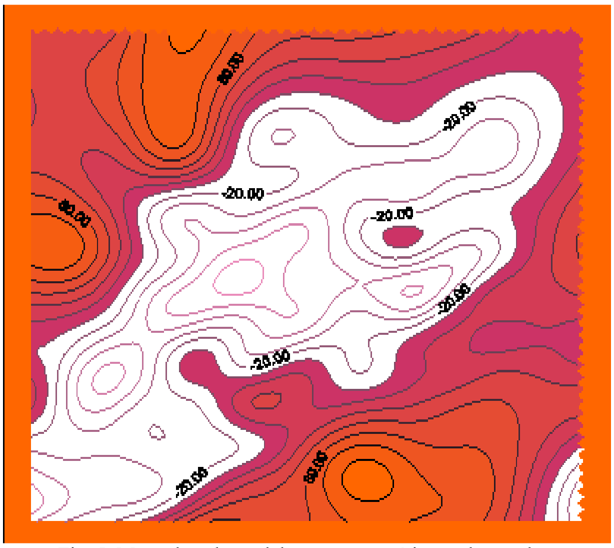


Fig. 5. Mapa de valores del campo magnético real en teslas.

El proceso realizado para obtener el seudo campo magnético es idéntico para obtener el campo de seudo gravedad.

VII ANÁLISIS DE RESULTADOS

Una vez obtenidos los mapas de seudo gravedad y seudo magnetismo podemos decir que los mapas, son de un aceptable resultado, donde la correlación obtenida fue de 0.97, debido a su gran concordancia entre los mapas de valores reales y los obtenidos por la metodología del trabajo.

De los mapas obtenidos se puede predecir que son argumentos de buen resultado si lo que se desea estudiar son anomalías de carácter gravimétrico o magnético en determinada zona, ya que el filtro arroja zonas donde se pueden presentar intereses respecto a posibles formaciones, ofreciendo resultados de anomalías netamente locales, esto es debido al carácter local de los datos de análisis.

VIII. CONCLUSIONES

- La metodología propuesta presenta una mayor estabilidad debido a las propiedades de simetría ofrecidas cuando se trabaja en el dominio de la frecuencia. La cual incluye las derivadas direccionales y la relación que guardan los campos respecto a la primera derivada vertical.

- El filtro obtenido y presentado como propuesta de metodología contiene una rotación al polo y una continuación analítica descendente necesarias para una mayor resolución de las anomalías que se desean estudiar tanto gravimétricas como magnéticas.

- La limitante existente entre la similitud de las señales análogas y digitales desaparece cuando la señal es transformada al dominio de la frecuencia y su semejanza en este dominio es mayor a un rango del 0.97%, la poca disparidad final dependerá del factor de escala M/Kρ (Momento dipolar magnético /Constante de gravitación * densidad) resultante del desarrollo matemático; Para la obtención del filtro que hemos denominado "filtro de Poisson".

- El trabajo contiene el desarrollo teórico y diseño de un filtro general cuyo mecanismo de filtrado es netamente matemático, con características de paso alto realizando su proceso en el dominio de la frecuencia.

- La metodología desarrollada, hace necesario que los datos de análisis sean de origen local, para obtener un resultado final cuya correlación cruzada sea óptima; De esta manera quedan excluidos datos de procedencia de modelos globales, ya que estos no presentan información suficiente de anomalías locales, arrojando resultados desfasados.

- Los datos de cualquier modelo de seudo gravimetría o seudo magnetometría presenta un mayor ajuste con el modelo real que los obtenidos a partir de la relación de Poisson con derivadas verticales totales, debido a que la metodología propuesta presenta una mayor resolución en el espectro de energía facilitando así la interpretación geológica y geofísica.

- Los registros iniciales no deben tener ninguna corrección ni remoción, ya que toda la metodología está orientada en la primera derivada vertical de los dos campos sin alteración alguna

REFERENCES

[1] Dobrin, M, Geophysical prospecting, 4th ed, Mac Graw Hill, 2004, pp. 641

[2] Mironov, A, Curso de gravimetría, 75th ed., Editorial Mir, 1981, pp.124.

[3] Udías, A., Fundamentos de geofísica, Editorial Alhambra, 1986, pp. 63

[4] Ávila, M, Geodesia I, Editorial Académica española, 2013, pp85-110

[5] Bath, Markus.. Spectral analysis in Geophysics. 1982, Netherlands. Elsevier scientific publishing company