

Reconstrucción de una señal sinusoidal y de una imagen sintética usando la transformada de wavelet discreta.

Rubén Javier Medina Daza^{1,2}, **Carlos Pinilla**³, **Luis Joyanes**².

1) Universidad Distrital Francisco José Caldas, Bogotá D.C., Colombia, 2) Universidad Pontificia de Salamanca, Madrid, España. 3) Universidad de Jaén. Jaén, España.

1) rmedina@udistrital.edu.co, 2) luis.joyanes@upsam.net, 3) cpinilla@ujaen.es

ABSTRACT

In this article presents a brief explanation of the basic theory of the analysis Wavelet, initially a comparison is done with Fourier's analysis in order to justify the importance and the necessity of using the Wavelet transform. Then, it presents mathematically the continuous Wavelet transform, the parameters of time and frequency are discretized for obtaining the discrete Wavelet transform and finally the process for the reconstruction of a sign is explained and also the decomposition of a synthetic image in coefficients of approximation and coefficients of detail. That using as function base the Haar Wavelet's mother for the analysis and the study of the mathematical algorithms necessities that allows carrying out the fusion of images.

The decomposition of a synthetic image or an image of satellite (data sources), it is studied for the fusion of images is a response to the frequent necessity of having an unique image with high spectral and spatial resolution data from multispectral images and panchromatic images with different spatial resolutions and habitually proceeding from different remote sensors.

Keywords: Merger of Images, Transformed of Wavelet, images satelitales, synthetic images, mathematical Algorithms.

INTRODUCCIÓN

En este artículo se realiza la revisión de los algoritmos matemáticos que permiten descomponer una señal sinusoidal y una imagen sintética usando fundamentos matemáticos de la descomposición de Wavelet Haar.

En el procesamiento de señales se pueden encontrar diferentes tipos de señales: estacionarias y no estacionarias, las primeras son localizadas en el tiempo ya que su frecuencia no varía, este tipos de ondas son estudiadas por medio del análisis de Fourier, que permite su descomposición en términos de sus componentes sinusoidales, es decir, transforma la señal de la base de tiempo a la base de frecuencias y de igual manera permite el paso del dominio de la frecuencia al dominio del tiempo, sin embargo en este último se pierde información necesaria que por ser de carácter estacionario no resulta relevante. En el caso de las señales con comportamiento no estacionario, es decir, aquellas cuya frecuencia varia en el tiempo, al tener la señal producto de la transformada de Fourier resulta imposible realizar el paso al dominio del tiempo porque no permite determinar en qué momento se presenta un cambio en la frecuencia.

Como consecuencia de la desventaja presentada por el análisis de Fourier, surge entonces la necesidad de contar con una representación localizada en el tiempo y la frecuencia. De esta manera Gabor implementaría el uso de la STFT (Short Time Fourier Transform) que consiste en el análisis de una pequeña sección de la señal a través de un ventana de longitud fija, llevando la transformación contenida en este pequeño intervalo del dominio del tiempo y frecuencia, donde se puede conocer cuando y con que frecuencia ocurre el suceso, pero la STFT presenta una deficiencia, el tamaño fijo de la ventana temporal impide analizar pequeños detalles de la señal de frecuencia

variable. Es así como se introduce el análisis Wavelet como herramienta que permite obtener una representación y reconstrucción de señales que presentan cambios abruptos en sus componentes de tiempo y frecuencia. A diferencia de Fourier, en donde las funciones base son senos y cosenos de duración finita, en el análisis Wavelet la base son funciones localizadas en frecuencia (dilatación) y el tiempo (traslación).

En el análisis de imágenes, la transformada de Wavelet realiza la descomposición de la imagen en múltiples canales basados en su frecuencia local. La transformada de Wavelet provee un esquema para descomponer una imagen en un nuevo número de imágenes, cada una de ellas con un grado de resolución diferente. Mientras que la transformada de Fourier da una idea del contenido de frecuencia en nuestra imagen, la representación de Wavelet es una representación intermedia entre la de Fourier y la representación espacial, y esto puede proporcionar información tanto en el dominio de la frecuencia como el del espacio.

1. TRANSFORMADA DE WAVELET CONTINUA (CWT)

La transformada de Wavelet continua permite el análisis de una señal en un segmento localizado que consiste en expresar una señal continua como una expansión de términos o coeficientes del producto interno entre la señal y una función Wavelet madre $\psi(t)$. Una Wavelet madre es una función localizada, perteneciente al espacio $L^2(\mathbb{R})$.

Transformada de Wavelet Integral

Las Wavelet corresponden a una familia de funciones $\Psi_{a\tau}$, obtenidas de una función $\Psi \in L^2(\mathbb{R})$, tal que $\int_{-\infty}^{\infty} \Psi(t) dt = 0$. Las funciones $\Psi_{a\tau}$ están dadas por:

$$\Psi_{a\tau}(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \Psi\left(\frac{t-\tau}{a}\right), \quad a, \tau \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0 \quad (1)$$

La función Ψ es llamada una Wavelet, y a la función $\Psi_{a\tau}$ también se les denomina Wavelet. El parámetro τ en $\Psi_{a\tau}$ se asocia con la posición de Wavelet su retardo de tiempo, mientras que el parámetro de dilatación o escala, a , gobierna la frecuencia (Donoho 1994).

Propiedades:

Una Wavelet, Ψ , se dice admisible si cumple:

$$C_{\Psi} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\Psi(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty, \quad (2)$$

donde $\overline{\Psi}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(t) e^{-it\omega} dt$ es la transformada de Fourier de Ψ .

Para la función $f \in L^2(\mathbb{R})$ se define la transformada integral wavelet, con respecto a una wavelet Ψ , como

$$F_{\Psi}(a, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{\Psi_{a\tau}(t)} dt \quad (3)$$

Cuando la Wavelet Ψ es admisible, la función f se puede recuperar a partir de su transformada de Wavelet, es decir existe la transformada inversa y corresponde a una integral sobre los parámetros a y τ . La transformada wavelet inversa corresponde a:

$$f_{\Psi} = \frac{1}{C_{\Psi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{a^2} \int_{-\infty}^{\infty} F_{\Psi}(a, \tau) \Psi_{a\tau}(t) d\tau \right) da \quad (4)$$

2. TRANSFORMADA DE WAVELET DISCRETA (DWT).

Por la complejidad en el tratamiento numérico de DTW, debido a la variabilidad en forma continua de los parámetros de escala como de traslación, es importante contar con una herramienta que permita la discretización de esta. Es así que se pasa de un mapeo continuo a un espectro o conjunto finito de valores, a través del cambio de la integral por una aproximación de sumatorias, la discretización permite representar la señal en términos de funciones elementales acompañada de coeficientes, las Wavelet madre $\psi(t)$ traen consigo unas funciones de escala $\phi(t)$. Las primeras son las encargadas de representar los detalles finos de la función, mientras que las segundas que son funciones de escala realizan una aproximación, entonces la representación de una señal $f(t)$ como una sumatoria de funciones Wavelet y función de escala está dada como:

$$f(t) = \sum_k \sum_j c_{j,k} \phi(t) + \sum_k \sum_j d_{j,k} \psi(t) \quad (5)$$

Funciones de escala y funciones Wavelet

Para representar una señal $f(t)$ es necesario encontrar los valores de los coeficientes de escala ($c_{j,k}$) y coeficientes wavelet ($d_{j,k}$) los cuales permite hacer la aproximación de la señal.

3. TRANSFORMADA DE WAVELET

El análisis multiresolución basado en la teoría de Wavelet, permite la presentación de los conceptos de detalle entre niveles sucesivos de escala o resolución.

La transformada de Wavelet de una distribución $f(t)$ puede ser expresada como:

$$W(f)(a,b) = |a|^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \Psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt \quad (6)$$

Donde a y b son escalares y parámetros de traslación. Cada función base $\Psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$ es una versión escalonada y traducida de una función llamada Wavelet Mother Esta función de base es:

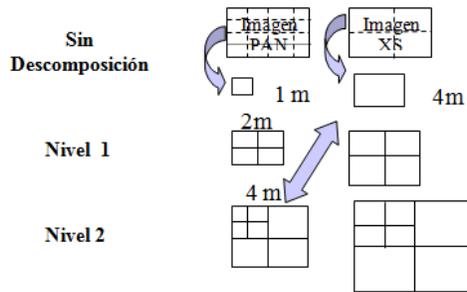
$$\int \Psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt = 0 \quad (7)$$

4. El Método de fusión de imágenes con la descomposición de Wavelet

El método consiste en combinar los coeficientes de la Wavelet de la imagen de alta resolución con la imagen multiespectral (baja resolución). Para el efecto, se tiene en cuenta la relación entre los tamaños de píxel de la imagen pancromática y de la imagen multiespectral. La descomposición de una imagen se puede hacer en niveles sucesivos que, tienen, cada vez, una resolución espacial igual a la mitad de la resolución anterior. Por ello, la descomposición de la imagen pancromática de nivel 2 del siguiente ejemplo que hace referencia a la primera forma en que puede realizarse una Wavelet, es equivalente a la de la imagen multiespectral sin descomposición (considerando una imagen pancromática de resolución espacial de 1m y una imagen multiespectral de resolución espacial de 4m).

La fusión de imágenes basada en Wavelet puede ser realizada de dos formas:

1). El método de sustitución consiste en remplazando los coeficientes Wavelet de la imagen multiespectral por los coeficientes correspondientes de la imagen de alta resolución.



2). Método por adición de coeficientes de alta – resolución a los datos de la multiespectral

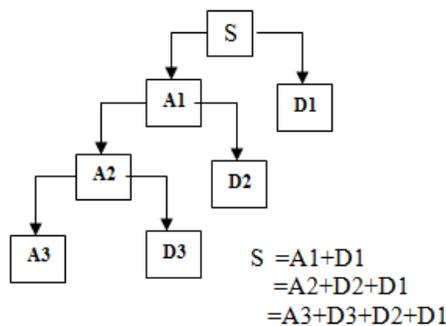
Los métodos de fusión de wavelet se basan en el hecho que, en la descomposición de wavelet, las imágenes p_l ($l=0,\dots,n$) son versiones sucesivas de la imagen original en escalas incrementadas, así, los primeros planos de la wavelet de la imagen pancromática de alta resolución tiene información espacial que no está presente en la imagen multiespectral.

En el método de sustitución, los planos de wavelet correspondientes a la imagen multiespectral son rechazados y sustituidos por los planos correspondientes de la imagen pancromática. Sin embargo, en el método de adición toda la información espacial es preservada en la imagen multiespectral. Así, la gran ventaja del método de adición es que la información de detalle de ambos sensores es usada. La principal diferencia entre adicionar los planos wavelet pancromáticos al componente intensidad es que la información pancromática es adicionada a todas las tres bandas R, G y B, mientras que en la sustitución reemplaza la intensidad por la imagen pancromática.

Niveles de descomposición

Esta descomposición es un proceso realizado en forma iterada, con sucesivas aproximaciones. El retorno a la imagen original se conoce como descomposición de Wavelet en árbol.

La imagen original (S) es descompuesta en coeficientes de aproximación (A1) y coeficientes de detalle (D1), los coeficiente de aproximación (A1) se descomponen en nuevos coeficientes de aproximación (A2), y coeficientes de detalle (D2), se realiza de nuevo la descomposición de los coeficientes de aproximación (A2), en nuevos coeficiente de aproximación y detalles así sucesivamente. Para recuperar la imagen original se adiciona la ultima descomposición de los coeficientes de aproximación con cada una de las descomposiciones de los coeficientes de detalle, tal como se muestra en el siguiente ejemplo.



La transformación de Wavelet en dos dimensiones permite descomponer una imagen (S) en diferentes niveles de resolución espacial. El primer nivel de descomposición tiene la misma resolución espacial de la imagen original. El segundo nivel de descomposición tiene la mitad de la resolución espacial de la imagen original y así sucesivamente. Cada nivel permite descomponer la imagen en coeficientes de detalle horizontal, vertical y diagonal donde se encuentra la información espacial de la imagen y en coeficientes de aproximación se encuentra la información espectral de la imagen. A partir de estos coeficientes, se puede reconstruir la imagen original.

5. PROCEDIMIENTO METODOLOGICO PARA REPRESENTAR UNA SEÑAL SINOSOIDAL Y UNA IMAGEN SINTETICA

5.1. Representación de una señal sinusoidal usando la transformada Wavelet Haar.

En el siguiente proceso metodológico se muestra la representación de una señal sinusoidal usando Wavelet Haar. Se realiza una aproximación de la función $f(t) = \text{sen}(t)$ definida para $t \in [0, 4]$, para la escala $j = 0$.

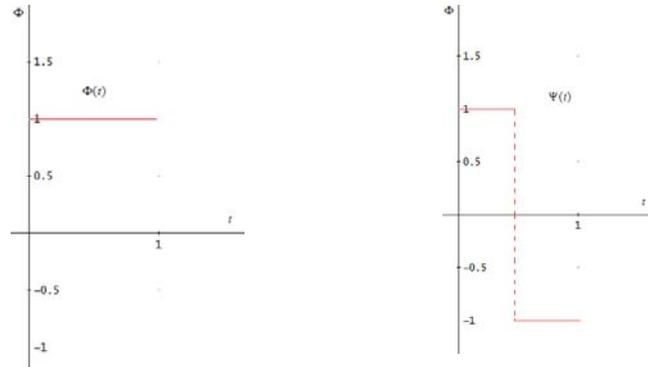


Imagen 1. Función de escala y wavelet haar

Donde:

$$\phi_{j,k} = 2^{\frac{j}{2}} \phi(2^j t - k) = \begin{cases} 2^{\frac{j}{2}}, & \text{si } t_1 = \frac{k}{2^j} \leq t < \frac{k+1}{2^j} = t_2 \\ 0, & \text{en otros casos} \end{cases} \quad (8)$$

$$\psi_{j,k} = 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j t - k) = \begin{cases} 2^{\frac{j}{2}}, & \text{si } \frac{k}{2^j} \leq t \leq \frac{k}{2^j} + \frac{1}{2^{j+1}} \\ -2^{\frac{j}{2}}, & \text{si } \frac{k}{2^j} + \frac{1}{2^{j+1}} \leq t \leq \frac{k+1}{2^j} \\ 0, & \text{en otros casos} \end{cases} \quad (9)$$

Procedimiento para aproximar la señal:

Dependiendo la escala o nivel de resolución a utilizar, se encuentra el intervalo en el cual varia el parámetro de traslación (k), para $j = 0$, entonces se tiene $t_1 = 0 = \frac{k}{2^j}$ y $\frac{k+1}{2^j} = 4 = t_2$, donde se reemplaza la escala y se tiene el siguiente intervalo que corresponde al número de coeficiente a hallar $k \in [0, 3]$.

Para calcular los coeficientes de escala se utiliza el nuevo intervalo de k y se reescriben las ecuaciones

$$c_{j,k} = \langle f(t), \phi_{j,k}(t) \rangle = \int_{t_1}^{t_2} f(t) \phi_{j,k}(2^j t - k) dt \quad (10)$$

$$\phi_{j,k} = 2^{\frac{j}{2}} \phi(2^j t - k) = \begin{cases} 2^{\frac{j}{2}}, & \text{si } t_1 = \frac{k}{2^j} \leq t < \frac{k+1}{2^j} = t_2 \\ 0, & \text{en otros casos} \end{cases} \quad (11)$$

De la ecuación (11) se tiene:

$$\phi_{0,k} = \phi(2^0 t - k) = \begin{cases} 2^{\frac{0}{2}}, & \text{si } \frac{k}{2^0} \leq t < \frac{k+1}{2^0} \\ 0, & \text{en otros casos} \end{cases}$$

$$c_{0,k} = \int_0^4 f(t)\phi(2^0 t - k)dt$$

Se calcula cada uno de los coeficientes de la siguiente manera, para $k = 0$ así sucesivamente hasta $k = 3$.

$$c_{0,0} = \int_0^1 \text{sen}(t)dt = 0.4597$$

Para hallar los coeficientes Wavelet se utilizan las siguientes ecuaciones (9) y (10):

$$\psi_{0,k} = 2^{\frac{0}{2}}\psi(2^0 t - k) = \begin{cases} 2^{\frac{0}{2}}, & \text{si } \frac{k}{2^0} \leq t \leq \frac{k}{2^0} + \frac{1}{2^{0+1}} \\ -2^{\frac{0}{2}}, & \text{si } \frac{k}{2^0} + \frac{1}{2^{0+1}} \leq t \leq \frac{k+1}{2^0} \\ 0, & \text{en otros casos} \end{cases}$$

$$d_{0,k} = \int_0^4 f(t)\psi(2^0 t - k)dt$$

Se calcula el coeficiente Wavelet, para $k = 0$

$$d_{0,0} = \int_0^4 f(t)\psi(t - k)dt$$

$$d_{0,0} = \int_0^{\frac{1}{2}} \text{sen}(t)dt - \int_{\frac{1}{2}}^1 \text{sen}(t)dt = 0.122417 - 0.33728 = -0.214863$$

Para $k = 1$

$$c_{0,1} = \int_1^2 \text{sen}(t)dt = 0.95645$$

$$d_{0,1} = \int_1^{\frac{3}{2}} \text{sen}(t)dt - \int_{\frac{3}{2}}^2 \text{sen}(t)dt = 0.469565 - 0.486884 = -0.017319$$

Para $k = 2$

$$c_{0,2} = \int_2^3 \text{sen}(t)dt = 0.573846$$

$$d_{0,2} = \int_2^{\frac{5}{2}} \text{sen}(t)dt - \int_{\frac{5}{2}}^3 \text{sen}(t)dt = 0.384997 - 0.188849 = 0.196148$$

Para $k = 3$

$$c_{0,3} = \int_3^4 \text{sen}(t)dt = -0.33635$$

$$d_{0,3} = \int_3^{\frac{7}{2}} \text{sen}(t)dt - \int_{\frac{7}{2}}^4 \text{sen}(t)dt = -0.0535358 - (-0.282813) = 0.2242772$$

Para $k = 4$

$$c_{0,4} = \int_4^5 \text{sen}(t)dt = -0.93731$$

$$d_{0,4} = \int_4^{\frac{9}{2}} \text{sen}(t)dt - \int_{\frac{9}{2}}^5 \text{sen}(t)dt = -0.442848 - (-0.494458) = 0.05161$$

Una vez encontrado los coeficientes para $j = 0$, el proceso se repite para la escala ($j = 1, j = 2, \dots$), el parámetro j puede aumentar dependiendo del nivel de resolución que se desee, de esta manera se obtienen los siguientes coeficientes para $j = 0$, donde $k = 1, 2, 3$ y 4 :

Tabla 1. Coeficientes de escala y coeficientes wavelet

$c_{0,0}$	0.4597	$d_{0,0}$	-0.214863
$c_{0,1}$	0.95645	$d_{0,1}$	-0.017319
$c_{0,2}$	0.573846	$d_{0,2}$	0.196148
$c_{0,3}$	-0.33635	$d_{0,3}$	0.2242772
$c_{0,4}$	-0.93731	$d_{0,4}$	0.05161

Para hacer la reconstrucción de la señal se suman los coeficientes de escala y Wavelet para igualar j y k . Se puede apreciar en la imagen 2, la forma como fue aproximada la señal $f(t) = \text{sen}(t)$, para $j = 0$ y $k = 0, 1, 2, 3, 4$

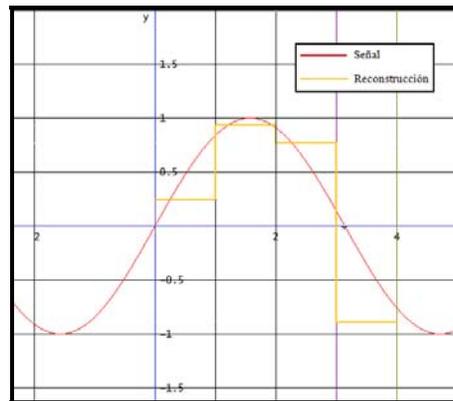


Imagen 2. Reconstrucción de la señal $f(t) = \text{sen}(t)$

5.2 Representación de una imagen sintética usando la transformada Wavelet Haar.

La transformada discreta de Haar consiste en transformar una sucesión numérica en otra sucesión tal que la segunda tenga menos números distintos de cero y tal que la primera pueda recuperarse de la segunda mediante un proceso inverso

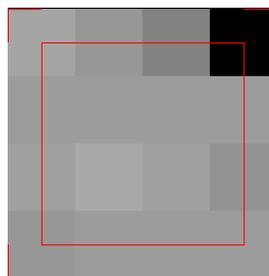


Imagen 3. Imagen sintética

Tabla 2 Niveles digitales de la imagen sintética (Matriz)

165	151	130	0
-----	-----	-----	---

156	156	156	156
160	169	160	147
151	156	156	156

Cada fila se multiplica por la matriz, de la siguiente manera:

$$[165 \ 151 \ 130 \ 0] \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = [158 \ 65 \ 7 \ 65]$$

Con esta nueva matriz se obtiene la siguiente matriz transpuesta:

$$\begin{bmatrix} 158 & 156 & 164.5 & 153.5 \\ 65 & 156 & 153.5 & 156 \\ 7 & 0 & -4.5 & -2.5 \\ 65 & 0 & 6.5 & 0 \end{bmatrix}$$

Cada fila de esta nueva matriz se multiplica por la matriz de referencia de la siguiente manera:

$$[158 \ 156 \ 164.5 \ 153.5] \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = [157 \ 159 \ 1 \ 5.5]$$

De igual forma como se obtuvo la matriz en la etapa anterior se genera la nueva matriz transpuesta que corresponde al primer nivel de descomposición:

$$\begin{bmatrix} 157 & 110.5 & 3.5 & 32.5 \\ 159 & 154.7 & -3.5 & 3.2 \\ 1 & -45.5 & 3.5 & 32.5 \\ 5.5 & -1.2 & -1 & 3.2 \end{bmatrix}$$

Utilizando la matriz anterior como entrada para la siguiente iteración se genera el segundo nivel de descomposición que corresponde a la siguiente matriz, la imagen 3 representa la matriz de primer nivel de descomposición de la imagen sintética:

$$\begin{bmatrix} 145.3 & 12.6 & 3.5 & 32.5 \\ -11.5 & 10.5 & -3.5 & 3.2 \\ 1 & -45.5 & 3.5 & 32.5 \\ 5.5 & -1.2 & -1 & 3.2 \end{bmatrix}$$

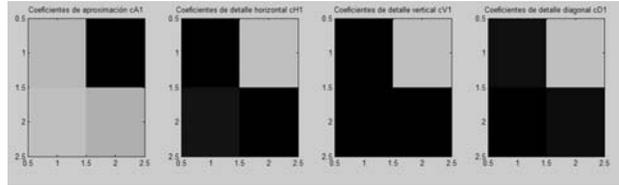


Imagen 4. Representación gráfica de los coeficientes de aproximación y detalle de primer.

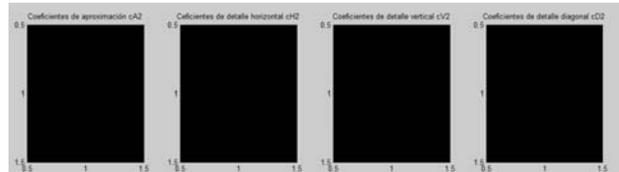


Imagen 5. Representación gráfica de los coeficientes de aproximación y detalle de segundo nivel usando la transformada de Wavelet Haar.

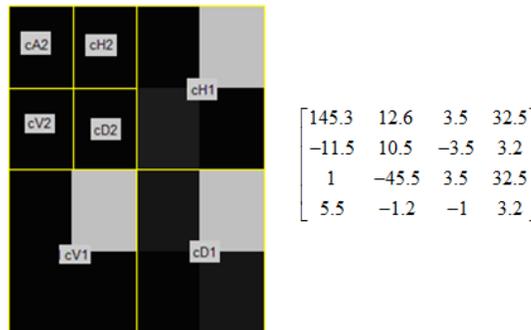


Imagen 6. Representación gráfica de la matriz de los coeficientes de aproximación y detalle de primer y segundo nivel usando la transformada de Wavelet Haar.

6. CONCLUSION

La transformada de Fourier, se base en las funciones senos y cosenos de duración infinita, mientras en el analisis Wavelet la base son funciones localizadas en frecuencia (dilatación) y en el tiempo (traslación). Una Wavelet es una pequeña onda de duración limitada, es decir, su energia esta concentrada en el tiempo alrededor de un punto, lo que proporciona una herramienta adecuada para el análisis de fenomenos transitorios, no estacionarios, variables en el tiempo y aquellas señales que presentan discontinuidades.

El análisis Wavelet permite hacer una representación de un a señal como una expansión de coeficientes del producto interno entre las Wavelet Madre, las funciones obtenidas por escalonamientos y traslación de esta y la señal.

El análisis con la transformada de Wavelet aplicada a las señales con base en el comportamiento de las señales continuas y las señales discretas permite una representación y descomposición con ventanas de longitud variable, permitiendo el analisis con cambio de frecuencia de la señal, que preserva la información tiempo-frecuencia.

La descomposición de imágenes sintéticas o imágenes satelitales es un proceso realizado en forma iterada, con sucesivas aproximaciones. El retorno a la imagen original se conoce como descomposición de wavelet en árbol.

Este manejo de niveles jerárquicos permite la manipulación de los coeficientes de detalle (riqueza espacial) y coeficientes de aproximación (información espectral) que al manipular y sustituir estos coeficientes de aproximación y de detalle hace que la transformada de Wavelet sea mejor que las técnicas estándar para fusionar imágenes ya que permite mejorar la resolución espacial de una imagen multispectral.

REFERENCIAS

BURRUS. C, R. A. Gopinath y H. Guo, Introduction to Wavelet Transforms A primer. New Jersey : Prentice Hall

SERRANO. E., Introducción a la transformada Wavelet y sus aplicaciones al procesamiento de señales de emisión acústica, Escuela de ciencias y Tecnología Universidad Nacional de general San Martín.

DAUBECHIES. Ingrid. Ten Lectures on Wavelet, Primera Edición, Philadelphia: SIAM, 1992

GONZALEZ. Rafael., Tratamiento Digital de Imágenes. Ed, Eddison-Wesley. 1996. EE.UU. STAK.H. G, Wavelet and signal Processing: An application-Based introduction. Primera Edició. Berlín: Springer, 2005

Medina, Javier., Iván Lizarazo, Fusión de imágenes satelitales usando la trasformada de wavelet, Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas. 2004

Medina, Javier., Cálculo Integral con aplicación en la descomposición de una imágenes usando la transformada de Wavelet Haar, Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.2010

MALLAT, A Wavelet tour of signal processing. Segunda Edición, San Diego: Academic Press, 1999.

Image Processing. Toolbox For Use whit MATLAB. The Math Works Inc.

MICHEL, Misiti. Wavelet Toolbox For Use whit MATLAB. The Math Works Inc.

Image Processing. Toolbox For Use whit MATLAB. Reference. The Math Works Inc.

Autorización y Renuncia

Los autores autorizan a LACCEI para publicar el escrito en las memorias de la conferencia. LACCEI o los editores no son responsables ni por el contenido ni por las implicaciones de lo que esta expresado en el escrito.