# Simulación en el software Mathematica de un robot 2 GDL usando dos rotaciones de los números complejos

Eusebio Jiménez López [1], Luis Reyes Ávila [2], Luis Tadeo Portela Peñúñuri[3],
Rosalina Longorio Vélez[4], Arturo Urbalejo Contreras[5] , Laura Olivia Amavizca Valdez[6] , Ignacio Vázquez Cuevas[7]

[1]CINNTRA de la Universidad Tecnológica del Sur de Sonora-IIMM- Parque Tecnológico SonoraSOFT.
Dr. Norman. E. Borlaug Km 14 CP. 85000, (01-644) 414-86-87 Cd. Obregón Sonora, México.
ejimenezl@msn.com

[2]Innovación en Ingeniería de Manufactura y Mantenimiento S. de R.L M.I - IMT
Loma Verde No 2716 Fracc. Casa Blanca, CP.85130|Tel/Fax: (644) 4189152|6441104312, Cd. Obregón Sonora.
lreyesa@imt.mx

[3] Centro de Aplicación y Desarrollo en Tecnologías de la Información y Comunicación de la Universidad Tecnológica del Sur de Sonora, México.
tportela@uts.edu.mx

[4] CINNTRA de la Universidad Tecnológica del Sur de Sonora-INNODITEC S.C. – Universidad La Salle Noroeste, México.
rlina.lv@yahoo.com

[5]Centro de Investigación y Aplicación en Automatización y Mecatrónica de la Universidad Tecnológica del Sur de Sonora, México
aurbalejo@uts.edu.mx

[6]Centro de Aplicación y Desarrollo en Tecnologías de la Información y Comunicación de la Universidad Tecnológica del Sur de Sonora, México
lauraamavizca@hotmail.com

[7] CMMI de la Universidad Tecnológica del Nogales, México.
ing.ignacio.javier@gmail.com

## RESUMEN

En este artículo se presenta los resultados de la modelación y la simulación de un robot 2 GDL usando dos transformaciones lineales caracterizadas como rotaciones, ambas definidas en el espacio vectorial de números complejos. La primera rotación se define en términos de la operación multiplicativa usual de números complejos, en tanto que la segunda rotación, llamada variante, se genera por otra operación multiplicativa. Las rotaciones son usadas para determinar el movimiento de una cadena cinemática simple. La programación de los modelos es hecha en Mathematica. Se muestra que la aplicación de ambas rotaciones dan las mismas configuraciones del robot, por lo que se puede concluir que son equivalentes mas no así las propiedades algebraicas.

**Palabras claves:** Software Mathematica, números complejos, Robótica.

## ABSTRACT

This article presents the results of modeling and simulation of a 2 DOF robot using two linear transformations characterized as rotations, both defined in the vector space of complex numbers. The first rotation is defined in terms of the usual multiplicative operation of complex numbers, while the second rotation, called variant, it is generated by another multiplicative operation. The rotations are used to determine the motion of a simple kinematic chain. The programming of the models is done in Mathematica. It is shown that the application of both rotations gives the same configurations of the robot; it can conclude that they are equivalent but not so the algebraic properties.

**Keywords:** Mathematica software, complex numbers, robotics.

## 1. INTRODUCCIÓN

Los números complejos se usan en ingeniería para múltiples aplicaciones, como por ejemplo para modelar las rotaciones de los multicuerpos rígidos en el plano, como robots y mecanismos (Ángeles 1997). La forma tradicional en que se aplican dichos números, ha sido en su composición de una parte real y una parte imaginaria. Sin embargo, las aplicaciones al modelado usando este tipo de representación de los números complejos, carecen de la fundamentación y el rigor que permitan sistematizar los algoritmos resultantes y optimizar la simulación computacional de los mismos (Reyes 1998). En el contexto del álgebra hipercompleja, los números complejos y los Quaterniones han sido sistematizados en el sentido del álgebra moderna (Reyes 1990). Dichas sistematizaciones han permitido modelar cadenas cinemáticas, tanto en el plano como en el espacio, de manera eficiente (Vázquez 2009) (Jiménez et al, 1998).

En este artículo se propone aplicar dos rotaciones sistematizadas y parametrizadas en el espacio vectorial de números complejos las cuales son caracterizadas por dos operaciones binarias multiplicativas (Reyes 1990), para modelar las rotaciones de un robot de dos grados de libertad. La aplicación de dichas rotaciones permitirá, por un lado, demostrar que pueden usarse para el modelado de multicuerpos rígidos en el plano y, por otro lado, demostrar que, aún teniendo propiedades diferentes, ambas rotaciones dan como resultado final la misma configuración del robot. Finalmente, la estructura del artículo es la siguiente: en el segundo apartado se presenta un breve estado del arte, en la tercera sección se describen algunas propiedades importantes del álgebra de los números complejos. En la cuarta parte se presenta la metodología seguida y en la quinta sección se presenta el modelado del robot.

## 2. ESTADO DEL ARTE

El álgebra hipercompleja (números complejos y Quaterniones, éstos últimos son generalizaciones de los números complejos) se ha usado para modelar cadenas cinemáticas que representan robots y mecanismos. Los algoritmos resultantes se han programado en diversos lenguajes de programación, los cuales son seleccionados según su potencial y su integración con otras herramientas computacionales. La rotación usual de los números complejos ha sido usada para modelar un robot paralelo planar de 3GDL (Jiménez et al, 2006). También, dicha rotación ha sido usada para modelar las rotaciones de un robot delta plano (Jiménez et al, 2010).

Por otro lado, la rotación usual de los números complejos fue usada para modelar y programar un robot delta plano en LABIEW (Sánchez 2008), además, las matrices homogéneas (Urbalejo et al, 2010) y los métodos trigonométricos son también usados para el modelado de robots y mecanismos, y actualmente la teoría de tornillos (Screws) es usada para el análisis y el modelado de multicuerpos rígidos en el espacio (Ángeles 1997). Para el caso del robot de dos grados de libertad, éste se ha modelado usando Quaterniones (Jiménez 1998) y con la rotación usual de números complejos (Ochoa 2004). En este artículo se trata de demostrar que es posible usar una rotación variante sistematizada en el espacio vectorial de números complejos para modelar las rotaciones de un robot de 2 GDL y se utiliza la rotación usual para contrastar los resultados, esto es mediante la programación y simulación de los modelos obtenidos en Mathematica.

## 3. MARCO TEÓRICO

Sobre el conjunto $\Re^2$ se definen dos operaciones binarias: $\oplus : \Re^2 \times \Re^2 \rightarrow \Re^2$ y $\otimes : \Re^2 \times \Re^2 \rightarrow \Re^2$ mediante los cuales, las parejas ($\Re^2$, $\oplus$ ) y ($\Re^2$, $\times$) forman dos grupos, uno aditivo y otro conmutativo multiplicativo, respectivamente. Se demuestra que la terna ($\Re^2$, $\oplus$, $\times$) es un cuerpo conmutativo (Reyes 1990). Las operaciones $\oplus : \Re^2 \times \Re^2 \rightarrow \Re^2$ y $\otimes : \Re^2 \times \Re^2 \rightarrow \Re^2$ se definen de la manera siguiente:

i) $\{a, b\} \oplus \{\alpha, \beta\} = \{a +\alpha , b +\beta\}$ (1)
ii) $\{a, b\} \otimes \{\alpha, \beta\} = \{a\alpha - b\beta, a\beta + b\alpha\}, \quad \forall \{a, b\}, \{\alpha,\beta\} \in \Re^2$

Por otro lado, en $\Re^2$ se define un producto escalar $\bullet : \Re \times \Re^2 \rightarrow \Re^2$, un producto interno, esto es, $<\bullet, \bullet> : \Re^2 \times \Re^2 \rightarrow \Re$ y una norma $|\bullet| : \Re^2 \rightarrow \Re$ y, por tanto, la estructura ($\Re^2$, $\oplus$, $\otimes$, $<\bullet, \bullet>$, $|\bullet|$) es un espacio vectorial normado y con producto interno llamado el espacio vectorial de los números complejos. La transformación lineal $\rho : \Re^2 \rightarrow \Re^2$ definida por:

$$\rho(p,q)= \frac{1}{\|p\|} \bullet p\otimes q; \; q \in \Re^2 \text{ fijo}, \qquad (2)$$

es una rotación, llamada usual, (Reyes 1990). Además, p, q $\in \Re^2$ son dos complejos de norma unitaria definidos por:

1) $p = \{p0, p1\}$ , $p_0^2 + p_1^2 = 1$ (3)
2) $q = \{q0, q1\}$ , $q_0^2 + q_1^2 = 1$

Las relaciones entre los componentes de los complejos p,q $\in \Re^2$ y los componentes de las rotaciones son las siguientes:

1) $p = \{p0, p1\}$ ; $p0 \in \Re$ ; $p0 = \cos\theta 1$ (4)
$p1 \in \Re$ ; $p1 = \pm \operatorname{Sen}\theta 1$
2) $q = \{q0, q1\}$ ; $q0 \in \Re$ ; $q0 = \cos\theta 2$
$q1 \in \Re$ ; $q1 = \pm \operatorname{Sen}\theta 2$

Aquí, $\theta 1$, $\theta 2$ $\in \Re$ son los desplazamientos angulares. Por otro lado, la rotación variante tiene la siguiente sistematización (Reyes 1990). Sobre el conjunto $\Re^2$ se definen dos operaciones binarias: $\oplus : \Re^2 \times \Re^2 \rightarrow \Re^2$ y $\Theta : \Re^2 \times \Re^2 \rightarrow \Re^2$ mediante los cuales, las parejas ($\Re^2$, $\oplus$ ) y ($\Re^2$, $\Theta$ ) forman dos grupos, uno aditivo y otro conmutativo multiplicativo, respectivamente. Las operaciones $\oplus : \Re^2 \times \Re^2 \rightarrow \Re^2$ y $\Theta : \Re^2 \times \Re^2 \rightarrow \Re^2$ se definen de la manera siguiente:

i) $(a, b) \oplus (\alpha, \beta) = (a + \alpha , b + \beta)$ (5)

ii) $(a, b) \,\Theta\, (\alpha, \beta) = (-a\alpha + b\beta, a\beta + b\alpha), \quad \forall (a, b), (\alpha,\beta) \in \Re 2$

Cabe señalar que la operación $\Theta : \Re^2 \times \Re^2 \rightarrow \Re^2$ es no asociativa. Por otro lado, en $\Re^2$ se define una operación escalar $\bullet : \Re \times \Re^2 \rightarrow \Re^2$, un producto interno, esto es, $<\bullet, \bullet> : \Re^2 \times \Re^2 \rightarrow \Re$ y una norma $|\bullet| : \Re^2 \rightarrow \Re$ y, por tanto, la estructura $(\Re^2, \oplus, \Theta, <\bullet, \bullet>, |\bullet|)$ es un espacio vectorial normado y con producto interno llamado el espacio vectorial de los números complejos (Reyes 1990). Por otro lado, la transformación lineal $R2 : \Re^2 \rightarrow \Re^2$ definida por:

$$R2(p,q)= \frac{1}{\|p\|} \bullet \overline{p\Theta q} \; ; q \in \Re 2 \text{ fijo,} \quad (6)$$

es una rotación llamada variante ( $\overline{p\Theta q}$ , es un complejo conjugado). Las relaciones entre los componentes de los complejos $p,q \in \Re^2$ y los componentes de las rotaciones son las siguientes:

1) $p = \{p0, p1\}$ ; $p0 \in \Re$ ; $p0 = -\text{Cos}\ \theta 1$ (7)

$p1 \in \Re$ ; $p1 = -(\pm \text{Sen}\ \theta 1)$

2) $q = \{q0, q1\}$ ; $q0 \in \Re$ ; $q0 = -\text{Cos}\ \theta 2$

$q1 \in \Re$ ; $q1 = -(\pm \text{Sen}\ \theta 2)$

## 4. METODOLOGÍA

En la robótica existen diversas metodologías para modelar la cinemática y las rotaciones de robots y mecanismos. Por ejemplo, la metodología de Denavit - Hartenberg es muy usada (Ángeles 1997). En este artículo, se utiliza el método desarrollado por (Jiménez et al, 2006) puesto que es una técnica sencilla, clara y eficiente para probar nuevas álgebras en el modelado de robots. El método es el siguiente:

1) Se caracteriza el robot estudiado.
2) Se modela la configuración de referencia del robot usando la rotación usual y se formulan los problemas directo e inverso.
3) Se modela la configuración del robot usando la rotación variante y se formulan los problemas directo e inverso.
4) Se programan los modelos y se visualizan los resultados en un paquete de cálculo simbólico.

## 5. RESULTADOS EXPERIMENTALES

En esta sección se presenta la aplicación de las rotaciones usual y variante a un robot de dos grados de libertad. La figura 1 muestra el robot en estudio. El robot tiene dos eslabones rígidos conectados por juntas rotacionales ($J_i$) y es de dos grados de libertad (2 GDL). Sobre los eslabones se definen bases móviles ($e_j^{/}$), puntos de análisis y vectores de posición con los cuales se construirán las ecuaciones de posición. Los ángulos de rotación ($\theta_i$) están definidos con respecto al eje X. Por otro lado, las coordenadas del punto del órgano terminal se pueden determinar por medio de la expresión siguiente:

$$\underline{R}\,(p_{ot}) = \underline{L}_1 \oplus \underline{L}_2 \qquad (8)$$

Los vectores de posición asociados con los eslabones, se pueden escribir en términos de las bases móviles mostradas en la figura 1, esto es:

$$\underline{L}_1 = l_1 \bullet {}^{RT1}\underline{e}_1^{\prime}\ , \qquad (9)$$

$$\underline{L}_2 = l_2 \bullet {}^{RT1}\underline{e}_1^{\prime\prime}\ .$$

Cada base móvil se relaciona con los números complejos y en términos de la rotación usual, de la manera siguiente:

$${}^{RT1}\underline{e}_1^{\prime} = \rho(p,\ \underline{e}_1) \equiv p \otimes \underline{e}_1 \qquad (10)$$

$${}^{RT1}\underline{e}_1^{\prime\prime} = \rho(q,\ {}^{RT1}\underline{e}_1^{\prime}) = \rho(q, \rho(p,\ \underline{e}_1)) \equiv q \otimes p \otimes \underline{e}_1$$

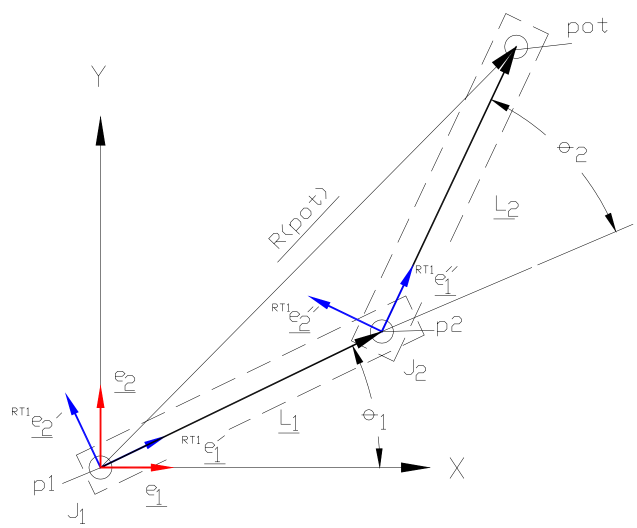



**Figura 1: Configuración del robot**

El modelo del robot usando la rotación usual es:

$$\underline{R}\,(p_{ot}) = l_1 \bullet \{\ p \otimes \underline{e}_1\ \} \oplus l_2 \bullet \{q \otimes p \otimes \underline{e}_1\ \} \qquad (11)$$

$$\|\ p\ \| = \|\ q\ \| = 1.$$

Aquí, $l_i$ son las dimensiones de los eslabones y $\underline{e}_1$ es la base canónica. Las relaciones geométricas entre los complejos $p,q \in \Re^2$ de norma unitaria y las rotaciones son las siguientes:

$$p \in \Re^2\ ; \quad p = (p_o\ ,\ p_1) \quad ; p_o \in \Re \quad ; \quad p_o = \ \mathrm{Cos}\ \theta_1 \qquad (12)$$

$$p_1 \in \Re \quad ; \quad p_1 = \pm \mathrm{Sen}\ \theta_1$$

$q \in \Re^2$ ; $\quad q=(q_o, q_1)$ $\quad ;q_o \in \Re$ ; $\quad q_o = \text{Cos } \theta_2$

$\qquad\qquad\qquad\qquad q_1 \in \Re$ ; $\quad q_1 = \pm\text{Sen } \theta_2$

Una vez determinado el modelo del robot con la rotación usual, se formulan dos problemas relacionados con la configuración mostrada en la figura 1, esto es, el problema directo y el problema inverso.

***Problema cinemático directo***

"Dados $p=(p_o, p_1)$, $q=(q_o,q_1)$ con $\| p \| = \| q \| = 1$ y $l_1 \in \Re^+$, $l_2 \in \Re^+$, encuentre: $\underline{R}\,(p_{ot}) \in \Re^2$ tal que la expresión

$$\underline{R}\,(p_{ot}) = l_1 \bullet \{ p \otimes \underline{e_1} \} \oplus l_2 \bullet \{ q \otimes p \otimes \underline{e_1} \}$$

sea satisfecha."

***Problema cinemático inverso***

"Dado $\underline{R}\,(p_{ot}) \in \Re^2$ y $l_1 \in \Re^+$, $l_2 \in \Re^+$, encuentre $p=(p_o, p_1)$, $q=(q_o, q_1)$ tal que las expresiones

$$\underline{R}\,(p_{ot}) = l_1 \bullet \{ p \otimes \underline{e_1} \} \oplus l_2 \bullet \{ q \otimes p \otimes \underline{e_1} \}$$

$$\| p \| = \| q \| = 1.$$

sean satisfechas.

Por otro lado, para generar el modelo del robot con la rotación variante se sigue un procedimiento similar al de la rotación usual. Por lo tanto, el modelo final de la rotación variante es:

$$\underline{R}\,(p_{ot}) = l_1 \bullet \{ \overline{p \;\Theta\; \underline{e_1}} \} + l_2 \bullet \{ \overline{q \;\Theta\; p \;\Theta\; \underline{e_1}} \} \qquad (13)$$

$$\| p \| = \| q \| = 1.$$

Las relaciones geométricas entre los complejos $p,q \in \Re^2$ de norma unitaria y los componentes de las rotaciones son las siguientes:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $p \in \Re^2$ ; | $p=(p_o, p_1)$; | $p_o \in \Re$ ; | $p_o = -\text{Cos } \theta_1$ | (14) |
| | | $p_1 \in \Re$ ; | $p_1 = -(\pm\text{Sen } \theta_1)$ | |
| $q \in \Re^2$ ; | $q=(q_o, q_1)$; | $q_o \in \Re$ ; | $q_o = -\text{Cos } \theta_2$ | |
| | | $q_1 \in \Re$ ; | $q_1 = -(\pm\text{Sen } \theta_2)$ | |

Por otro lado, los modelos del robot fueron programados en la plataforma de cálculo formal Mathematica. Existen diversas plataformas de programación como LABVIEW o MATLAB, sin embargo Mathematica fue seleccionado por su sencillez en la programación y por las librerías que tiene para resolver sistemas de ecuaciones no lineales.

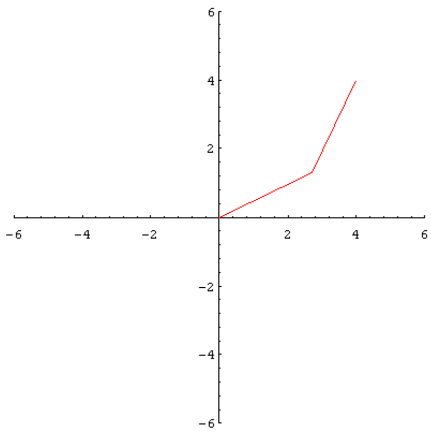
A continuación se presenta parte del código. En primer lugar se describe la rotación usual y, posteriormente, la variante.

```
(*Rotación usual*)
Roa[p_,q_]:={p[[1]]*q[[1]]-p[[2]]*q[[2]],p[[1]]*q[[2]]+p[[2]]*q[[1]]};
 (*Rotación variante*)
cRob[p_,q_]:={-p[[1]]*q[[1]]+p[[2]]*q[[2]],-p[[1]]*q[[2]]-p[[2]]*q[[1]]};
```

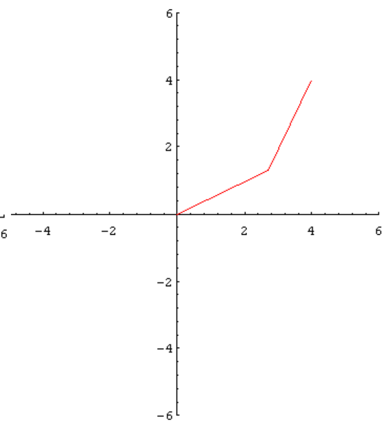
Cabe señalar que los sistemas de ecuaciones relacionados con el robot, son no lineales (4x4) para el caso de la formulación del problema inverso. Por tal motivo, es necesario usar un método numérico. Existen diversos métodos numéricos para resolver sistemas de ecuaciones no lineales. En este artículo se ha seleccionado el Newton-Rapshon, en primer lugar por que es el más usado en la robótica y en segundo lugar, porque Mathematica tiene una librería de este método numérico. En Mathematica se programa el Newton-Rapshon de la manera siguiente:

```
res1=FindRoot[{pnd1[[1]]==4,pnd1[[2]]==4,
p0^2+p1^2==1,q0^2+q1^2==1},{p0,0.9},{p1,0.1},{q0,0.9},{q1,0.1}]
```

Finalmente, la figura 2 muestra la salida gráfica del robot, en donde se puede interpretar que las rotaciones dan como resultado la misma configuración.




**a)**




**b)**

**Figura 2: Salidas gráficas de los resultados a) rotación usual y b) rotación variante**

## 6. CONCLUSIONES

1) La rotación usual y la variante tienen propiedades diferentes, pero al aplicarlas al modelado del robot dan la misma configuración (Ver figura 2). Esto es, la rotación variante es no asociativa y sus parámetros de rotación son diferentes a los de la rotación usual.
2) El sistema de ecuaciones e incógnitas fue de 4x4 no lineal para ambas rotaciones, para el caso del problema inverso.
3) Mathematica es un programa de cálculo formal útil para programar modelos de robots y facilita la solución de sistemas de ecuaciones no lineales. Este programa es útil puesto que tiene un manejo sencillo y sobre él se pueden simular cálculos numéricos y probar algoritmos, para posteriormente migrar los resultados a otros paquetes computacionales con más poder gráfico o de intercambio de información.

4) La parametrización y sistematización de las rotaciones puede usarse para aplicaciones en ingeniería, como proyecciones y modelado de mecanismos.

## REFERENCIAS


Ángeles J. Fundamentals of Robotics Mechanical System. (1997). Springer-Verlany, New York

Chávez E,. Rivera Jorge. Software e interfaces de control de servomotores del tipo brushless, con aplicación en robot paralelo, (Tesis de Maestría en Ciencias de la Ingeniería Mecatrónica). Instituto Tecnológico Superior de Cajeme. Agosto de 2008.

Jiménez E. Simulación de un proceso de manufactura con obstáculo en la línea de producción. México. (1998). (Tesis de Maestría en Ingeniería Mecánica). UNAM, Facultad de Ingeniería, División de Estudios de Posgrado, Sección Mecánica.

Jiménez E. Reyes L., Pérez A., Delfín J., Ruelas E., Ojeda P. Modelado de un robot paralelo plano tipo RRR usando algebra hipercompleja: rotación usual y rotación variante. Informe interno de investigación. ISBN 970-9895-11-7. Centro de Tecnología Avanzada del Instituto Tecnológico Superior de Cajeme. RED ALFA. (2006).

Jiménez E., Lara S., Reyes L., Chávez E., Rivera J., Núñez E., Uzeta C., Francisco F. Desarrollo de un robot delta plano para propósitos didácticos. 9 Congreso Nacional de Mecatrónica. (2010). Octubre 13-15, Puebla, Puebla, México.

Ochoa F,. Modelación y simulación de un problema de evasión de obstáculos en el plano mediante un robot de 2 gdl aplicando secuencias por complementos y algoritmo EOPTCE.(2004). Tesis (Maestría en Ingeniería Mecánica). UNAM, Facultad de Ingeniería, División de Estudios de Posgrado, Sección Mecánica.

Reyes L. Quaternion: Une Representation Parametrique Systematique Des Rotations Finies". Partie I. Le Cadre Thoerique. Rapport de Recherche INRIA no. 1303. 1990. París.

Reyes L. Sobre la parametrización de las rotaciones y reflexiones de multicuerpos rígidos en el plano. Parte I: el marco teórico. Estudios Ocasionales. (1998). México.
Universidad Anáhuac del Sur.

Sánchez M. Programación y simulación de multicuerpos rígidos planares usando álgebra hipercompleja y labview. (Tesis de maestría en ciencias de la ingeniería mecatrónica.) Instituto Tecnológico Superior de Cajeme. Agosto de 2008.

Vázquez I., Jiménez E., Domínguez G., Reyes L., Delfín J., Lara S. Modelación y diseño de un simulador de un robot paralelo manejado por un controlador manual didáctico. 8º Congreso Nacional de Mecatrónica, Noviembre 26 y 27, 2009. Veracruz, Veracruz.

Urbalejo A., Jiménez F., Jiménez E., Jacobo J., Castro J., Velarde O. Modelación y simulación de un robot paralelo de 5 barras y 6 GDL usando matrices homogéneas. 9º Congreso Nacional de Mecatrónica, Octubre 13 y 15, 2010. Puebla, Puebla.


## AGRADECIMIENTOS


Los autores de este trabajo agradecen a las Universidades que conforman la RED ALFA (Universidad La Salle Noroeste, Universidad Tecnológica del Sur de Sonora, Instituto Tecnológico Superior de Cajeme), a la Universidad Tecnológica de Nogales, al parque Tecnológico Sonora SOFT y a las empresa SPIN - OFF Innovación en Ingeniería de Manufactura y Mantenimiento S de RL MI (IIMM) e INNODITEC S.C., por el apoyo brindado a esta investigación.

### *Autorización y Renuncia*

*Los autores autorizan a LACCEI para publicar el escrito en las memorias de la conferencia. LACCEI o los editores no son responsables ni por el contenido ni por las implicaciones de lo que esta expresado en el escrito.*