Un Curso Nuevo Para Sustituir Ecuaciones Diferenciales

Carlos A. Smith
University of South Florida, Tampa, FL, USA, csmith@usf.edu

Pedro Villalba
University of South Florida, Tampa, FL, USA, pvillalb@mail.usf.edu

Scott Campbell
University of South Florida, Tampa, FL, USA, campbell@usf.edu

El curso de Ecuaciones Diferenciales ha sido, y es todavía, uno de los cursos básicos que toman los alumnos de ingeniería y ciencias en los primeros años de su formación profesional. Este artículo presenta un curso nuevo para sustituir el clásico curso de ecuaciones diferenciales. Específicamente, el artículo presenta la justificación, el material que se dicta, y la evaluación que se ha hecho hasta la fecha.

Justificación

El curso clásico de ecuaciones diferenciales que los alumnos de ingeniería y de ciencias toman en la universidad es dictado la mayoría de las veces por matemáticos. Una revisión del contenido de la materia en los textos guías evidencia que este curso no ha variado sustancialmente en los últimos años. Así mismo la revisión de los textos muestra que la aplicación de estas ecuaciones diferenciales a sistemas físicos se reduce, en algunos casos, a capítulos anexos o comentarios adjuntos dentro de otros capítulos con mínimo desarrollo. Como los profesores son matemáticos, se dificulta explicar cómo las ecuaciones diferenciales se desarrollan para casos específicos de interés en el campo de la Ingeniería, y más aún se dificulta el desarrollo de conocimiento basado en modelos debido al poco énfasis dado a la relación entre la física del problema y su representación matemática. Obviamente, esto no es una crítica a estos profesores, ellos no están – en términos generales - educados en ingeniería ni en física, y su interés se enfoca en los aspectos matemáticos de las ecuaciones lo que tiende a menudo a desmotivar a los alumnos de Ingeniería y de Ciencias, y es una crítica muy común del curso.

Otra característica de los cursos clásicos es que comúnmente se le dedica mucho tiempo a los métodos clásicos de solución analítica, incluyendo sus teoremas y lemas, tocando levemente la importante transformada de Laplace. Estas transformadas son usadas muchas veces en las diferentes ramas de la Ingeniería por su capacidad de manejar ecuaciones simultáneas.

Nosotros entendemos muy bien la importancia de la educación, y el ejercicio mental, que se obtiene en los cursos clásicos de ecuaciones diferenciales. Sin embargo, en estos momentos en que el número de créditos requeridos para la graduación están disminuyendo, cuando es necesario retener las mejores mentes dentro la Ingeniería y Ciencias, y cuando la disponibilidad y capacidad de los computadores aumenta sin límites, es ineludible la necesidad de revisar los objetivos y la parcelación (contenido) de los cursos de ecuaciones diferenciales con el fin de diseñarlos en concordancia con el contexto actual de la Ingeniería y Ciencias.

Este nuevo curso propone la enseñanza de ecuaciones diferenciales a partir del análisis inicial de la física del problema, de manera tal que las ecuaciones a ser planteadas sean fácilmente relacionadas con el comportamiento real del sistema; luego, se cubren los principales métodos de solución de ecuaciones diferenciales enseñados en los cursos regulares de ecuaciones diferenciales, haciendo especial énfasis en la transformada de Laplace.

El Nuevo Curso

Para remediar las debilidades que consideramos presenta el curso clásico de ecuaciones diferenciales, hace varios años desarrollamos un curso que presenta (a) modelaje de sistemas físicos, (b) la solución analítica de ecuaciones diferenciales, y (c) la solución de modelos asistidos por computadores (simulación). Veamos cada una de estas áreas en más detalles.

a) Modelaje de Sistemas Físicos

El objetivo principal de esta parte es presentar como se desarrollan modelos que describen sistemas físicos. Estos modelos están compuestos por ecuaciones diferenciales y algebraicas. Es una parte muy importante para la motivación del futuro ingeniero o científico. El curso presenta/repasa la física necesaria para el desarrollo de los modelos. Los sistemas que presentamos son (1) cuerpos en campos gravitacionales (física clásica), (2) sistemas mecánicos de traslación y rotación, (3) sistemas de fluidos, (4) sistemas térmicos, y (5) sistemas eléctricos. Para cada de estos sistemas presentamos las leyes de física que aplican a cada uno como, la 2da Ley de Newton (cuerpos en campos gravitacionales, y sistemas mecánicos), la Ley de Conservación de Masa (sistemas de flujos), la Ley de Conservación de Energía (sistemas térmicos), y las Leyes de Voltaje y Corriente de Kirchhoff (sistemas eléctricos). También se presentan algunos hechos experimentales y algunas ecuaciones complementarias necesarias para balancear los modelos como por ejemplo, para los cursos en campos gravitacionales la resistencia del aire, y gravedad; para los sistemas mecánicos los resortes, amortiguadores, y los diferentes tipos de fricción; para los sistemas de flujo las válvulas; para los sistemas térmicos expresiones de transferencia de calor por conducción y por convección; y para los sistemas eléctricos las relaciones de corriente y voltaje para resistores, capacitadores, e inductores. Continuamente se hace hincapié que el modelaje de cualquier sistema comienza con el uso de la ley física que gobierna al sistema. El Apéndice B presenta varios ejemplos de problemas.

b) Solución Analítica de los Modelos

Como dijimos anteriormente, los modelos que se desarrollan en este curso están compuestos principalmente por ecuaciones diferenciales, y algunas ecuaciones algebraicas. Para la solución de ecuaciones diferenciales utilizamos integración, Separación de Variables, Factor Integrante, Ecuación Característica, Coeficientes Indeterminados, y la transformada de Laplace. Cuando presentamos la Ecuación Característica, discutimos en detalle el significado de las raíces en la respuesta cualitativa (monotónica vs. oscilatoria, y estable vs. inestable), lo cual es un detalle muy importante en la Ingeniería. Cuando se presenta la transformada de Laplace, discutimos en detalle el concepto de función de transferencia y como se relaciona con la ecuación característica, y el uso de la transformada para la solución de varias ecuaciones diferenciales que interactúan entre sí. Debido a que la mayoría de los modelos que se desarrollan en el curso están compuestos por ecuaciones diferenciales de primer y segundo orden, se presentan los comportamientos (respuestas dinámicas) de estos modelos ante la aplicación de típicas funciones de fuerza, así mismo se discute el significado de la dinámica observada términos de ganancia, constante de tiempo, factor de amortiguamiento, etc.

c) Solución de Modelos Utilizando Computadores (Simulación)

El objetivo de esta parte es presentar como el uso de software ayuda a obtener la respuesta de un modelo; el objetivo no es una presentación de análisis numérico. Utilizamos el software Simulink el cual es una herramienta de MATLAB. Hemos encontrado que nuestros alumnos aprenden relativamente rápido este software, y después de tres sesiones de laboratorio (75 minutos cada sesión) están listos para trabajar en proyectos. El Apéndice C presenta algunos ejercicios. Durante una sesión de laboratorio presentamos el método de Euler para la solución de ecuaciones diferenciales con el objetivo de dar al alumno una idea de la manera en la que trabaja el software.

Evaluación

Hemos hecho dos tipos de evaluaciones, una en clase y otra en los cursos que siguen al presente (principalmente Dinámica y Sistemas Eléctricos I). La evaluación en clase es la comúnmente desarrollada para saber cuánto han aprendido los alumnos durante el curso. La evaluación en los otros cursos es para saber cuánto se ha retenido, y como comparan con otros alumnos que han tomado el curso clásico de ecuaciones diferenciales.
La evaluación en clase ha demostrado lo siguiente.

a) Modelaje de Sistemas Físicos

Asombrosamente los resultados en la parte de modelado han sido muy positivos. Los resultados han sido siempre por encima del mínimo que requerimos. Decimos "asombrosamente" porque creíamos que iba a ser la parte más difícil para los alumnos; este no ha sido el caso. Cada capítulo de modelaje está escrito de la misma manera. Comenzamos el capítulo con la ley física que se aplica, y continuamos con las siguientes relaciones necesarias para terminar el modelo. Repetimos y repetimos que cualquier modelaje comienza con la aplicación de una ley (es la primera ecuación que se escribe).

b) Solución Analítica de los Modelos

Esta es la parte más difícil para el alumno, y principalmente es por un serio olvido de los principios de algebra y de cálculo (¿esto sucede solamente en nuestra universidad?). Todos los profesores esperan que los alumnos recuerden bien algebra y cálculo, pero este no es el caso. Para minimizar los problemas, al principio de la segunda semana del curso damos el "Examen 0" para repasar los principios de algebra y calculo que vamos a necesitar en el curso (diferencial/integración de seno y coseno, algebra de exponenciales, etc.). Esta práctica ha dado muy buenos resultados.

c) Solución de Modelos Utilizando Computadores (Simulación)

Para la mayoría de los alumnos esta es la primera experiencia utilizando computadores para resolver un problema de ingeniería (no para escribir un correo, o ir a la Web!). También, es la primera vez que aprenden programación utilizando bloques, la cual es la que utiliza Simulink. Después de tres sesiones de laboratorio (75 minutos cada sesión), el 85% de los alumnos se siente con confianza para resolver proyectos más avanzados.

Para la evaluación en los otros cursos, damos un examen al principio de los cursos de Dinámica y de Sistemas Eléctricos I. Estos exámenes consisten de dos preguntas, una relacionada a la solución analítica de una ecuación diferencial, y la otra relacionada al modelaje de un sistema físico relacionado al curso donde se da el examen. Los resultados en los dos cursos son muy similares, y son los siguientes:

	Solución Analítica	Modelaje
Curso Clásico	45%	7%
Nuevo Curso	54%	42%

Los resultados indican que los alumnos que toman el nuevo curso están igualmente preparados en la solución analítica de las ecuaciones diferenciales, pero notablemente mejor preparados en la parte de modelaje de los sistemas.

Comentarios

Como todas las ecuaciones diferenciales que utilizamos están relacionadas a sistemas físicos, esto nos permite estudiar tópicos que los cursos clásicos no pueden hacer. Uno de estos tópicos es el diseño o dimensionamiento de sistemas. Por ejemplo, en un sistema mecánico compuesto por dos cuerpos con resortes y amortiguadores, el objetivo puede ser el dimensionar un resorte para obtener una respuesta deseada cuando una fuerza se aplica al sistema. Algunas veces este dimensionamiento se puede obtener analíticamente pero otras veces requiere la simulación del modelo. Por supuesto, diseño/dimensionamiento similares a este se hacen igualmente en los otros sistemas – eléctricos, térmicos, etc. - que se presentan en el libro. Hablar sobre diseño/dimensionamiento y seguridad es parte del curso lo cual se hace fácil pues siempre estamos refiriéndonos a sistemas físicos.

Una pregunta muy real es, ¿qué material del curso clásico se ha dejado fuera en este nuevo curso? La respuesta es, los fundamentos teóricos que se basan los métodos de solución, los casos especiales de cada método, y los típicos teoremas y lemas.

En nuestra universidad este curso es de 3 créditos (150 minutos de clase a la semana). Nos reunimos dos días a la semana. Un día es en un aula normal, y el otro día en un laboratorio de computadores. Verdaderamente, utilizamos los computadores nada más cuatro semanas al semestre.

Ya tenemos un libro escrito para este curso, "*A First Course in Differential Equations, Modeling, and Simulation"* publicado por CRC/Taylor&Francis Group. La Tabla de Contenido se demuestra en el Apéndice A. El Apéndice B presenta unos problemas típicos del curso, y el Apéndice C presenta unos proyectos que se dan en el curso.

Conclusión

Estamos muy contentos con el curso; las evaluaciones demuestran el beneficio que se obtiene en los cursos que siguen a este. Los alumnos aprenden a escribir las ecuaciones matemáticas necesarias para describir un sistema físico (modelaje), y aprenden a obtener el resultado analítico o simulado; y más importante aún, aprenden a correlacionar ambos resultados. Un beneficio importante es que los alumnos aprenden a relacionar la física con la matemática, aprenden a entender el significado físico de la matemática, y la importancia del uso del computador en cálculos de ingeniería.

APENDICE A

Tabla de Contenido

1 Introduction
1-1 An Introductory Example
1-2 Modeling
1-3 Differential Equations
1-4 Forcing Functions
1-5 Book Objectives
1-6 Summary
Problems

2 Objects in a Gravitational Field
2-1 An Example
2-2 Antidifferentiation – Technique for solving first-order ordinary differential equations
2-3 Back to Section 2-1
2-4 Another Example
2-5 Separation of Variables - Technique for solving first-order ordinary differential equations
2-6 Back to Section 2-5
2-7 Equations, Unknowns, and Degrees of Freedom
2-8 Summary
Problems

3 Classical Solutions of Ordinary Linear Differential Equations
3-1 Examples of Differential Equations
3-1.1 Mechanical Translational – Chapter 5
3-1.2 Fluid System – Chapter 7
3-1.3 Thermal System – Chapter 8
3-1.4 Electrical Circuit – Chapter 9
3-2 Definition of a Linear Differential Equation
3-3 Integrating Factor Method
3-3.1 Development of the Integrating Factor Method
3-4 Characteristic Equation – Technique for solving homogeneous n^{th}-order linear differential equations with constant coefficients
3-4.1 Qualitative Characteristic of System Response
3-5 Undetermined Coefficients – Technique for obtaining the particular solution of nonhomogeneous differential equations
3-5.1 Multiple Forcing Functions
3-6 Response of First and Second Order Systems
3-6.1 First-Order Systems
3-6.2 Second-Order Systems
3-6.3 Underdamped Response
3-7 Application of the Mathematics to Design
3-8 Summary
Problems

4 Laplace Transforms

4-1 Definition of the Laplace Transform
4-2 Properties and Theorems of the Laplace Transform
4-3 Solution of Differential Equations Using Laplace Transform
4-3.1 Inversion by Partial Fractions Expansion
4-3.2 Handling Time Delays
4-4 Transfer Functions
4-5 Algebraic Manipulations Using Laplace Transforms
4-6 Deviation Variables
4-7 First and Second-Order Systems
4-8 Summary
Problems

5 Mechanical Systems: Translational

5-1 Mechanical Law and Experimental Facts
5-2 Types of Systems
5-2.1 Undamped System
5-2.2 Damped System
5-3 D'Alembert's Principle and Free Body Diagrams
5-4 Additional Examples
5-5 Vertical Systems
5-6 Summary
Problems

6 Mechanical Systems: Rotational

6-1 Mechanical Law, Moment of Inertia and Torque
6-2 Torsion Springs
6-3 Rotational Dampening
6-4 Gears
6-5 Systems with Rotational and Translational Elements
6-6 Summary
Problems

7 Mass Balances

7-1 Conservation of Mass
7-2 Flow Rates and Concentrations
7-3 Flow element and experimental facts
7-4 Examples of Mass Balances
7-5 Summary
Problems

8 Thermal Systems

8-1 Conservation of Energy
8-2 Modes of Heat Transfer
8-3 Conduction
8-4 Convection
8-5 Conduction and Convection in Series
8-6 Accumulated or Stored Energy
8-7 Some Examples
8-8 Heat Transfer in a Flow System

8-9 Summary
Problems

9 Electrical Systems
9-1 Some Definitions and Conventions
9-2 Electrical Laws and Electrical Components
9-2.1 Initial conditions in electrical systems
9-3 Examples of Electrical Circuits
9-4 Additional Examples
9-5 RC Circuits as Filters
9-5.1 High-Pass Filter
9-5.2 Low-Pass Filter
9-6 Summary
Problems

10 Numerical Simulation
10-1 Numerical Solution of Differential Equations
10-2 Euler's Method for First Order, Ordinary, Differential Equations
10-3 Euler's Method for Second Order, Ordinary, Differential Equations
10-4 Step Size
10-5 More Sophisticated Methods
10-6 Representation of Differential Equations by Block Diagrams
10-6.1 Basic Blocks
10-6.2 Guidelines for Constructing Block Diagrams
10-6.3 Some Additional Examples
10-6.4 Some Additional Source Blocks
10-7 Additional Examples
10-8 Summary
Problems

APENDICE B

Problemas

Problem III-4

For the two-mass system shown in Fig. PIII-4 the information is the following:
$m_1 = m_2 = 5\,kgm$; $P_1 = P_2 = 20\,N \cdot s/m$; $P_3 = 50\,N \cdot s/m$; and $k_1 = k_2 = 100\,N/m$.

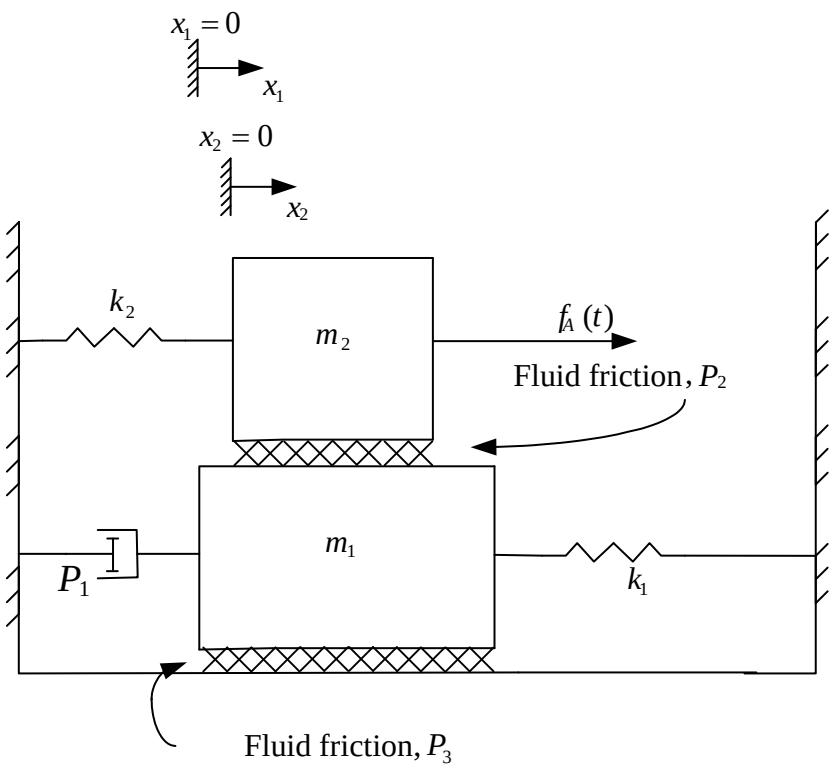

Figure PIII-4 Mechanical system for Problem III-4

Develop the model that describes the position and velocity of both blocks.

Problem IX-23

The model that describes the positions of the blocks in Problem III-4 is

$$5\frac{d^2x_1}{dt^2} + 90\frac{dx_1}{dt} + 100x_1 = 20\frac{dx_2}{dt}$$

and

$$5\frac{d^2x_2}{dt^2} + 20\frac{dx_2}{dt} + 100x_2 = f_A(t) + 20\frac{dx_1}{dt}$$

Assume that the initial conditions are $x_1(0) = \left.\frac{dx_1}{dt}\right|_{t=0} = x_2(0) = \left.\frac{dx_2}{dt}\right|_{t=0} = 0$, and that the applied force is $f_A(t) = 100u(t)\ N$. Using the Laplace transform method obtain the transfer function $\frac{X_1(s)}{F_A(s)}$. On the basis of this transfer function, do you expect the response of the system to be stable or unstable, monotonic or oscillatory and why? Obtain the analytical equations that describe the displacement and velocity of each block.

Example VII-3.3

Consider the general "RLC circuit" of Fig. VII-3.5. Obtain the model that describes the voltage across the capacitor, and the current in the loop after $t = 0$. Initially there is no current flowing and the capacitor is completely discharged, that is $v_C(0) = 0V$ and $i(0) = 0\,A$.

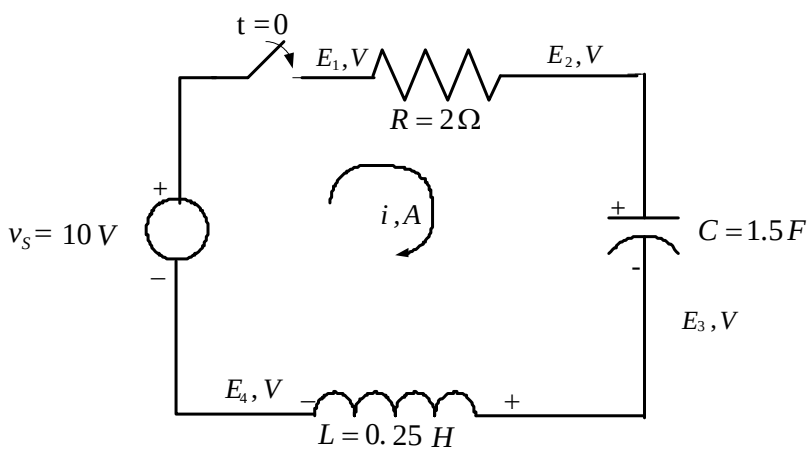

Figure VII-3.5 RLC circuit

Problem VIII-23

The model that describes the voltage across the capacitor in Example VII-3.3 is

$$0.375\frac{d^2 v_C}{dt^2} + 3.0\frac{dv_C}{dt} + v_C = v_S$$

Using the initial conditions given in that example, obtain the analytical solution.

Problem V-1

A storage tank has a diameter of 20 *ft* and a height of 10 *ft*. The output volumetric flow from this tank is given by $\dot{V}_{out}(t) = 2h(t)$ where *h(t)* is the height of liquid in the tank. At a particular tank time the tank is at steady state with an input flow of $10\ ft^3/\min$.

a) What are the units of the number 2 in the expression of the output volumetric flow?
b) What is the steady-state liquid height in the tank?

c) Develop the model that describes how the level in the tank varies if the input flow changes.

e) Without solving the model, if the input flow becomes $25\ ft^3/\min$, will the tank overflow? If it overflows how long it takes? If it doesn't overflow, what is the new steady-state height?

AUTHORIZATION AND DISCLAIMER

Authors authorize LACCEI to publish the paper in the conference proceedings. Neither LACCEI nor the editors are responsible either for the content or for the implications of what is expressed in the paper