Eighth LACCEI Latin American and Caribbean Conference for Engineering and Technology (LACCEI'2010)
"Innovation and Development for the Americas", June 1-4, 2010, Arequipa, Perú

Sensibilidad de la eficiencia de un puesto de trabajo usando modelos de colas.

Wilmer Atoche
Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, Perú, watoche@pucp.edu.pe

Walter Silva
Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, Perú, walter.silva@pucp.edu.pe

RESUMEN

Esta investigación desarrolla bajo el proceso de nacimiento y muerte; la sensibilidad de la eficiencia en el puesto de trabajo de un proceso productivo, usando diferentes valores del factor de utilización (relación entre las tasas de llegadas y tasas de servicios) y valores de capacidad referenciales. Los puestos de trabajo se miden por el rendimiento del mismo y en este caso nos centraremos en la eficiencia, para ello simularemos valores para 50 replicas y calcularemos algunos parámetros de colas. Se concluye que es importante la capacidad del puesto de trabajo dentro del sistema para obtener valores de eficiencia mayores y así optimizar el puesto de trabajo.
.

Palabras Clave: Proceso de nacimiento y muerte, factor de utilización, parámetros de colas.

ABSTRACT

This research develops in the process of birth and death, the sensitivity of efficiency in the workplace of a production process, using different values of utilization factor (ratio of arrival rates and service fees) and reference capacitance values. The jobs are measured by the performance of it and in this case we focus on efficiency, to simulate it for 50 replicas values and calculate some parameters of queues. We conclude that it is important to the ability of the job within the system to obtain higher values of efficiency and optimize the workplace.

Keywords: Birth and death process, utilization factor, queue parameters.

1. INTRODUCCIÓN

El presente informe describe los componentes de un sistema de colas en forma general y luego se desarrolla en el estado estable, el modelo M/M/s/K[1] usando el proceso de nacimiento y muerte, para s=1.
Una vez obtenida la función de probabilidad para el sistema de colas, se calcula los cuatro parámetros o cantidades fundamentales.

L: Numero esperado de clientes en el sistema.
Lq: Longitud esperada de la cola.
W: tiempo esperado en el sistema (incluye el tiempo de servicio).
Wq: tiempo de espera en la cola.

[1] M/M/s/K: Modelo de colas con distribución de tiempos entre llegadas y tiempos de servicio exponenciales, s representa el número de servidores y K la capacidad del sistema.

Se considera el puesto de trabajo como un sistema de colas según el modelo M/M/s/K, donde las dimensiones del puesto nos brinda la capacidad K, conformada por las entidades en espera (K-1) y la entidad en el servidor. La investigación hace uso del software ARENA para simular las réplicas de cada combinación capacidad-factor de utilización y concluye con el análisis de sensibilidad de la eficiencia, teniendo herramientas suficientes para garantizar que la eficiencia en el puesto de trabajo es la máxima obtenible y permanezca estable para los cambios en las tasas de servicios.

2. Desarrollo del Modelo Basado en el Proceso de Nacimiento y Muerte.

2.1 Modelo M/M/s=1/K

Se tiene un sistema de colas donde los tiempos entre llegadas y los tiempos de servicio siguen distribuciones exponenciales; tiene un servidor (s=1) y capacidad finita (K); esto hace que el sistema rechace los clientes cuando este esta lleno, es decir desde el punto de vista del sistema de nacimiento y muerte, la tasa media de llegada se hace cero y la tasa de servicio permanece invariante, es decir:

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda; \ n \le K-1 \\ 0; \ n \ge K \end{cases}, n \in N \quad \text{y} \quad \mu_n = \mu; n \in N \tag{1}$$

Luego se tiene $C_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = \rho^n; n \le K; \ n \in N$ (2)

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{K} Cn}, \text{ desarrollando se tiene } P_0 = \begin{cases} \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}}; \ \rho \ne 1 \\ \frac{1}{K+1} \ ; \ \rho = 1 \end{cases} \tag{3}$$

Se sabe $P_n = C_n P_0$, entonces la función de probabilidad de que exista n clientes en el sistema es:

$$P_n = \begin{cases} \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}} \rho^n; \ \rho \ne 1 \\ \frac{1}{K+1} \quad ; \ \rho = 1 \end{cases} \tag{4}$$

Se puede tener entonces:

L: Numero esperado de clientes en el sistema,

$$L = \begin{cases} \frac{\rho}{1-\rho} - \frac{(K+1)\rho^{K+1}}{1-\rho^{K+1}}; \ \rho \ne 1 \\ \frac{K}{2} \ ; \ \rho = 1 \end{cases} . \tag{5}$$

L_q: Longitud esperada de la cola, se tiene la relación $L_q = L - (1 - P_0)$ y con (3) y (5),

$$L_q = \begin{cases} \dfrac{\rho^2}{1-\rho} - \dfrac{K(1-\rho)\rho^{K+1}}{1-\rho^{K+1}} & ; \rho \neq 1 \\ \dfrac{K(K-1)}{2(K+1)} & ; \rho = 1 \end{cases} \qquad (6)$$

donde $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$.[2] También se puede tener $\bar{\lambda}$: tasa de llegadas promedio al sistema,

$$\bar{\lambda} = \lambda(1 - P_K) \qquad (7)$$

y usando las formulas de Little[3] se obtienen, W: tiempo esperado en el sistema (incluye el tiempo de servicio) y W_q: tiempo de espera en la cola

$$W = \frac{L}{\bar{\lambda}} \quad , \quad W_q = \frac{L_q}{\bar{\lambda}} \qquad (8)$$

2.2 SIMULACIÓN DEL MODELO M/M/S=1/K

Se usa el software ARENA para simular el sistema M/M/s/K; donde:
M: Es un proceso markoviano de entrada, en nuestro caso es una distribución de probabilidad exponencial de media 5 minutos.
M: Es un proceso markoviano de salida o de atención en el puesto de trabajo, en nuestro caso también es una distribución de probabilidad exponencial de media que oscila entre 3 a 7,5 minutos.
s: es el número de servidores, como es un puesto de trabajo s=1.
K: es la capacidad del sistema, es decir el máximo número de entidades esperando el servicio es de K-1 y estos valores oscilan desde que no existe cola (K=1) hasta K=100.
Las corridas y los resultados obtenidos están basados en 50 réplicas, cada una representa una jornada laboral de 8 horas. A continuación se muestra como ejemplo el código SIMAN para media de servicio de 3 minutos y capacidad K=5.

SIMAN BLOCKS

```
Llegada 1      CREATE,        1:EXPO(5):MARK(TLLEGADA):NEXT(0$);

0$             QUEUE,         Cola 1,4,salida;
1$             SEIZE,         1,Other:
                              Operario,1:NEXT(4$);

4$             TALLY:         TCola,TNOW-TLLEGADA,1;
Servidor       DELAY:         EXPO(3),,Other:NEXT(2$);

2$             RELEASE:       Cajero,1;
3$             TALLY:         Tsistema,TNOW-TLLEGADA,1;
salida         DISPOSE:       No;
```

---

[2] Si ρ=*1*, es necesario aplicar la regla de *L´Hôspital*

[3] *John D.C. Little* proporcionó la primera demostración de $L = \lambda W$ y $L_q = \lambda W_q$

SIMAN ELEMENTS

```
PROJECT,       "Ejemplo","Atoche",27/01/10,Yes,No,Yes,Yes,Yes,No,No,No,No,No,No;

ATTRIBUTES:    TLLEGADA,DATATYPE(Real);

QUEUES:        Cola 1,FirstInFirstOut,,AUTOSTATS(Yes,,);

RESOURCES:
Operario,Capacity(1),,Stationary,COST(0.0,0.0,0.0),,AUTOSTATS(Yes,,),EFFICIENCY(1,);

TALLIES:       Tsistema:
               TCola;

DSTATS:        nr(cajero),Util cajero:
               nq(Cola 1),long cola;

REPLICATE,     50,0.0,480,Yes,Yes,0.0,,,24.0,Minutes,No,No,,,No,No;
```

3. RESULTADOS

Los siguientes resultados se obtienen usando el software ARENA para un modelo M/M/s=1/K obteniéndose valores estables para valores de K altos (mayores a 20). El proceso de llegadas es un proceso Poisson, es decir el tiempo entre llegadas sigue una distribución exponencial y el proceso de servicio también es un proceso Poisson y el tiempo de servicio también es exponencial.
Se define la eficiencia del puesto de trabajo como el porcentaje de tiempo de una jornada laboral que el puesto está ocupado procesando las entidades y esto depende directamente del factor de utilización del sistema ρ.
A continuación se muestran los resultados para tres escenarios; el primero con el tiempo medio de servicio de 3 minutos, el segundo con la media de 5 minutos y el tercero de media 7,5 minutos respectivamente. La tasa de llegadas se mantiene constante a razón de 12 entidades por hora, durante las 8 horas de trabajo por jornada.
Se puede notar además que para valores de capacidad superiores a diez, las variaciones son menores al 4%, esto hace que el modelo simulado sea aceptable, comparado con los cálculos matemáticos. Las tablas también muestran los tiempos de espera promedio de cada entidad y las unidades procesadas.

Tabla 1. Valores obtenidos con ρ=0,6 para diferentes valores de K.

Valores obtenidos usando 50 replicas, media entre llegadas de 5 minutos y media de servicio igual a 3 minutos				
K	Cola Lq	Espera Wq (min)	Unidades Atendidas	Eficiencia %
1	0	0	60,32	38,04
2	0,19	1,16	78,84	49,73
5	0,67	3,39	93,28	59,57
10	0,88	4,30	95,80	61,10
20	0,92	4,42	96,18	61,54
50	0,92	4,42	96,18	61,54
100	0,92	4,42	96,18	61,54

Tabla 2. Valores obtenidos con ρ=1,0 para diferentes valores de K.

Valores obtenidos usando 50 replicas, media entre llegadas de 5 minutos y media de servicio igual a 5 minutos				
K	Cola Lq	Espera Wq (min)	Unidades Atendidas	Eficiencia %
1	0	0	48,24	50,22
2	0,33	2,52	63,66	67,11
5	1,74	10,37	79,32	85,01
10	3,89	21,09	85,38	91,02
20	6,40	31,94	86,24	92,57
50	6,90	33,22	86,24	92,57
100	6,90	33,22	86,24	92,57

Tabla 3. Valores obtenidos con ρ=1,5 para diferentes valores de K.

Valores obtenidos usando 50 réplicas, media entre llegadas de 5 minutos y media de servicio igual a 7,5 minutos.				
K	Cola Lq	Espera Wq (min)	Unidades Atendidas	Eficiencia %
1	0	0	38,66	60,84
2	0,48	4,60	50,12	79,25
5	2,45	18,72	61,70	94,00
10	6,15	43,69	63,44	97,68
20	11,72	72,15	63,58	97,83
50	15,89	76,74	63,58	97,83
100	15,91	76,74	63,58	97,83

En el caso que la capacidad K del sistema crece a valores superiores a 20 los valores se hacen estables, es decir, si aumentamos la capacidad del sistema, no beneficia a la eficiencia porque esta no cambia.
Los resultados de la simulación muestran que para el primer escenario no es necesario tener una capacidad K muy alta de entidades en proceso esperando ser atendidas, la tasa de servicio es mayor que la tasa de llegadas; es decir el tiempo que se procesa una entidad es menor que el tiempo entre llegadas.
Los resultados de la simulación también muestran que para el segundo y tercer escenario las entidades en proceso esperando ser atendidas se incrementan, pero sin superar la capacidad K del puesto de trabajo.

4. CONCLUSIONES

Los cálculos son confiables para aplicarlos a cualquier puesto de trabajo, en particular se comprobó en las operaciones de lijado y pulido en una empresa que procesa vajillas de acero inoxidable. La operación de lijado tenía un factor de utilización similar al del primer escenario (ρ=0,6) y en el puesto de pulido se tenía un factor de utilización cercano o mayor a la unidad (ρ >1).
Las cantidad de unidades procesadas simuladas son similares a la de los puestos de lijado y pulido de la línea de vajillas de acero inoxidable.

Si se incrementa la tasa de llegadas hace que el factor de utilización también aumente, la cola de espera aumenta y esto hace que los tiempos de vacancia (sin trabajar) en el servidor sea mínimo, es decir el servidor está ocupado la mayor parte del tiempo y por consecuencia la eficiencia del puesto de trabajo se incrementa.
Se pueden hacer los cálculos y simulaciones usando un programa computacional en cualquier lenguaje de programación, usando números aleatorios y replicando en forma similar.
Si se tiene un puesto de trabajo que tiene longitud de cola restringida, se debe incrementar la tasa de llegadas para tener mayor valor del factor de utilización y así incrementar la eficiencia del puesto de trabajo.
Los pequeños errores cometidos al comparar los valores simulados, con los valores obtenidos por las formulas hacen que el modelo sea más confiable.
Se puede apreciar que el valor de la eficiencia se mantiene invariante para valores de K mayores a 20, es decir, se podría diseñar los puestos de trabajo para cualquier sistema productivo usando una capacidad mínima de veinte unidades en proceso por puesto.
Se puede usar la capacidad de K=10, si el puesto evaluado no es cuello de botella, es decir si la pequeña variación no afecta la eficiencia del sistema total.
Es conveniente siempre tener entidades en proceso y el factor de utilización alto, así la eficiencia tendera al 100%.
Se puede emplear solo para los cuellos de botella del proceso y así mejorar la eficiencia de todo el proceso.
Se puede desarrollar de manera similar el modelo M/M/s/K, para el caso de tener más de un servidor (s>1) y con este analizar la sensibilidad del rendimiento de un conjunto de puestos con características similares.

REFERENCIAS

Winston W. L. (2005), *Investigación de operaciones: Aplicaciones y Algoritmos,* Mexico:Thomson
Hillier F. S. / Lieberman G.J (2002) *Investigación de operaciones*, Mexico:McGraw-Hill.
Eppen, G., Gould, F., Schmidt, C., Moore, J. y Weatherford, L.(2000), *Investigación de operaciones en la ciencia administrativa*, Mexico: Prentice Hall.
Ross, S. M. (1999) *Simulación*, Mexico: Prentice Hall.
Kelton, W. D., Sadowski, R. P. y Sadowski, D. A(1998), *Simulation with Arena*.McGraw Hill.
Apostol T. M. (1985) *Calculus*, Barcelona : Reverte
Bronshtein I. / Semendiaev K (1982), *Manual de matemáticas* , Moscu MIR